

УДК 530.12

Геометрия собственных векторов композиции бустов Лоренца

Харинов Михаил Вячеславович^(*)

khar@iias.spb.su

SPIN-код: 3068-5564

СПб ФИЦ РАН, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Для композиции лоренцевых бустов $L_1 L_2$ в евклидовом 4-мерном пространстве кватернионов аналитически найден триплет собственных векторов c_0, c_1, c_2 , которые имеют единичную проекцию на ось времени и являются базисом 3-мерного подпространства, ортогонального направлению v оси вращения Вигнера V на угол φ . Единичный вектор n_0 направления разности векторов $c_1 - c_0$ не зависит от порядка сложения скоростей и связан с направлением n результирующей скорости поворотом на половинный угол: $n_0 = b \cdot n \equiv V|_{\varphi \rightarrow \varphi/2} n$, где $b = i_0 \cos \varphi/2 + v \sin \varphi/2$, а i_0 — единица в алгебре кватернионов. При этом обеспечивается лаконичность бескоординатных выкладок с симметризованным представлением композиции бустов: $L_1 L_2 \equiv VL = V|_{\varphi \rightarrow \varphi/2} L|_{n \rightarrow n_0} V|_{\varphi \rightarrow \varphi/2}$.

Ключевые слова: композиция бустов Лоренца, собственные вектора, половинный угол Вигнера, евклидова геометрия, геометрическая интерпретация, кватернионы

Введение. Композиция лоренцевых бустов и сложение релятивистских скоростей в физике является классической темой, которая продолжает рассматриваться плеядой современников, к числу которых принадлежат А.А. Ungar, J.F. Barrett, S.J. Sangwine, M.J. Visser, T.S. Berry, В.И. Ритус, Г.Б. Малыкин, З.К. Силагадзе и др. Вслед за «Векторной алгеброй» Г. Казановы начали умножаться версии алгебраического описания преобразований Лоренца в пространствах с различной размерностью и геометрией. При этом лишь немногие работы рассматривают лоренцевы бусты в терминах оригинальных кватернионов У.Р. Гамильтона и их естественных обобщений — октонионов, а не их модификаций. Таковыми являются [1, 2], которые различными путями приводят к одинаковому описанию сложения скоростей посредством n_0 и оценкам для угла Вигнера φ , совпадающим с точностью до знака. В данной работе впервые предлагается способ геометрического построения найденных в [1 et seq.] собственных векторов, в базисе которых $L_1 L_2$ тривиально описывается растяжением одного из светоподобных векторов c_0 или c_1 при сжатии во столько же раз второго.

Методы и материалы; результаты. Рис. 1 демонстрирует при заданном v остальные собственные вектора для $L_1 L_2$, которые строятся по переменной точке A в любом ракурсе программой GeoGebra, что позволяет решить довольно сложную задачу любому желающему.

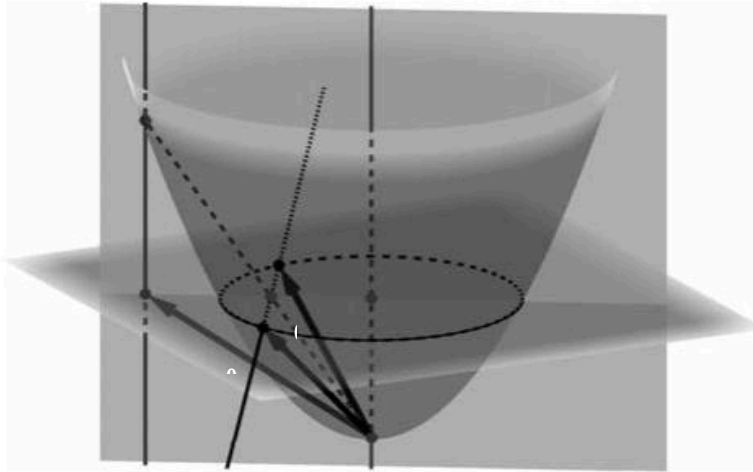


Рис. 1. Базис векторов c_0, c_1, c_2 трехмерного подпространства, ортогонального оси ν вигнеровского вращения V

Вертикальная ось Z с помеченными нулевым и единичным значениями — ось времени. Поверхность вращения вокруг оси времени — параболоид $z^2 = x^2 + y^2$. Горизонтальная плоскость единичного времени пересекает параболоид по единичному кругу. A — точка параболоида, лежащая выше горизонтальной плоскости. Вертикальная плоскость содержит ось времени и точку A . B — точка пересечения с горизонтальной плоскостью отрезка, соединяющего начало отсчета времени с точкой A . Для построения c_2 из точки A опускается перпендикуляр на горизонтальную плоскость. Концы светоподобных векторов c_0 и c_1 находятся на единичном круге и совпадают с концами хорды, проведенной через точку B ортогонально вертикальной плоскости.

Заключение. У.Р. Гамильтон изобрел кватернионы для интерпретации реального пространства-времени, но их потенциал пока не исчерпан. В СТО аппарат кватернионов обеспечивает лаконичность и наглядность выкладок, применение которых сдерживается отчасти тем, что преподавание кватернионов не предусмотрено в системе обязательных дисциплин. Если актуальная современная проблема выбора наиболее подходящей математики для описания пространства-времени с числом измерений большим 4-х решится в пользу кватернионов и октонионов, то указанный недостаток будет полезно исправить.

Список источников

- [1] Kharinov M.V. The Quartet of Eigenvectors for Quaternionic Lorentz Transformation. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2020, vol. 30 (2), art. no. 25. <https://doi.org/10.1007/s00006-020-1050-4>
- [2] Berry T., Visser M. Relativistic combination of non-collinear 3-velocities using quaternions. Universe, 2020, vol. 6 (12), art. no. 237. <https://doi.org/10.3390/universe6120237>

Geometry of Eigenvectors for Composition of Lorentz Boosts

Kharinov Mikhail Vyacheslavovich^(*)

khar@iiias.spb.su
SPIN-code: 3068-5564

SPC RAS, St. Petersburg, Russia

Abstract. For the composition $L_1 L_2$ of Lorentz boosts L_1 and L_2 in the Euclidean 4-dimensional quaternion space, a triple of eigenvectors c_0, c_1, c_2 is analytically found, each of which has a unit projection onto the time axis and represents a basis vector of a 3-dimensional subspace orthogonal to the direction $\mathbf{v}$ of the Wigner rotation axis at an angle φ . The unit vector $\mathbf{n}_0$ of the direction of the vector difference $c_1 - c_0$ does not depend on the commutation of the summed velocities and is connected with the direction $\mathbf{n}$ of the resulting velocity by a rotation of half an angle: $\mathbf{n}_0 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \equiv V|_{\varphi \rightarrow \varphi/2} \mathbf{n}$, where $\mathbf{b} = \mathbf{i}_0 \cos \varphi/2 + \mathbf{v} \sin \varphi/2$, and $\mathbf{i}_0$ is the unity in the quaternion algebra. This ensures the conciseness of coordinate-free calculations with a symmetrized representation of the composition of boosts: $L_1 L_2 \equiv V L = V|_{\varphi \rightarrow \varphi/2} L|_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0} V|_{\varphi \rightarrow \varphi/2}$.

Keywords: composition of Lorentz boosts, eigenvectors, Wigner half angle, Euclidean geometry, geometric interpretation, quaternions

Introduction. The composition of Lorentz boosts and the addition of relativistic velocities in physics is a classical topic that continues to be considered by a galaxy of contemporaries, including A.A. Ungar, J.F. Barrett, S.J. Sangwine, M.J. Visser, T.S. Berry, V.I. Ritus, G.B. Malykin, Z.K. Silagadze and others. Following G. Casanova's "El algebra vectorial", versions of the algebraic description of Lorentz transformations in spaces with different dimensions and geometries began to multiply. At the same time, only a minority of papers consider Lorentz boosts in terms of W. R. Hamilton's original quaternions and their natural generalizations, the octonions, rather than their modifications. Such are [1, 2], which in different ways lead to the same formula for the addition of velocities expressed through $\mathbf{n}_0$, and estimates for the Wigner angle φ , coinciding up to a sign. It is in this article that a method of geometric construction of the eigenvectors found for $L_1 L_2$ in [1 et seq.] is first proposed, so that in the basis of these eigenvectors the composition $L_1 L_2$ is trivially described by the stretching of one of the light-like vectors c_0 or c_1 , accompanied with the shortening of the second by the same factor.

Methods and materials; results. Fig. 1 shows for a given $\mathbf{v}$ the remaining eigenvectors of $L_1 L_2$, which are constructed by the GeoGebra tool using the variable point "A" for any observation angle. This allows anyone to solve the rather complex problem of operating a composition $L_1 L_2$.

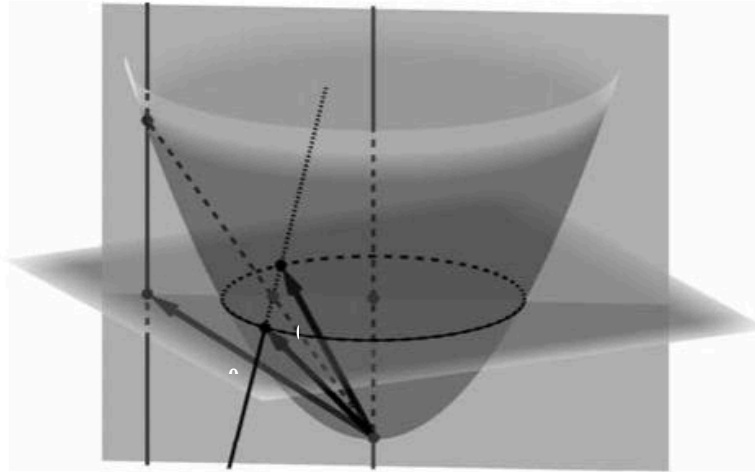


Fig. 1. The basis of vectors c_0, c_1, c_2 of a three-dimensional subspace orthogonal to the direction v of Wigner's rotational axis

The vertical z axis with zero and one values marked is the time axis. The surface of rotation around the time axis is the paraboloid: $z^2 = x^2 + y^2$. The horizontal plane of unit time intersects the paraboloid at a unit circle. "A" is the point of the paraboloid that is above the horizontal plane. The vertical plane contains the time axis and the point "A". "B" is the point of intersection with the horizontal plane of the line segment connecting the origin of time with the point "A". To obtain c_2 , a perpendicular is dropped from point "A" onto the horizontal plane. The ends of the light-like vectors c_0 and c_1 are located on the unit circle and coincide with the ends of the chord drawn through the point "B" orthogonally to the vertical plane.

Conclusion. W.R. Hamilton invented quaternions to interpret real space-time, but their potential in this regard has not yet been exhausted. In STR, the apparatus of quaternions ensures the conciseness and clarity of calculations, the use of which is partly constrained by the fact that the teaching of quaternions is not provided for in the system of compulsory disciplines. If the existing problem of choosing the most suitable mathematics for describing space-time with a number of dimensions greater than 4 is solved in favor of quaternions and octonions, then it will be useful to correct this shortcoming.

References

- [1] Kharinov M.V. The Quartet of Eigenvectors for Quaternionic Lorentz Transformation. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2020, vol. 30 (2), art. no. 25. <https://doi.org/10.1007/s00006-020-1050-4>
- [2] Berry T., Visser M. Relativistic combination of non-collinear 3-velocities using quaternions. Universe, 2020, vol. 6 (12), art. no. 237. <https://doi.org/10.3390/universe6120237>