

УДК 519.6

Устойчивость по Якоби механического аналога колебаний жидкости в баке

Шкапов Павел Михайлович^(*)

spm@bmstu.ru

Сулимов Валерий Дмитриевич

sulimov@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. На основе теории Косамби — Картана — Черна рассматриваются задачи анализа устойчивости динамической системы — механического аналога колебаний жидкости в баке при наличии управляющего воздействия. Вводится геометрическое описание системы и определяются ее геометрические инварианты. Условия устойчивости системы по Якоби формулируются с использованием вычисленных собственных значений второго инварианта. Представлена постановка обратной задачи восстановления параметров системы и характеристик управляющего воздействия по собственным значениям второго инварианта, соответствующим условиям устойчивости по Якоби. Приведен численный пример.

Ключевые слова: динамическая система, теория Косамби — Картана — Черна, геометрический инвариант, собственное значение, устойчивость по Якоби, обратная задача, глобальная оптимизация

Введение. В динамике ракет используют механический аналог колебаний жидкости, частично заполняющий топливный бак [1]. Рассматривается задача исследования устойчивости указанного объекта как динамической системы при наличии управляющего воздействия. В рамках подхода на основе теории Косамби — Картана — Черна вводится геометрическое описание системы и определяются второй геометрический инвариант — тензор кривизны отклонения [2]. Заключение об устойчивости системы по Якоби следует из анализа вычисленных собственных значений второго инварианта. Рассматривается постановка обратной задачи: по указанным собственным значениям восстановить параметры системы [3]. Существенно, что в общем случае обратная задача является некорректной, а ее критериальная функция — многоэкстремальной.

Материалы и методы; результаты. Механический аналог малых колебаний жидкости, частично заполняющей бак, представляет собой математический маятник на подвижном основании [1]. Заданы полная масса бака со всей жидкостью и масса маятника M и m соответственно; l — длина маятника. Обобщенными координатами выбраны: s — перемещение подвижного основания вдоль горизонтальной направляющей; θ — угол отклонения маятника от вертикали. Управляющее воздействие представлено приложенной к подвижному основанию силой $F = -(K_1\dot{s} + K_2\ddot{\theta})$, K_1, K_2 — коэффициенты усиления обратной связи. Дифференциальные уравнения рассматриваемой системы:

$$\ddot{s} + \frac{K_1}{M-m}\dot{s} + \frac{K_2}{M-m}\dot{\theta} - \frac{mg}{M-m}\theta = 0;$$

$$\ddot{\theta} - \frac{K_2}{(M-m)l}\dot{\theta} - \frac{Mg}{(M-m)l}\theta + \frac{K_1}{(M-m)l}\dot{s} = 0.$$

Определены компоненты тензора кривизны отклонения P_j^i :

$$P_1^1 = \frac{l(K_1)^2 - K_1 K_2}{4l(M-m)^2}; \quad P_2^1 = \frac{lK_1 K_2 - (K_2)^2 + 4l(M-m)mg}{4l^2(M-m)^2};$$

$$P_1^2 = \frac{K_1 K_2 - l(K_1)^2}{4l(M-m)^2}; \quad P_2^2 = \frac{(K_2)^2 - lK_1 K_2 - 4l(M-m)Mg}{4l^2(M-m)^2}.$$

Собственные значения тензора P_j^i вычисляются непосредственно и применяются для оценки устойчивости системы по Якоби.

На основе реализованного в рамках теории Косамби — Картана — Черна подхода для рассматриваемой системы определены геометрические структуры и компоненты тензора P_j^i . Приведены условия устойчивости системы по Якоби, выраженные через параметры системы и характеристики управляющего воздействия. На численном примере показана возможность восстановления характеристик управляющего воздействия при входных данных, представленных собственными значениями тензора P_j^i .

Заключение. Выполнен анализ устойчивости по Якоби динамической системы — механического аналога колебаний жидкости в баке при наличии управляющего воздействия. Определены компоненты тензора кривизны отклонения и его собственные значения. Условия устойчивости по Якоби сформулированы в терминах параметров системы и управления. Приведены результаты численного решения обратной задачи восстановления характеристик управления для входных данных, представленных собственными значениями тензора кривизны отклонения.

Список источников

- [1] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003.
- [2] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi — Cartan — Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. no. 1656014. <https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>
- [3] Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 40–56. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>