

УДК 524.834

Неминимальное расширение аксионной теории Эйнштейна — Дирака: спиноризация ранней Вселенной, индуцированная кривизной

Балакин Александр Борисович

Alexander.Balakin@kpfu.ru

Ефремова Анна Олеговна^(*)

anna.efremova131@yandex.ru

Кафедра общей теории относительности и гравитации, Институт физики,
Казанский федеральный университет, Казань, Россия

Аннотация. Установлена новая неминимальная версия теории Эйнштейна — Дирака-аксиона. Эта версия неминимальной теории, описывающая взаимодействие гравитационного, спинорного и аксионного полей, имеет второй порядок по производным в контексте эффективной теории поля и первый порядок по плотности числа спинорных частиц. Модельный лагранжиан содержит четыре параметра неминимальной связи и включает, в дополнение к тензору Римана, Риччи и скаляру Риччи, леводуальный и праводуальный тензоры кривизны. Псевдоскалярное поле появляется в лагранжиане в терминах тригонометрических функций, обеспечивая поддержку дискретной симметрии, связанной с аксионами. Выведена связанная система расширенных основных уравнений для гравитационного, спинорного и аксионного полей; обсуждается структура новых неминимальных источников, появляющихся в этих основных уравнениях. Рассматривается применение установленной теории к изотропной однородной космологической модели; Представлены новые точные решения для нескольких модельных наборов направляющих неминимальных параметров. Представлено специальное решение, описывающее экспоненциальный рост плотности числа спиноров; это решение показывает, что спинорные частицы (массивные фермионы и безмассовые нейтрино) могут рождаться в ранней Вселенной из-за неминимального взаимодействия с кривизной пространства-времени.

Ключевые слова: альтернативные теории гравитации, теория Эйнштейна-Дирака, аксион, спинор

Введение. Имея в виду упомянутые детали истории неминимальной теории поля, мы установили здесь новую полную неминимальную версию теории Эйнштейна — Дирака-аксиона, которая линейна по кривизне, имеет второй порядок по производным, линейна по плотности числа спинорных частиц и нелинейна по аксионному полю. Статья организована следующим образом. Сначала мы строим лагранжиан неминимальной теории Эйнштейна — Дирака-аксиона и выводим расширенные основные уравнения для спинорных, псевдоскалярных и гравитационных полей. Затем мы применяем установленную расширенную теорию к однородной изотропной космологической модели, описываем эволюцию инвариантов спинорного поля, анализируем поведение функции Хаббла и масштабного фактора. Чтобы быть более точным, в разделе III мы редуцируем основные уравнения спинорных, аксионных и

гравитационных полей, принимая во внимание симметрию пространственно-временной платформы Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера (FLRW). Затем мы имеем дело с точно интегрируемой моделью, в которой аксионное поле заморожено в одном из минимумов потенциала аксионного поля и, таким образом, находится в равновесном состоянии; в разделе V аксионное поле зафиксировано в нестабильном состоянии, связанном с одним из максимумов потенциала аксиона. В конце мы обсуждаем физические следствия неминимальных гравитон-спинор-аксионных взаимодействий.

Методы и материалы; результаты. Неминимальные члены в лагранжиане этой теории формулируются как тензорные произведения тензора Римана R_{mnpq} , его леводуального, $*R_{mnpq}$, и праводуального, R^*_{mnpq} , тензоров, а также тензора Риччи R_{mn} и скаляра Риччи R с одной стороны, и спинорно-аксионных тензоров и псевдотензоров с другой стороны. Все производные в неминимальных членах произошли от тензора кривизны и его свертки; спинорно-аксионные тензоры и псевдотензоры не содержат производных. В этом смысле набор неминимальных членов является полным: нет новых независимых геометрических объектов вплоть до второго порядка по производным в контексте эффективной теории поля. Для построения полного лагранжиана представленной теории мы использовали так называемые спинорно-аксионные тензоры и псевдотензоры. Эту идею можно пояснить следующим образом. Если в качестве множителя использовать нечетную функцию $\sin \varphi$, то получим спинорно-аксионный псевдотензор. Почему мы ограничиваемся рамками линейной теории относительно плотности числа спинорных частиц $N = \psi\bar{\psi}$? Если рассматривать, например, теорию второго порядка, то лагранжиан следует включить множество членов, имеющих вид $R_{mnpq}(\bar{\psi}\gamma^m\gamma^n\psi)(\bar{\psi}\gamma^p\gamma^q\psi)$, $R_{mnpq}(\bar{\psi}\gamma^m\psi)(\bar{\psi}\gamma^n\gamma^p\gamma^q\psi)$, $R_{mn}(\bar{\psi}\gamma^m\psi)(\bar{\psi}\gamma^n\psi)$, ... и т. д. Очевидно, что такая модель станет неэффективной из-за большого числа феноменологических параметров. Напомним, что построенная теория содержит всего четыре неминимальных параметра: β_1 , β_2 , β^* и ν^* . Мы хотели бы обратить внимание на то, что расширенные уравнения спинорного поля имеют структуру канонического уравнения Дирака, но вместо затравочной массы m , умноженной на единичную матрицу E , мы получаем эффективную массовую матрицу M , которая зависит от тензора кривизны и от аксионного поля. Аналогично, расширенное уравнение для аксионного поля содержит вместо затравочной массы m_A эффективную массу аксиона M_A , которая зависит от скаляров R и N . Эти эффективные массы, связанные с кривизной пространства-времени, определяют поведение спинорных частиц (массивных фермионов и безмассовых нейтрино) и динамику аксионов в ранней Вселенной.

Применение сформулированной неминимальной теории к изотропной однородной космологической модели выявило интересную деталь. Если ввести один спинорный скаляр $S = \psi\bar{\psi}$ и два спинорных псевдоскаляра $P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi$, $\Omega = \bar{\psi}\gamma^5\psi$, то эволюционные уравнения для этих величин об-

разуют замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка. Более того, эта система допускает явный первый интеграл, и, таким образом, только две величины, $S(t)$ и $P(t)$, характеризуют эволюцию гравитационного поля и входят в источник-член J , который предопределяет эволюцию аксионного поля. Мы подробно проанализировали две точно интегрируемые подмодели эволюции неминимально связанной спинорно-аксионной системы в гравитационном поле типа FLRW. В первой подмодели псевдоскалярное поле предполагалось замороженным в одном из минимумов потенциала аксионного поля, $\phi = 2\pi k$, т. е. аксионы считались находящимися в равновесном состоянии. Анализ точных решений, описывающих функцию Хаббла $H(t)$, масштабный фактор $a(t)$ и параметр ускорения $-q(t)$, показывает, что в зависимости от значений неминимальных направляющих параметров $\beta_1, \beta_2, \beta^*, v^*$ Вселенная может быть охарактеризована сценариями Большого Разрыва, Большого Взрыва и Псевдоразрыва.

Заключение. Мы обсуждаем новую версию неминимальной теории Эйнштейна-Дирака-аксиона второго порядка по производным и первого порядка по плотности числа спинорных частиц N .

Каковы интересные детали этой теории? Неминимальные члены в лагранжиане этой теории формулируются как тензорные произведения тензора Римана R_{mnpq} , его леводуального, R_{mnpq}^* , и праводуального, тензоров, а также тензора Риччи и скаляра Риччи R с одной стороны, и спинорно-аксионных тензоров и псевдотензоров с другой стороны. Все производные в неминимальных членах произошли от тензора кривизны и его свертки; спинорно-аксионные тензоры и псевдотензоры не содержат производных. В этом смысле набор неминимальных членов, перечисленных в работе, является полным: в контексте эффективной теории поля нет новых независимых геометрических объектов вплоть до второго порядка по производным.

Мы хотели бы обратить внимание на то, что расширенные уравнения спинорного поля имеют структуру канонического уравнения Дирака, но вместо затравочной массы m , умноженной на единичную матрицу E , мы получаем эффективную массовую матрицу M , зависящую от тензора кривизны и от аксионного поля. Аналогично, расширенное уравнение для аксионного поля содержит эффективную массу аксиона MA , зависящую от скаляров R и N , вместо затравочной массы m_A . Эти эффективные массы, связанные с кривизной пространства-времени, предопределяют поведение спинорных частиц (массивных фермионов и безмассовых нейтрино) и динамику аксионов в ранней Вселенной.

Список источников

- [1] Nojiri S., Odintsov S.D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. Phys. Rept., 2009, vol. 505, art. no. 59.
- [2] Weinberg S. Effective Field Theory for Inflation. Phys. Rev. D, 2008, vol. 77, art. no. 123541.

- [3] Drummond I.T., Hathrell S.J. QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons. *Phys. Rev. D*, 1980, vol. 22, art. no. 343.
- [4] Peccei R.D., Quinn H.R. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, vol. 38, art. no. 1440.
- [5] Balakin A.B., Ni W-T. Non-minimal coupling of photons and axions. *Class. Quant. Grav.*, 2010, vol. 27, art. no. 055003.
- [6] Bamba K., Odintsov S.D. Inflation and late-time cosmic acceleration in non-minimal Maxwell-F(R) gravity and the generation of large-scale magnetic fields. *JCAP*, 2008, vol. 0804, art. no. 024.
- [7] Bronnikov K.A., Grinyok S. Instability of wormholes with a non-minimally coupled scalar field. *Grav.Cosmol.*, 2001, vol. 7, pp. 297–300.
- [8] Balakin A.B., Lemos J.P.S. Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: A general system of equations. *Class. Quant. Grav.*, 2005, vol. 22, art. no. 1867.
- [9] Balakin A.B., Efremova A.O. Interaction of the axionic dark matter, dynamic aether, spinor and gravity fields as an origin of oscillations of the fermion effective mass. *EPJC*, 2021, vol. 81, art. no. 674.
- [10] Saha B. Nonlinear spinor field in cosmology. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 69, art. no. 124006.

Non-minimal Einstein-Dirac-Axion Theory: Spinorization of the early Universe induced by Curvature

Balakin Alexander Borisovich

Alexander.Balakin@kpfu.ru

Efremova Anna Olegovna^(*)

anna.efremova131@yandex.ru

Department of General Relativity and Gravitation, Institute of Physics,
Kazan Federal University, Kazan, Russia

Abstract. The influence of growth of global energy consumption on changes in ecological balance in nature is considered. The risks of further growth of use of non-renewable energy sources are presented. The directions of development of alternative energy sources are shown. The potential possibilities of application of nanotechnologies and innovative nanomaterials in production and transmission of energy aimed at saving natural resources and reducing toxic emissions into the environment are listed. Taking into account the specific properties of nanosystems, a conclusion is made about the need for systematic research to assess the potential risks of application of nanomaterials aimed at ensuring a safe future of mankind.

Keywords: Alternative theories of gravity, Einstein-Dirac theory, axion, spinor

Introduction. Keeping in mind the mentioned details of the history of the non-minimal field theory, we established here the new complete non-minimal version of the Einstein-Dirac-axion theory, which is linear in curvature, is of the second order in derivatives, is linear in the number density of spinor particles and non-linear in the axion field. The paper is organized as follows. At first we construct the Lagrangian of the non-minimal Einstein-Dirac-axion theory, and derive the extended master equations for the spinor, pseudoscalar and gravitational fields. Next we apply the established extended theory to the homogeneous isotropic cosmological

model, describe the evolution of the spinor field invariants, analyze the behavior of the Hubble function and of the scale factor. To be more precise, in Section III we reduce the master equations of the spinor, axion and gravity fields, taking into account the symmetry of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) space-time platform. Then we deal with the exactly integrable model, in which the axion field is frozen into one of the minima of the axion field potential, and thus is in the equilibrium state; in Section V the axion field is fixed in the instable state related to one of the maxima of the axion potential. In the end we discuss physical consequences of the non-minimal graviton-spinor-axion interactions.

Methods and materials; results. The non-minimal terms in the Lagrangian of this theory are formulated as tensorial products of the Riemann tensor R_{mnpq} , of its left-dual, $*R_{mnpq}$, and right-dual, R^*_{mnpq} , tensors, as well as, of the Ricci tensor R_{mn} and Ricci scalar R on the one hand, and of the spinor-axionic tensors and pseudotensors, on the other hand. All the derivatives in the non-minimal terms originated from the curvature tensor and its convolutions; the spinor-axion tensors and pseudotensors do not contain derivatives. In this sense, the set of the non-minimal terms is complete: there are no new independent geometrical objects up to the second order in derivatives in the context of the Effective Field Theory.

In order to construct the complete Lagrangian of the presented theory, we used the so-called spinor-axion tensors and pseudotensors. One can explain this idea as follows. If we use the odd function $\sin \varphi$ as the multiplier, we obtain the spinor-axion pseudotensor. Why do we restrict ourselves by the frameworks of the linear theory with respect to the spinor particle number density $N = \psi\psi^*$? If we consider, e.g., the theory of the second order, we should include into the Lagrangian a lot of terms, which have the form $R_{mnpq}(\psi\gamma^* m\gamma n\psi)(\psi\gamma^* p\gamma q\psi)$, $R_{mnpq}(\psi\gamma^* m\psi)(\psi\gamma^* n\gamma p\gamma q\psi)$, $R_{mn}(\psi\gamma^* m\psi)(\psi\gamma^* n\psi)$, ..., etc. Clearly, such a model would become non-effective because of the large number of phenomenological parameters. Let us recall that the constructed theory contains only four non-minimal parameters: β_1 , β_2 , β^* and v^* .

We would like to attract attention to the fact that the extended equations of the spinor field have the structure of the canonic Dirac's equation, but instead of the seed mass m multiplied by the unit matrix E we obtain an effective mass matrix M , which depends on the curvature tensor and on the axion field. Similarly, the extended equation for the axion field contains the effective axion mass M_A , which depends on the scalars R and N , instead of the seed mass m_A . These effective masses, associated with the space-time curvature, predetermine the behavior of the spinor particles (massive fermion and massless neutrinos) and the dynamics of the axions in the early Universe.

Application of the formulated non-minimal theory to the isotropic homogeneous cosmological model revealed an interesting detail. If we introduce one spinor scalar $S = \psi\psi^*$ and two spinor pseudoscalars $P = i\psi\gamma^* 5\psi$, $\Omega = \psi\gamma^* 0\gamma\psi$, the evolutionary equations for these quantities form the closed system of differential equations of the first order. Moreover, this system admits the explicit first integral, and

thus, only two quantities, $S(t)$ and $P(t)$, characterize the evolution of the gravitational field, and enter the source-term J , which predetermines the evolution of the axion field. We analyzed in detail two exactly integrable sub-models of evolution of the non-minimally coupled spinor-axion system in the gravity field of the FLRW type. In the first sub-model, the pseudoscalar field was assumed to be frozen into one of the minima of the potential of the axion field, $\varphi = 2\pi k$, i.e., the axions are considered to be in the equilibrium state. Analysis of the exact solutions describing the Hubble function $H(t)$, scale factor $a(t)$ and acceleration parameter $-q(t)$ shows, that depending on the values of the non-minimal guiding parameters $\beta_1, \beta_2, \beta^*, v^*$ the Universe can be characterized by the Big Rip, Big Cranch and Pseudo-Rip scenarios.

Conclusion. We discuss the new version of the non-minimal Einstein-Dirac-axion theory of the second order in derivatives and of the first order in the spinor particle number density $N = \psi\psi^\dagger$. What are the interesting details of this theory? The non-minimal terms in the Lagrangian of this theory are formulated as tensorial products of the Riemann tensor R_{mnpq} , of its left-dual, R_{mnpq}^* , and right-dual, tensors, as well as, of the Ricci tensor and Ricci scalar R on the one hand, and of the spinor-axionic tensors and pseudotensors, on the other hand. All the derivatives in the non-minimal terms originated from the curvature tensor and its convolutions; the spinor-axion tensors and pseudotensors do not contain derivatives. In this sense, the set of the non-minimal terms listed in research is complete: there are no new independent geometrical objects up to the second order in derivatives in the context of the Effective Field Theory.

We would like to attract attention to the fact that the extended equations of the spinor field have the structure of the canonic Dirac's equation, but instead of the seed mass m multiplied by the unit matrix E we obtain an effective mass matrix M , which depends on the curvature tensor and on the axion field. Similarly, the extended equation for the axion field contains the effective axion mass M_A , which depends on the scalars R and N , instead of the seed mass m_A . These effective masses, associated with the space-time curvature, predetermine the behavior of the spinor particles (massive fermion and massless neutrinos) and the dynamics of the axions in the early Universe.

References

- [1] Nojiri S., Odintsov S.D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. *Phys. Rept.*, 2009, vol. 505, art. no. 59.
- [2] Weinberg S. Effective Field Theory for Inflation. *Phys. Rev. D*, 2008, vol. 77, art. no. 123541.
- [3] Drummond I.T., Hathrell S.J. QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons. *Phys. Rev. D*, 1980, vol. 22, art. no. 343.
- [4] Peccei R.D., Quinn H.R. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, vol. 38, art. no. 1440.
- [5] Balakin A.B., Ni W-T. Non-minimal coupling of photons and axions. *Class. Quant. Grav.*, 2010, vol. 27, art. no. 055003.

- [6] Bamba K., Odintsov S.D. Inflation and late-time cosmic acceleration in non-minimal Maxwell-F(R) gravity and the generation of large-scale magnetic fields. JCAP, 2008, vol. 0804, art. no. 024.
- [7] Bronnikov K.A., Grinyok S. Instability of wormholes with a non-minimally coupled scalar field. Grav.Cosmol., 2001, vol. 7, pp. 297–300.
- [8] Balakin A.B., Lemos J.P.S. Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: A general system of equations. Class. Quant. Grav., 2005, vol. 22, art. no. 1867.
- [9] Balakin A.B., Efremova A.O. Interaction of the axionic dark matter, dynamic aether, spinor and gravity fields as an origin of oscillations of the fermion effective mass. EPJC, 2021, vol. 81, art. no. 674.
- [10] Saha B. Nonlinear spinor field in cosmology. Phys. Rev. D, 2004, vol. 69, art. no. 124006.