

УДК 521.135

О движениях гантели на инвариантном многообразии «гравитационный пропеллер» в обобщенной эллиптической задаче Ситникова

Красильников Павел Сергеевич

krasil06@rambler.ru

Исмагилов Альберт Рафаилович^(*)

arism8@mail.ru

Московский авиационный институт, Москва, Россия

Аннотация. Исследована задача о поступательно-вращательных движениях симметричной гантели малой массы в обобщенной эллиптической задаче Ситникова. Доказано существование интегрального многообразия «гравитационный пропеллер». Составлено уравнение плоских колебаний гантели, когда центр масс гантели совпадает с центром масс основных тел. Показано, что это уравнение совпадает с уравнением Белецкого, если гантель имеет бесконечно малую длину. Получены различные типы регулярных уравнений при показательной редукции между малыми параметрами. Описаны изолированные периодические колебания гантели, а также квазипериодические колебания.

Ключевые слова: обобщенная задача Ситникова, «гравитационный пропеллер», гантель, показательная редукция, поступательно-вращательные движения

Введение. Классическая задача Ситникова является частным случаем ограниченной задачи трех тел [1], обобщенный вариант этой задачи отличается заменой пассивно гравитирующей точки на стержень [2] или гантель [3].

В поле притяжения двух одинаковых тел, имеющих массу M и движущихся вокруг общего центра масс C по эллиптическим орбитам, находится гантель малой массы $2m$ и длины $2l$. Пусть $C\xi\eta\zeta$ — инерциальная система координат, $Cx_{\text{с}}y_{\text{с}}z_{\text{с}}$ — синодические оси, $Ox'y'z'$ — связанная с гантелью система координат, ось Oz' которой направлена вдоль гантели. Ориентацию гантели в кениговых осях задаем с помощью углов Эйлера ψ, φ, θ . Уравнения движения центра масс гантели запишем в виде

$$2m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad 2m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad 2m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

где $U = U_1 + U_2$ — силовая функция задачи. Здесь

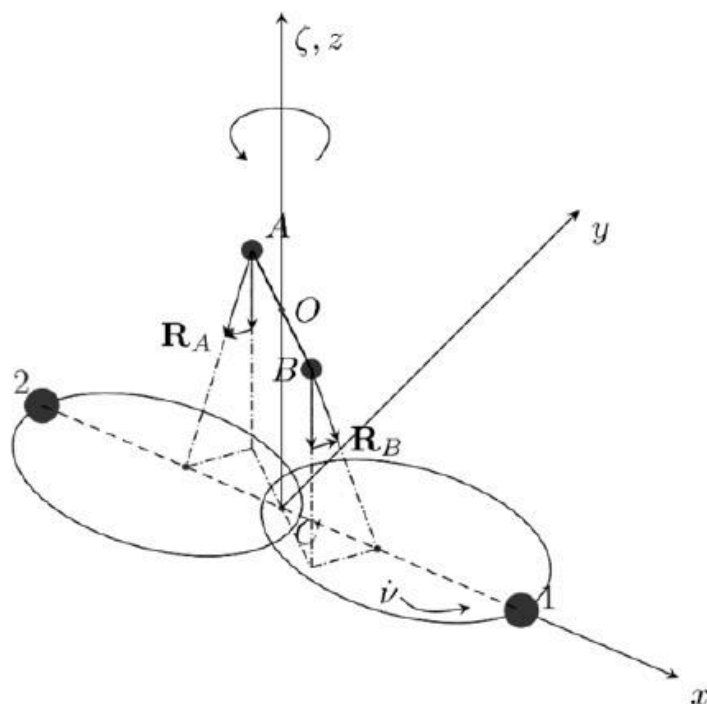
$$U_j = f \frac{Mm}{r_{jA}} + f \frac{Mm}{r_{jB}};$$

$$r_{1A} = \sqrt{(\xi + l \sin \psi \sin \theta - r \cos \nu)^2 + (\eta - l \cos \psi \sin \theta - r \sin \nu)^2 + (\zeta + l \cos \theta)^2}.$$

Здесь $2r$ есть расстояние между основными телами. Значение r_{1B} следует из r_{1A} заменой l на $-l$; замена r на $-r$ переводит r_{1B}, r_{1A} в r_{2B}, r_{2A} .

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{J\sin^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{J}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \quad J = 2ml^2 \quad (2)$$
$$\mathcal{P} = \left\{ \xi = \eta = 0, \zeta = \zeta(t), \theta = \frac{\pi}{2}, \psi = v(t) + \delta(t) \right\}.$$
$$\ddot{\zeta} = -\mu\zeta \left(\frac{1}{(l^2 - 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} + \frac{1}{(l^2 + 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right), \quad (3)$$

$$\ddot{\delta} = \mu \frac{r}{1} \cos \delta \left(\frac{1}{(1^2 - 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1^2 + 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right) - \ddot{v}. \quad (4)$$



Инвариантное многообразие «гравитационный пропеллер»

Исследованы малые плоские колебания ($\zeta(t) \equiv 0$, $\delta \sim \varepsilon$, $\dot{\delta} \sim \varepsilon$) гантели бесконечно малой длины ($l \rightarrow 0$) и произвольной длины ($l \neq 0$), когда параметры e , ε являются малыми и связаны редукцией $\varepsilon = e^\alpha$: в плоскости $(\delta, \dot{\delta})$ получены два кольца регулярных колебаний $(0 \leq \alpha \leq 1/3)$, $(1/3 \leq \alpha \leq 1)$, исследованы колебания в этих кольцах и на границах колец. Показано, что область $(\alpha > 1)$ является областью сингулярных колебаний. Показано, что при определенных длинах гантели резко нарастает амплитуда изолированных периодических колебаний — явление параметрического резонанса.

Заключение. Описаны регулярные колебания «сингулярного» типа, когда длина гантели стремится к большой оси эллиптических орбит притягивающих тел: гантель непрерывно вращается в одном направлении, а частота ее вращений может принимать сколь угодно большие значения.

Список источников

- [1] Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел. *Докл. АН СССР*, 1960, т. 133, № 2, с. 303–306.
- [2] Красильников П.С. О многообразии «гравитационный пропеллер» в обобщенной круговой задаче Ситникова. *ПММ*, 2021, т. 85, № 5, с. 576–586.
- [3] Krasilnikov P.S., Ismagilov A.R. On the dumb-bell equilibria in the generalized Sitnikov problem. *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, vol. 18, no. 4, pp. 577–588.