

УДК 524.882:834

Тень динамической кротовой норы во вселенной Фридмана*Ишкаева Валерия Артуровна^(*)*

ishkaeva.valeria@mail.ru

Сушков Сергей Владимирович

sergey_sushkov@mail.ru

КФУ, Казань, Россия

Аннотация. Рассмотрено движение фотонов в пространстве-времени закрытой изотропной вселенной Фридмана, содержащей динамическую кротовую нору, заполненную пылью. Получены и решены уравнения геодезических для фотонов в пространстве-времени динамической кротовой норы и в пространстве-времени вселенной Фридмана. Получена и проанализирована формула для радиуса тени кротовой норы. Сделан вывод, что размер тени зависит не только от параметров кротовой норы, но и от времени наблюдения. На ранних временах тень кротовой норы уменьшается, тогда как на более поздних — увеличивается вследствие расширения вселенной Фридмана.

Ключевые слова: кротовая нора, динамическая кротовая нора, вселенная Фридмана

Введение. Кротовая нора — это структура пространства-времени с нетривиальной топологией, которая представляет собой туннель, соединяющий различные пространственные области одной и той же вселенной или различные вселенные. Обычно для существования проходимой кротовой норы в общей теории относительности (ОТО) требуется экзотическая материя, нарушающая световое энергетическое условие (СЭУ) [1]. Однако некоторые конфигурации кротовых нор могут существовать без нее. Наше внимание привлекли статьи [2–4], посвященные изучению возможных проходимых кротовых нор в ОТО, заполненных пылью, в которых авторами были получены конкретные модели проходимых динамических кротовых нор, не нарушающих СЭУ.

В данной работе мы рассматриваем движение фотонов в пространстве-времени вселенной Фридмана, содержащей динамическую кротовую нору [4], получаем формулу радиуса тени кротовой норы и исследуем его зависимость от времени наблюдения.

Методы и материалы; результаты. В качестве модели мы рассмотрели динамическую кротовую нору, представленную в статье [4]. Метрику данной кротовой норы можно записать следующим образом:

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{r'(R, \tau)}{1-h(R)} dR^2 - r^2(R, \tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

где $r' \equiv \partial r / \partial R$; $h(R) = \frac{1}{1+R^2}$. Зависимость $r(R, \tau)$ задается параметрически:

$$r = \frac{F(R)}{2h(R)}(1 - \cos \eta), \tau = \frac{F(R)}{2h^{3/2}(R)}(\eta - \sin \eta),$$

где $F(R) = 2b(1 + R^2)^k$, постоянные $b, k > 0$, параметр $\eta \in [0, 2\pi]$. Уравнения геодезических для фотонов в пространстве-времени кротовой норы (1) мы записали с помощью символов Кристоффеля и решили их в приближении малого параметра η (начальный период эволюции кротовой норы). При анализе уравнений геодезических мы получили точку поворота траектории фотона:

$$R_t = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{9b}\right)^{1/k} \left|\frac{L}{C_1}\right|^{3/k} - 1},$$

где L — угловой момент фотона, C_1 — постоянная, связанная с энергией фотона E , $C_1 = \tau^{2/3} E$.

Далее мы рассмотрели движение фотонов в замкнутой изотропной вселенной Фридмана, метрику которой можно записать следующим образом:

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$

где $a(\eta) = a_0(1 - \cos \eta)$ — масштабный фактор, $a_0 = \text{const}$, χ — радиальный угол, η — параметр, связанный со временем: $\tau = a_0(\eta - \sin \eta)$. Уравнения геодезических для фотонов во вселенной Фридмана мы получили методом Гамильтона — Якоби.

После мы рассмотрели движение фотонов во вселенной Фридмана, содержащей кротовую нору (1), размер которой равен R_* , предполагая, что излучающее вещество находится только во вселенной Фридмана. В таком случае границу тени кротовой норы образуют фотоны, «рожденные» во вселенной Фридмана, прошедшие через кротовую нору и достигшие наблюдателя, находящегося в точке χ_{obs} , в момент наблюдения $\tau_{obs}(\eta_{obs})$. Поскольку рассматриваемое пространство-время сферически-симметрично, граница тени будет представлять собой окружность с радиусом α_{sh} :

$$\alpha_{sh} = a_0 |L_{sh}| (1 - \cos \eta_{obs})^2 \times \\ \times \left(\cos \chi_{obs} (1 - \cos \eta_{obs}) \sqrt{K - \frac{L_{sh}^2}{\sin^2 \chi_{obs}}} + \sin \chi_{obs} \sin \eta_{obs} \sqrt{K} \right)^{-1},$$

где L_{sh} — угловой момент фотонов, формирующих границу тени кротовой норы, K — постоянная интегрирования, полученная при выводе уравнений геодезических во вселенной Фридмана и связанная с энергией фотона E , $K = [a(\eta)E]^2$. Видно, что размер тени зависит как от координат наблюдателя χ_{obs}, η_{obs} , так и от L_{sh} , который зависит от параметров кротовой норы. При фиксированном положении наблюдателя χ_{obs} тень заданной кротовой норы R_*, k, b зависит только от времени наблюдения $\tau_{obs}(\eta_{obs})$. При малых $\tau_{obs}(\eta_{obs})$ размер тени уменьшается, поскольку все больше фотонов, попавших из вселенной Фридмана в кротовую нору, достигают наблюдателя, т. е. $|L_{sh}|$ со временем уменьшается. Причем уменьшение $|L_{sh}|$ происходит стремительно и не успевает компенсироваться расширением вселенной. На поздних временах, когда $|L_{sh}|$ достигает минимального значения, соответствующего

щего $R_t = 0$, размер тени увеличивается вследствие расширения вселенной Фридмана.

Заключение. В данной работе мы рассмотрели движение фотонов в пространстве-времени вселенной Фридмана, содержащей динамическую кротовую нору, и получили формулу для радиуса тени кротовой норы. По результатам работы можно сделать вывод, что радиус тени зависит не только от параметров кротовой норы, но и от времени наблюдения. Причем на ранних временах тень кротовой норы уменьшается из-за уменьшения углового момента $|L_{sh}|$ фотонов, формирующих границу тени кротовой норы, а на поздних — увеличивается из-за расширения вселенной Фридмана.

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» № 24-1-1-39-2, а также грантом Российского научного фонда (проект № 25-22-00163).

Список источников

- [1] Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. American Journal of Physics, 1988, vol. 56, no. 5, pp. 395–412. <https://doi.org/10.1119/1.15620>
- [2] Kashargin P.E., Sushkov S.V. Collapsing wormholes sustained by dustlike matter. Universe, 2020, vol. 6, no. 10, art. no. 186. <https://doi.org/10.3390/universe6100186>
- [3] Bronnikov K.A., Kashargin P.E., Sushkov S.V. Magnetized dusty black holes and wormholes. Universe, 2021, vol. 7, no. 11, art. no. 419. <https://doi.org/10.3390/universe7110419>
- [4] Bronnikov K.A., Kashargin P.E., Sushkov S.V. Possible Wormholes in a Friedmann Universe. Universe, 2023, vol. 9, no. 11, art. no. 465. <https://doi.org/10.3390/universe9110465>

The shadow of a dynamic wormhole in Friedmann universe

Ishkaeva Valeria Arturovna^(*)

ishkaeva.valeria@mail.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich

sergey_sushkov@mail.ru

KFU, Kazan, Russia

Abstract. The motion of photons in the space-time of a closed isotropic Friedmann universe containing a dynamic wormhole filled with dust is considered. Geodesic equations for photons in the space-time of a dynamic wormhole and in the space-time of the Friedmann universe are obtained and solved. A formula for the radius of the wormhole shadow is obtained and analyzed. It is concluded that the size of the shadow depends not only on the parameters of the wormhole, but also on the observation time. At early times, the wormhole shadow decreases, while at later times it increases due to the expansion of the Friedmann universe.

Keywords: wormhole, dynamic wormhole, Friedmann universe

Introduction. A wormhole is a structure of space-time with a non-trivial topology, which is a tunnel connecting different spatial regions of the same universe or different universes. Usually, the existence of a traversable wormhole in the general relativity (GR) requires exotic matter that violates the null energy condition (NEC) [1]. However, some wormhole configurations may exist without it. Our attention was attracted by the articles [2–4] devoted to the study of possible traversable wormholes in GR filled with dust, in which the authors obtained the models of traversable dynamic wormholes that do not violate the NEC.

In this paper, we consider the motion of photons in the space-time of the Friedmann universe containing a dynamic wormhole [4], obtain the formula for the radius of the wormhole shadow and investigate its dependence on the observation time.

Methods and materials; results. As a model, we considered the dynamic wormhole presented in the article [4]. The metric of this wormhole can be written as follows:

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{r'(R,\tau)}{1-h(R)} dR^2 - r^2(R,\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

where $r' \equiv \frac{\partial r}{\partial R}$, $h(R) = \frac{1}{1+R^2}$. The dependence $r(R, \tau)$ is specified parametrically:

$$r = \frac{F(R)}{2h(R)}(1 - \cos \eta), \tau = \frac{F(R)}{2h^{3/2}(R)}(\eta - \sin \eta),$$

where $F(R) = 2b(1 + R^2)^k$, the constants $b, k > 0$, the parameter $\eta \in [0, 2\pi]$. We wrote the geodesic equations for photons in the wormhole space-time (1) using Christoffel symbols and solved them in the approximation of a small parameter η (the initial period of wormhole evolution). By analyzing the geodesic equations, we obtained the turning point of the photon trajectory:

$$R_t = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{9b}\right)^{1/k} \left|\frac{L}{C_1}\right|^{3/k} - 1},$$

where L is the angular momentum of the photon, C_1 is a constant associated with the energy of the photon E : $C_1 = \tau^{2/3}E$.

Next, we considered the motion of photons in a closed isotropic Friedmann universe, the metric of which can be written as follows:

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$

where $a(\eta) = a_0(1 - \cos \eta)$ is the cosmological scale factor, $a_0 = \text{const}$, χ is the radial angle, η is a parameter related to time: $\tau = a_0(\eta - \sin \eta)$. We obtained the geodesic equations for photons in the Friedmann universe using the Hamilton-Jacobi method.

We then considered the motion of photons in a Friedmann universe containing a wormhole (1) of size R_* , assuming that the radiating matter is located only in the Friedmann universe. In this case, the boundary of the wormhole shadow is formed

by photons “born” in the Friedmann universe, passing through the wormhole and reaching the observer located at the point χ_{obs} , at the moment of observation $\tau_{obs}(\eta_{obs})$. Since the space-time under consideration is spherically symmetric, the boundary of the shadow will be a circle with a radius of α_{sh} :

$$\alpha_{sh} = a_0 |L_{sh}| (1 - \cos \eta_{obs})^2 \times \left(\cos \chi_{obs} (1 - \cos \eta_{obs}) \sqrt{K - \frac{L_{sh}^2}{\sin^2 \chi_{obs}}} + \sin \chi_{obs} \sin \eta_{obs} \sqrt{K} \right)^{-1},$$

where L_{sh} — the angular momentum of the photons forming the boundary of the wormhole shadow, K is the constant of integration obtained when deriving the equations of geodesics in the Friedmann universe and is related to the energy of the photon E , $K = [a(\eta)E]^2$.

It is clear that the size of the shadow depends on both the observer's coordinates χ_{obs}, η_{obs} and on L_{sh} , which depends on the parameters of the wormhole. For a fixed position of the observer χ_{obs} , the shadow of a given wormhole R_*, k, b depends only on the observation time $\tau_{obs}(\eta_{obs})$. For small $\tau_{obs}(\eta_{obs})$, the shadow size decreases as more and more photons from the Friedmann universe that enter the wormhole reach the observer, i. e. $|L_{sh}|$ decreases with time. Moreover, the decrease in $|L_{sh}|$ occurs rapidly and is not compensated by the expansion of the universe. At late times, when $|L_{sh}|$ reaches its minimum value corresponding to $R_t = 0$, the size of the shadow increases due to the expansion of the Friedmann universe.

Conclusion. In this paper, we considered the motion of photons in the space-time of the Friedmann universe containing a dynamic wormhole, and obtained a formula for the radius of the wormhole shadow. Based on the results of the work, we can conclude that the radius of the shadow depends not only on the parameters of the wormhole, but also on the observation time. Moreover, at early times, the wormhole shadow decreases due to a decrease in the angular momentum $|L_{sh}|$ of the photons forming the boundary of the wormhole shadow, and at later times, it increases due to the expansion of the Friedmann universe.

This work was supported by a grant from the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics «BASIS» № 24-1-1-39-2 and by RSF (project No. 25-22-00163).

References

- [1] Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. American Journal of Physics, 1988, vol. 56, no. 5, pp. 395–412. <https://doi.org/10.1119/1.15620>
- [2] Kashargin P.E., Sushkov S.V. Collapsing wormholes sustained by dustlike matter. Universe, 2020, vol. 6, no. 10, art. no. 186. <https://doi.org/10.3390/universe6100186>
- [3] Bronnikov K.A., Kashargin P.E., Sushkov S.V. Magnetized dusty black holes and wormholes. Universe, 2021, vol. 7, no. 11, art. no. 419. <https://doi.org/10.3390/universe7110419>
- [4] Bronnikov K.A., Kashargin P.E., Sushkov S.V. Possible Wormholes in a Friedmann Universe. Universe, 2023, vol. 9, no. 11, art. no. 465. <https://doi.org/10.3390/universe9110465>