

УДК 539.3

Внедрение модели вязкопластичности в программные комплексы, основанные на методе конечных элементов

Бондарь Валентин Степанович^(*)

tm@mospolytech.ru

Абашев Дмитрий Рустамович

tm@mospolytech.ru

Ларионова Ольга Евгеньевна

tm@mospolytech.ru

Московский политехнический университет, Москва, Россия

Аннотация. В настоящее время для моделирования процессов вязкопластичности разработано множество моделей. Простые варианты таких моделей реализованы в современных программных комплексах, основанных на методе конечных элементов. Однако, для решения сложных задач, таких как процессы деформирования высоконагруженных элементов жидкостных ракетных двигателей, такие модели не подходят, поскольку в полной мере не отражают все особенности процессов деформирования. В работе предложен метод внедрения одной из современных моделей вязкопластичности в программный комплекс, основанный на методе конечных элементов.

Ключевые слова: математическое моделирование, вязкопластическое деформирование, теория вязкопластичности, метод конечных элементов, высокая температура, напряженно-деформированное состояние

Введение. Для моделирования процессов деформирования высоконагруженных элементов жидкостных ракетных двигателей разработана модель вязкопластичности, основанная на теории течения при комбинированном упрочнении В.С. Бондаря [1]. Для внедрения модели материала в современные комплексы расчетов процессов деформирования, основанные на методе конечных элементов, необходима разработка подпрограммы, которая за один шаг вычисления по известным исходным данным будет определять необходимые параметры процесса деформирования материала к концу шага.

Материалы и методы; результаты. Приводится сводка основных уравнений разработанного варианта теории для случая жесткого нагружения.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu \left(3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} \right) \right], \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij}^e + 3\lambda\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e - 2G\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (3)$$

$$\frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0, \quad (4)$$

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_u^p + q_\xi \dot{\xi}, \quad (5)$$

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a a_{ij} \dot{\varepsilon}_u^p + g_a^\xi a_{ij} \dot{\xi}, \quad (6)$$

$$q_\xi = \frac{\partial C_0}{\partial \xi} + \frac{\partial E_C}{\partial \xi} \varepsilon_u^p,$$

$$q_\varepsilon = E_C,$$

$$g = \beta \sigma_a,$$

$$g_a = -\beta,$$

$$g_a^\xi = \frac{1}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{d\xi},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_u^p = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_u^* = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*},$$

$$\dot{\varepsilon}_u^p = \frac{1}{E^* + 3G} \left[3G \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^\xi \dot{\xi} \right], \quad (8)$$

$$E^* = q_\varepsilon + g + g_a a_u^*,$$

$$B^\xi = q_\xi + g_a^\xi a_u^*,$$

$$a_u^* = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}}{\sigma_u^*},$$

$$\begin{cases} \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_u^p \leq 0 - \text{упругость;} \\ \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_u^p > 0 - \text{неупругость,} \end{cases}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ — тензор скоростей деформаций, тензор скоростей упругой и пластической деформаций; σ_{ij} — тензор напряжений, $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij}$ — среднее напряжение, δ_{ij} — символ Кронекера, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ — девиатор активных напряжений; s_{ij} — девиатор напряжений, a_{ij} — тензор добавочных напряжений; C — радиус поверхности

нагружения; ε_{u*}^p — накопленная пластическая деформация, $E_c(\xi)$ — параметр, характеризующий скорость изменения размера поверхности нагружения, $C_0(\xi)$ — начальное значение размера поверхности нагружения; $\sigma_a(\xi)$ — предельное значение микронапряжений нелинейного типа, β — показатель скорости образования микронапряжений нелинейного типа; σ_u^* — интенсивность активных напряжений; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига.

В таблице перечислены исходные данные для проведения расчета. Также необходимы параметры материала, определенные для заданной температуры.

Исходные параметры подпрограммы

Параметры процесса деформирования	Даны в начале шага	Необходимо вычислить за итерацию
Компоненты тензора напряжений	$\sigma_{ij(n)}$	$\sigma_{ij(n+1)} = \sigma_{ij(n)} + \Delta\sigma_{ij}$
Компоненты тензора деформаций	$\varepsilon_{ij(n)}$	—
Компоненты тензора приращений деформаций	$\Delta\varepsilon_{ij}$	—
Матрица Якоби	—	$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}}$
Приращение времени	Δt	
Накопленная пластическая деформация	$\varepsilon_{u*}^p(n)$	$\varepsilon_{u*}^p(n+1) = \varepsilon_{u*}^p(n) + \Delta\varepsilon_{u*}^p$
Компоненты тензора микронапряжений	$a_{ij(n)}$	$a_{ij(n+1)} = a_{ij(n)} + \Delta a_{ij}$
Размер поверхности нагружения	$C_{(n)}$	$C_{(n+1)} = C_n + \Delta C$
Скорость деформации на предыдущей итерации	$\xi_{(n-1)}$	$\xi_{(n)}$
Приращение времени на предыдущей итерации	$\Delta t_{(n-1)}$	$\Delta t_{(n)}$

Поскольку процесс вычисления является итерационным важно учитывать, что при вязкопластическом деформировании изображающая точка процесса нагружения должна находиться на поверхности нагружения. Для этого необходимо вычислять приращение накопленной пластической деформации из следующего уравнения, обеспечивающего нахождение изображающей точке процесса нагружения на поверхности текучести:

$$\sigma_{u(n)}^* + \Delta\sigma_u^* = C_{(n)} + \Delta C,$$

где $\sigma_{u(n)}^*$ — интенсивность активных напряжений на начало шага, $\Delta\sigma_u^*$ — приращение активных напряжений, ΔC — приращение размера поверхности нагружения. Решение данного уравнения:

$$\Delta\epsilon_{u^*}^p = \frac{1}{E + 3G} \left[3G \frac{s_{ij(n)}^* \Delta\epsilon_{ij}}{\sigma_{u(n)}^*} - B^\xi \Delta\xi + \sigma_{u(n)}^* - C_{(n)} \right].$$

Для нахождения значений напряжения и параметров процесса нагружения в конце расчетного шага проведена линеаризация уравнений (1) – (8). Далее, продифференцировав уравнение (3) по каждому из компонент тензора приращений деформаций, получены компоненты матрицы Якоби.

Заключение. Верификация разработанной математической модели деформирования материала проведена на примере разработанной пользовательской подпрограммы «UMAT» [2] в программном комплексе Abaqus. Решена проблема попадания точки, изображающей процесс нагружения, на поверхность текучести.

Список источников

- [1] Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Прикладная теория неупругости. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018, № 4, с. 147–162.
- [2] *Abaqus 6.11. Analysis User's Manual*. Volume I-V, Dassault Systems, 2011.