

УДК 524.882

Применение механики Лагранжа для анализа динамики частиц в гравитационном поле

Беляев В.Б. (*)

wbelayev@yandex.ru

Радиевый институт им. В.Г. Хлопина, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Динамика частиц в гравитационном поле исследуется с использованием механики Лагранжа. Получены динамические уравнения, включающие скорость передачи энергии и импульса гравитационному полю. Они являются ковариантными для линейаризованных метрик. Рассмотрено движение частиц в поле Шварцшильда и в случае слабой гравитации определена пассивная гравитационная масса фотона и массивной частицы при условии при условии соотношения между гравитационным потенциалом и ее скоростью $\alpha / r \ll V^2 / c^2$. Найдена активная гравитационная масса для частного случая системы из двух одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях.

Ключевые слова: механика Лагранжа, принцип стационарного действия, гравитационная масса

Методы и материалы; результаты. В доказательстве Фока движения света по геодезическим [1] в качестве гамильтониана берется временная составляющая ковариантного вектора 4-скорости. В [2] был предложен обобщенный принцип Ферма, в котором используется вариация интеграла временной компоненты вектора 4-скорости, приводящая к траектории движения света, совпадающей с геодезической. Применение основанного на лагранжевой механике вариационного принципа стационарного интеграла энергии к движению свето-подобной частицы в гравитационном поле [3–5] не приводит к нарушению изотропности светового пути. Данный метод дает уравнения, тождественные полученным с помощью обобщенного принципа Ферма, определяя систему уравнений, имеющую на одно уравнение больше. Это позволяет получить вектор энергии-импульса частицы.

В общей теории относительности (ОТО) определение импульсов массивных и световых частиц, движущихся в криволинейном пространстве-времени, и сил, действующих на них, имеет целью, в том числе, найти релятивистские поправки к теории тяготения Ньютона для слабого гравитационного поля. Если в качестве составляющих 4-вектора силы, действующей на массивную частицу единичной массы, рассматривать вторые производные координат по пути [6–8], то в ньютоновском пределе величина, играющая роль пассивной гравитационной массы, оказывается зависящей от направления движения частицы [6, 9]. Это же имеет место и для фотона, если с 4-силой отождествлять вторые производные координат по аффинному параметру.

Другим подходом является выбор лагранжиана частицы, определение обобщенных сил как его частных производных по координате в соответствии с механикой Лагранжа. [3–5]. Энергией и импульсами частиц считаются компоненты контравариантного 4-вектора энергии-импульса, как это делается в [8] и в [6] для частицы, движущейся в пространстве-времени Минковского. Это согласуется с тем, что в ОТО физические скорости частиц ставятся в соответствие компонентам контравариантного вектора 4-скорости. Поэтому с физической силой связывается вектор с верхними индексами, ассоциированный с вектором обобщенных сил. В этом случае для изотропной метрики Шварцшильда пассивная гравитационная масса световой частицы, оказывается независимой от направления движения. Она равна удвоенной массе массивной частицы эквивалентной ей энергии. Это согласуется с величиной активной гравитационной массы световой частицы, полученной из решения уравнений Эйнштейна — Максвелла для направленного электромагнитного излучения в случае слабой гравитации [10]. Квантовая теория гравитации дает аналогичный результат для активной гравитационной массы фотона [11]. Пассивная гравитационная масса движущейся по неограниченной траектории массивной частицы также не будет зависеть от направления ее движения.

Список источников

- [1] Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения*. Москва, ГИФМЛ, 1961, 564 с.
- [2] Frolov V.P. Generalized Fermat's principle and action for light rays in a curved spacetime. *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 88, art. no. 06403910. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.064039>
- [3] Беляев В.Б. *Динамика в общей теории относительности: вариационные методы*. Москва, УРСС, 2017, 216 с.
- [4] Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Extended space model is consistent with the photon dynamics in the gravitational field. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1251, art. no. 012048. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1251/1/012048>
- [5] Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Photon dynamics in the gravitational field in 4D and its 5D extension. *Rom. Rep. Phys.*, 2019, vol. 71, no. 4, art. no. 109.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. в 10 т. Т. 2. Теория поля*. Москва, Физматлит, 2003, 536 с.
- [7] Вайнберг С. *Гравитация и космология*. Москва, Мир, 1975, 696 с.
- [8] Ритус В.И. Лагранжевы уравнения движения частиц и фотонов в шварцшильдовском поле. *УФН*, 2015, т. 185, № 11, с. 1229–1234. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0185.201511h.1229>
- [9] Окунь Л.Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность). *УФН*, 1989, т. 158, № 7, с. 511–530. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0158.198907f.0511>
- [10] Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. Москва, Наука, 1974, 520 с.
- [11] Окунь Л.Б. Теория относительности и теорема Пифагора. *УФН*, 2008, т. 178, № 6, с. 653–663. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200806l.0653>

Application of Lagrangian Mechanics to the Analysis of Particle Dynamics in a Gravitational Field

Belayev V.B.^(*)

wbelayev@yandex.ru

Khlopin Radium Institute, Saint-Petersburg, Russia

Abstract. The dynamics of particles in a gravitational field is investigated using Lagrange mechanics. Dynamic equations are obtained, including the rate of energy and momentum transfer to the gravitational field. They are covariant for linearized metrics. The motion of particles in the Schwarzschild field is considered and, in the case of weak gravitation, it is determined the passive gravitational mass of a photon and a massive particle under condition of the relationship between gravitational potential and its velocity $\alpha/r \ll V^2/c^2$. The active gravitational mass is found for the system special case of two identical bodies moving in opposite directions.

Keywords: Lagrange Mechanics, principle of stationary action, gravitational mass

Methods and materials; results. In the Fock proof [1] of the light motion along geodesics, the time component of the covariant 4-velocity vector is taken as the Hamiltonian. In [2] a generalized Fermat's principle was proposed, which applies a variation of the integral of the time component of the 4-velocity vector and gives the trajectory of light propagation that coincides with geodesic. Application of the variational principle of energy stationery integral to the motion of a light-like particle in a gravitational field [3–5] does not lead to a violation of the isotropy of the light path. This method yields equations identical to those obtained using the generalized Fermat's principle, defining a system of equations that has one more equation. This allows one to obtain the energy-momentum vector of the particle.

In general relativity (GR), the definition of the momenta of massive and light-like particles moving in curvilinear space-time, and the forces acting on them, aims in particular to find relativistic corrections to Newton's theory of gravitation for a weak gravitational field. If the second derivatives of the coordinates along the path [6–8] are considered as components of the 4-vector of the force acting on a massive particle of a unit mass, then in the Newtonian limit, the value playing the role of the passive gravitational mass turns out to depend on the direction of motion of the particle [6, 9]. The same is true for a photon, if the second derivatives of coordinates are identified with the 4-force by an affine parameter, as which the coordinate time is chosen.

Another approach is the choice of the Lagrangian of the particle, the definition of generalized forces as its partial derivatives with respect to the coordinate in accordance with Lagrange mechanics [3–5]. The energy and momenta of particles are considered as the components of the contravariant 4-vector of energy-momentum, as is done in [8] and in [6] for a particle moving in the Minkovsky space-time. This is consistent with the fact that in GR the physical velocities of particles are associated with the components of the contravariant 4-velocity vector. Therefore, the

physical force is aligned with the upper index vector associated with the generalized force vector. In this case, the passive gravitational mass light-like particle turns out to be independent of the direction of their motion. It is equal to twice the mass of the massive particle corresponding to its energy. This is consistent with the value of the active gravitational mass of the light-like particle obtained from the solution of the Einstein — Maxwell equations for directed electromagnetic radiation in the case of weak gravity [10]. Quantum gravity theory yields a similar result for the active gravitational mass of a photon [11]. The passive gravitational mass of a massive particle moving along an unrestricted trajectory will also not depend on the direction of its motion.

References

- [1] Fock V. The Theory of Space Time and Gravitation. Amsterdam, Elsevier, 2015, 460 p.
- [2] Frolov V.P. Generalized Fermat's principle and action for light rays in a curved spacetime. Phys. Rev. D, 2013, vol. 88, art. no. 06403910. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.064039>
- [3] Belayev V.B. The Dynamics in General Relativity Theory: Variational Methods. Moscow, URSS Publ., 2017, 216 p. (In Russ.).
- [4] Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Extended space model is consistent with the photon dynamics in the gravitational field. J. Phys.: Conf. Ser., 2019, vol. 1251, art. no. 012048. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1251/1/012048>
- [5] Tsipenyuk D.Yu., Belayev W.B. Photon dynamics in the gravitational field in 4D and its 5D extension. Rom. Rep. Phys., 2019, vol. 71, no. 4, art. no. 109.
- [6] Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000, 428 p.
- [7] Weinberg S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. New York, Wiley, 1972, 685 p.
- [8] Ritus V.I. Lagrange equations of motion of particles and photons in the Schwarzschild field. Phys. Usp., 2015, vol. 58, pp. 1118–1123. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0185.201511h.1229>
- [9] Okun' L.B. The concept of mass (mass, energy, relativity). Sov. Phys. Usp., 1989, vol. 32, pp. 629–638. (In Russ.). <https://doi.org/10.1070/PU1989v032n07ABEH002739>
- [10] Tolman R.C. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford, Clarendon Press, 1969, 501 p.
- [11] Okun' L.B. The theory of relativity and the Pythagorean theorem. Phys. Usp., 2008, vol. 51, pp. 622–631. (In Russ.). <https://doi.org/10.1070/PU2008v051n06ABEH006552>