

УДК 51-71

Элементарные атомы в пространствах постоянной кривизны методом Никифорова — Уварова

Абдалджалель Алиzzi^{1, 2}

abdaljalel90@gmail.com

Сагайдак Алина Евгеньевна²

a.sagaidak@g.nsu.ru

Силагадзе Зураб Карлович^{1, 2(*)}

Z.K.Silagadze@inp.nsk.su

¹Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, Новосибирск, Россия²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Метод Никифорова — Уварова — простой, но элегантный и мощный метод решения дифференциальных уравнений второго порядка обобщенного гипергеометрического типа. В прошлом он использовался для решения многих задач квантовой механики и других областей. Мы применяем этот метод к классической задаче о водородоподобных атомах в пространствах постоянной кривизны. Как спектры этих атомов, так и их волновые функции, включая нормировку, сравнительно легко получаются.

Ключевые слова: элементарные атомы, пространства постоянной кривизны, связанные состояния, метод Никифорова — Уварова

Введение. Пространства постоянной кривизны предоставляют простейший искривленный фон, на котором можно изучать теоретические проблемы и вопросы, связанные с квантовой механикой в искривленных пространствах, и поэтому такие исследования представляют значительный теоретический интерес. Однако они представляют не только академический интерес. Эффективная кривизна пространства возникает в ряде реальных физических ситуаций. Изучение движения квантовой частицы по двумерной поверхности в физике конденсированного состояния, а также изучение квантовых точек привело к использованию моделей, основанных на квантовой механике в пространствах постоянной кривизны [1].

В литературе имеется множество других примеров использования пространств постоянной кривизны в различных областях: от физики атомов и нанотрубок до хирального и деконфайнментного фазового перехода в модели Намбу — Йона — Лазинио, симметрий алгебры W теории струн и квазиточно решаемых моделей, а также суперинтегрируемости в рамках суперсимметрии (см., например, [1–3]).

Что касается атома водорода в S^3 , Шредингер заявил [4], что он нашел проблему «трудной для решения любым другим способом», отличным от его метода факторизации. Но годом позже Стивенсон показал [5], что спектр и волновая функция могут быть получены без особых трудностей обычными методами решения дифференциальных уравнений. Еще более простое реше-

ние для водородоподобного атома в S^3 и H^3 может быть получено с использованием метода Никифорова — Уварова [6], что мы и хотим продемонстрировать. Удивительно, но в обширной литературе по этой теме мы пока нашли только одну статью [7], где этот метод упоминается в связи с этой проблемой, но, по нашему мнению, он используется не самым оптимальным образом.

Методы и материалы; результаты. Дифференциальные уравнения второго порядка обобщенного гипергеометрического типа, имеющие следующий вид:

$$u'' + \frac{\pi_1}{\sigma} u' + \frac{\sigma_1}{\sigma^2} u = 0,$$

можно решить с помощью метода Никифорова — Уварова. Здесь штрих обозначает дифференцирование по независимой переменной z (которая может быть комплексной); $\sigma(z)$ и $\sigma_1(z)$ являются многочленами не выше второй степени, а $\pi_1(z)$ является многочленом не выше первой степени.

Многие задачи квантовой механики могут приводить к уравнениям такого типа, и метод Никифорова — Уварова широко использовался в этом контексте [8,9,10]. Для водородоподобных атомов в пространствах постоянной кривизны к радиальная часть волновой функции $\Psi = G(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\lambda_E + \beta_R z - l(l+1)(1+z^2)}{(1+z^2)^2} G = 0,$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\kappa} T_\kappa(r)}, \lambda_E = \frac{2mE}{\hbar^2 \kappa}, \beta_R = \frac{2me^2}{\hbar^2 \sqrt{\kappa}},$$

где $T_\kappa(r)$ — обобщенная тангенсная функция [11]. Это уравнение имеет обобщенный гипергеометрический тип и может быть проанализировано методом Никифорова — Уварова.

С использованием этого метода, мы получаем спектр $\lambda_E = n^2 - 1 - \frac{\beta_R^2}{4n^2}$ и соответствующие волновые функции

$$G_{n,n_r}(r) = B_{n,n_r} [\sqrt{\kappa} S_\kappa(r)]^{n-1} e^{-\frac{r}{na_B}} y_{n_r}^n(z),$$

где n и n_r — главные и радиальные квантовые числа, $S_\kappa(r)$ обобщенный синус и

$$y_{n_r}^n(r) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^{n_r}}{dz^{n_r}} [(1+z^2)^{n_r} \rho(z)], \rho(z) = (1+z^2)^{-n} e^{\frac{\beta_R}{n} \arctan(z)}$$

— полином, заданный формулой Родригеса. Мы выводим рекуррентную формулу относительно n_r для коэффициентов нормировки B_{n,n_r} и рассматриваем предел плоского пространства.

Заключение. Водородоподобные атомы в пространствах постоянной кривизны представляют собой еще одну квантово-механическую задачу, где метод Никифорова — Уварова может быть успешно применен. Более того, по

нашему мнению, в этом случае метод Никифорова — Уварова дает наиболее естественный и простой способ решения задачи.

Список источников

- [1] Carinena J.F., Ranada M.F., Santander M. The quantum free particle on spherical and hyperbolic spaces: A curvature dependent approach. *J. Math. Phys.*, 2011, vol. 52, art. no. 072104.
- [2] Kirchbach M., Compean C.B. Baryons from quarks in color gauge space of constant positive curvature and deconfinement. Preprint arXiv:0805.2404, 2008.
- [3] Quesne C. Quasi-exactly solvable extensions of the Kepler-coulomb potential on the sphere. *Ann. Phys.*, 2023, vol. 451, art. no. 169265.
- [4] Schrodinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad. A*, 1940, vol. 46, pp. 9–16.
- [5] Stevenson A.F. Note on the “Kepler problem” in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems. *Phys. Rev.*, 1941, vol. 59, pp. 842–843.
- [6] Nikiforov A., Uvarov V. *Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications*. Springer, Basel, 1988.
- [7] Mel’nikov V.N., Shikin G.N. Hydrogen-like atom in the gravitational field of the universe. *Sov. Phys. J.*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 47–51.
- [8] Ellis L., Ellis I., Koutschan C., Suslov S.K. On Potentials Integrated by the Nikiforov — Uvarov Method. Preprint arXiv: 2303.02560, 2023.
- [9] Tezcan C., Sever R. A general approach for the exact solution of the Schrodinger equation. *Int. J. Theor. Phys.*, 2009, vol. 48, no. 2, pp. 337–350.
- [10] Suslov S.K., Vega-Guzman J.M., Barley K. An introduction to special functions with some applications to quantum mechanics. *Orthogonal Polynomials*. Springer International Publishing, Cham, 2020, pp. 517–628.
- [11] Ballesteros A., Herranz F.J., del Olmo M.A., Santander M. Quantum structure of the motion groups of the two-dimensional Cayley — Klein geometries. *J. Phys. A*, 1993, vol. 26, no. 21, pp. 5801–5823.

Elementary atoms in spaces of constant curvature by the Nikiforov — Uvarov method

Abdaljalel Alizzi^{1, 2}

abdaljalel90@gmail.com

*Sagaydak Alina E.*²

a.sagaidak@g.nsu.ru

Silagadze Zurab K.^{1, 2(*)}

Z.K.Silagadze@inp.nsk.su

¹Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Abstract. The Nikiforov — Uvarov method is a simple, yet elegant and powerful method for solving second-order differential equations of generalized hypergeometric type. In the past, it has been used to solve many problems in quantum mechanics and elsewhere. We apply this method to the classical problem of hydrogen-like atoms in spaces of constant curvature. Both the spectra of these atoms and their wave functions, including normalization, are easily obtained.

Keywords: elementary atoms, constant curvature spaces, bound states, Nikiforov — Uvarov method

Introduction. Spaces of constant curvature provide the simplest curved background against which to study theoretical problems and questions related to quantum mechanics in curved spaces, and therefore such studies are of considerable theoretical interest. However, they are not only of academic interest. Effective curvature of space arises in a number of real physical situations. The study of the motion of a quantum particle on a two-dimensional surface in condensed matter physics, as well as the study of quantum dots, has led to the use of models based on quantum mechanics in spaces of constant curvature [1].

There are many other examples in the literature of the use of spaces of constant curvature in various fields: from the physics of atoms and nanotubes to the chiral and deconfinement phase transition in the Nambu — Jona — Lasinio model, symmetries of the W algebra of string theory and quasi-exactly solvable models, as well as superintegrability in the framework of supersymmetry (see, for example, [1–3]).

About hydrogen atom in S^3 , Schrodinger declared [4] that he found the problem “difficult to tackle in any other way” different from his factorization method. But a year later Stevenson showed [5] that the spectrum and wave function could be obtained without too much difficulty by the usual methods of solving differential equations. An even simpler solution for the hydrogen-like atom in S^3 and H^3 can be obtained using the Nikiforov — Uvarov method [6], which is what we want to demonstrate. Surprisingly, in the extensive literature on this topic, we have so far found only one paper [7] where this method is mentioned in connection with this problem, but in our opinion, it is not used in the most optimal way.

Methods and materials; results. Second-order differential equations of generalized hypergeometric type, which have the following form

$$u'' + \frac{\pi_1}{\sigma} u' + \frac{\sigma_1}{\sigma^2} u = 0,$$

can be solved using the Nikiforov — Uvarov technique. Here prime indicates differentiation with respect to the independent variable z (which may be complex); $\sigma(z)$ and $\sigma_1(z)$ are polynomials, at most of second degree, and $\pi_1(z)$ is a polynomial, at most of first degree.

Many problems in quantum mechanics can lead to equations of this type, and the Nikiforov — Uvarov method has been widely used in this context [8–10]. For hydrogen-like atoms in spaces of constant curvature κ the radial part of the wave function $\Psi = G(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ satisfies the equation

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\lambda_E + \beta_R z - l(l+1)(1+z^2)}{(1+z^2)^2} G = 0,$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\kappa} T_\kappa(r)}, \lambda_E = \frac{2mE}{\hbar^2 \kappa}, \beta_R = \frac{2me^2}{\hbar^2 \sqrt{\kappa}},$$

where $T_\kappa(r)$ is a generalized tangent function [11]. This equation is of generalized hypergeometric type and can be analysed by the Nikiforov — Uvarov method. In this way we obtain the spectrum $\lambda_E = n^2 - 1 - \frac{\beta_R^2}{4n^2}$, and the corresponding wave functions

$$G_{n,n_r}(r) = B_{n,n_r} [\sqrt{\kappa} S_\kappa(r)]^{n-1} e^{-\frac{r}{na_B}} y_{n_r}^n(z),$$

where n and n_r are principal and radial quantum numbers, $S_\kappa(r)$ is generalized sine function and

$$y_{n_r}^n(r) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^{n_r}}{dz^{n_r}} [(1+z^2)^{n_r} \rho(z)], \rho(z) = (1+z^2)^{-n} e^{\frac{\beta_R}{n} \arctan(z)}$$

is a polynomial given by the Rodrigues formula. We obtain the recurrence formula, with respect to n_r , for normalization coefficients B_{n,n_r} and consider the flat space limit.

Conclusion. Hydrogen-like atoms in spaces of constant curvature represent another quantum mechanical problem where this method can be successfully applied. Moreover, in our opinion, in this case the Nikiforov — Uvarov method provides the most natural and simple way to solve the problem.

References

- [1] Carinena J.F., Ranada M.F., Santander M. The quantum free particle on spherical and hyperbolic spaces: A curvature dependent approach. J. Math. Phys., 2011, vol. 52, art. no. 072104.
- [2] Kirchbach M., Compean C.B. Baryons from quarks in color gauge space of constant positive curvature and deconfinement. Preprint arXiv:0805.2404, 2008.
- [3] Quesne C. Quasi-exactly solvable extensions of the Kepler-coulomb potential on the sphere. Ann. Phys., 2023, vol. 451, art. no. 169265.
- [4] Schrodinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. Proc. Roy. Irish Acad. A, 1940, vol. 46, pp. 9–16.
- [5] Stevenson A.F. Note on the “Kepler problem” in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems. Phys. Rev., 1941, vol. 59, pp. 842–843.
- [6] Nikiforov A., Uvarov V. Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications. Springer, Basel, 1988.
- [7] Mel’nikov V.N., Shikin G.N. Hydrogen-like atom in the gravitational field of the universe. Sov. Phys. J., 1985, vol. 28, no. 1, pp. 47–51.
- [8] Ellis L., Ellis I., Koutschan C., Suslov S.K. On Potentials Integrated by the Nikiforov — Uvarov Method. Preprint arXiv: 2303.02560, 2023.
- [9] Tezcan C., Sever R. A general approach for the exact solution of the Schrodinger equation. Int. J. Theor. Phys., 2009, vol. 48, no. 2, pp. 337–350.
- [10] Suslov S.K., Vega-Guzman J.M., Barley K. An introduction to special functions with some applications to quantum mechanics. Orthogonal Polynomials. Springer International Publishing, Cham, 2020, pp. 517–628.
- [11] Ballesteros A., Herranz F.J., del Olmo M.A., Santander M. Quantum structure of the motion groups of the two-dimensional Cayley — Klein geometries. J. Phys. A, 1993, vol. 26, no. 21, pp. 5801–5823.