

УДК 524

О смысле гипотезы Эйнштейна на примере метрики Шварцшильда и синхронной метрики

Мейерович Борис Эдуардович^(*)

meierovich@mail.ru

ИФП им. П.Л. Капицы РАН, Москва, Россия

Аннотация. При относительном сравнении свойств метрики Шварцшильда и синхронной метрики проявляется глубокий смысл гипотезы Эйнштейна о выборе системы координат. В синхронной системе отсчета материя может находиться в статическом состоянии, но только будучи сжатой собственным гравитационным полем до ультрарелятивистского предела $p = -\varepsilon/3$. Статическое состояние предельно сжатой материи может существовать независимо от ее внутреннего строения.

Ключевые слова: гравитационное поле, метрический тензор, детерминант, синхронная система координат, уравнения Эйнштейна

Введение, методы и материалы; результаты. В гравитационном поле статического сферически симметричного объекта, согласно решению Шварцшильда [1], на гиперповерхности $r = r_g$ компоненты метрического тензора g_{00} и g_{rr} «меняются знаками». В решении Шварцшильда имеет место сингулярность в центре. Это обстоятельство не осталось незамеченным Эйнштейном. Вот цитата из его статьи [2]: «Если окажется, что в каком-то месте четырехмерного континуума $\det g_{ik}$ обращается в нуль, то это означает, что в этом месте бесконечно малый «естественный» объем соответствует конечному координатному объему. Мы полагаем, что этого нигде нет. В этом случае $\det g_{ik}$ не может изменить свой знак; мы примем, в соответствии со специальной теорией относительности, что $\det g_{ik}$ всегда имеет конечное и отрицательное значение. Это предположение является гипотезой о физической природе рассматриваемого континуума и, в то же время, правилом, касающимся выбора системы координат» (см. [2], сразу за уравнением (18a)).

Реальный смысл гипотезы Эйнштейна заключается в том, что при отсутствии сингулярности можно (даже желательно) выбрать систему координат, в которой определитель и сигнатура метрики не меняют знаков. Из свойства инвариантности уравнений Эйнштейна вовсе не следует, что знаки компонент метрического тензора можно фиксировать заранее при любой системе координат.

На протяжении ста лет, имея в виду гипотезу Эйнштейна, метрика Шварцшильда

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^{\nu(r)} (dx^0)^2 - e^{\lambda(r)} (dr)^2 - r^2 \left[(d\theta)^2 + (\sin\theta)^2 (d\phi)^2 \right] \quad (1)$$

традиционно используется для анализа свойств гравитирующих статических сферически симметричных объектов [1]. Экспонентами $g_{00} = e^{\nu(r)} > 0$ и

$g_{rr} = -e^{\lambda(r)} < 0$ заранее фиксируются знаки компонент метрического тензора g_{ik} . Компонентой $g_{22}(r) = -r^2$ Шварцшильд заранее фиксирует такую систему отсчета, в которой отношение длины окружности к диаметру равно π , независимо от расстояния r от центра. Решение уравнения Эйнштейна (100.6) в [3] в виде $e^{\lambda(r)} = 1 - (\kappa / r) \int_0^r T_0^0(x) x^2 dx = 1 - (2k / c^2 r) M(r)$ ограничивает полную массу $M = M(r_h)$. Экспонента $e^{\lambda(r)}$ не может быть отрицательной. Поэтому полная масса $M \leq (c^2 / 2k) r_h$.

Без экспоненты $e^{\lambda(r)}$ то же самое решение $g^{rr}(r) = -1 + (2k / c^2 r) M(r)$ является регулярным при любой полной массе M . Внутри объекта с удалением от центра $g^{rr}(r)$ растет. Вне объекта полная масса M остается постоянной, и компонента $g^{rr}(r) = -1 + \frac{2k}{c^2 r} M(r_h)$ возвращается обратно к -1 при $r \rightarrow \infty$. $g^{rr}(r)$ имеет максимум при $r = r_m$. Если в максимуме $g^{rr}(r_m)$ масса $M(r_m) < (c^2 / 2k) r_m$, то $g^{rr}(r) < 0$ и не меняет знак. Если же $M(r_m) > (c^2 / 2k) r_m$, то $g^{rr}(r)$ дважды меняет знак: $g^{rr}(r) = 0$ при $r = r_g < r_m$ и при $r = r_h > r_m$. В сферическом слое $r_g < r < r_h$ $g^{rr}(r) > 0$. Радиусы r_g и r_h , на которых $g^{rr}(r) = 0$, называются гравитационными. На границе $M(r_m) = (c^2 / 2k) r_m$ радиусы $r_g = r_h = r_m$ совпадают.

Применительно к решению системы уравнений Эйнштейна и Клейна-Гордона метрика Шварцшильда (1) оказывается неполной. Неполнота метрики Шварцшильда была замечена Крускалом [4] еще в 1960-м году. Фактически почти та же самая метрика (1), но использованная без экспонент, а просто

$$ds^2 = g_{00}(r)(dx^0)^2 + g_{rr}(r)(dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + (\sin\theta)^2(d\phi)^2], \quad (2)$$

оказалась полной для регулярного решения [5, 6] системы уравнений Эйнштейна и Клейна — Гордона. Однако если масса $M > (c^2 / 2k) r_m$, то $\det g_{ik}$ и $g^{rr}(r)$ становятся положительными в сферическом слое внутри гравитирующего объекта. До появления моих статей [5] и [6], следуя гипотезе Эйнштейна, область пространства, в которой $\det g_{ik} > 0$, сочли не физической. Пограничный гравитационный радиус r_h поверхности черной дыры назвали горизонтом событий.

В действительности знаки $\det g_{ik}$ и $g^{rr}(r)$ не инвариантны относительно изменения системы координат. В классе регулярных решений можно перейти к метрике, в которой $\det g_{ik}$ и $g^{rr}(r)$ отрицательны. Статическое регулярное решение системы уравнений Эйнштейна и Клейна — Гордона [5, 6] не зависит от времени. Внутри центральной области $0 \leq r \leq r_g$ (в которой $g^{rr}(r) < 0$) метрическая компонента g_{00} оказалась константой, не зависящей от радиуса r . Поэтому было естественно перейти к синхронной системе отсчета. То есть положить $g_{00} = 1$, а вместо фиксированного заранее в (2) $g_{22}(r) = -r^2$ оставить просто $g_{22}(r)$:

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{rr}(r)(dr)^2 + g_{22}(r)[(d\theta)^2 + (\sin \theta)^2 (d\phi)^2]. \quad (3)$$

Считается, что «материя в пространстве не может, вообще говоря, покоиться в синхронной системе отсчета» [3, §97]. Исключением является случай «пылевидной» материи, когда частицы не взаимодействуют друг с другом. У нас это как раз именно этот случай, ибо в максимально сжатом состоянии гравитация доминирует над всеми другими взаимодействиями частиц.

В статическом гравитационном поле в синхронной системе отсчета компонента тензора Риччи $R_0^0 = 0$. Поэтому удобно работать с уравнениями Эйнштейна в виде: $R_i^k = \kappa \left(T_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k T \right)$, $\kappa = \frac{8\pi}{c^4}$. Как известно ([3, формула (94.9)), тензор энергии-импульса $T_i^k = (p + \varepsilon)u_i u^k - p g_i^k$. В состоянии покоя 4-скорость $u_i = \delta_{i0}$. Так что $T_0^0 - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2}(\varepsilon + 3p)$. При $R_0^0 = 0$ из уравнения Эйнштейна $R_0^0 = \frac{1}{2} \kappa (\varepsilon + 3p)$ следует, что в синхронной системе отсчета материя может находиться в статическом состоянии только будучи сжатой собственным гравитационным полем до ультрарелятивистского предела $p = -\varepsilon/3$. Обратите внимание, когда материя стремится к расширению давление $p > 0$. А если материя стремится к сжатию, то давление $p < 0$. В синхронных координатах гравитационные радиусы r_g и r_h , так же как и в метрике Шварцшильда, выделяются тем, что в решениях системы уравнений Эйнштейна и Клейна — Гордона с граничными условиями на радиусах $r = r_g$ и $r = r_h$ нарушается теорема существования и единственности. В отличие от метрики Шварцшильда, в синхронных координатах при $r = r_g$ и $r = r_h$ метрическая компонента $g^{rr}(r)$ в нуль не обращается.

Подстановкой

$dx = \sqrt{-g_{rr}(r)} dr$, $x(r) = \int_0^r \sqrt{-g_{rr}(r)} dr$, $g_{22}(x) = g_{22}(r(x))$ интервал (3) становится зависимым только от одной метрической компоненты $g_{22}(x)$:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx)^2 + g_{22}(x) \left\{ (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2 \right\}. \quad (4)$$

Метрическая функция $g_{rr}(r) < 0$ остается произвольной. Этот произвол означает, что статическое состояние материи, сжатой собственным гравитационным полем до ультрарелятивистского предела, может существовать независимо от внутреннего состава объекта. Имея в виду черную дыру, состоящую из однородной среды конденсата Бозе — Эйнштейна, решение системы уравнений Эйнштейна и Клейна — Гордона в синхронных координатах изложено в статье [7].

Заключение. Понимание глубокого смысла гипотезы Эйнштейна позволило выяснить, что в синхронной системе отсчета материя может находиться в статическом состоянии, но только будучи сжатой собственным гравитационным полем до ультрарелятивистского предела. Такое состояние материи может существовать независимо от внутреннего состава.

Список источников

- [1] Schwarzschild K. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Koniglich Preuischen Academie derWissenschaften, Berlin, Germany, 1916, pp. 189–196.
- [2] Einstein A. Die, Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie. Ann. Phys., 1916, vol. 49, art. no. 769.
- [3] Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Moscow, Nauka Publ., 1995.
- [4] Kruskal M.D. Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys. Rev., 1960, vol. 119, art. no. 1743.
- [5] Meierovich B.E. Static state of a black hole supported by dark matter. Universe, 2019, vol. 5, art. no. 198.
- [6] Meierovich B.E. Guessing the Riddle of a Black Hole. Universe, 2020, vol. 6, art. no. 113.
- [7] Мейерович Б.Э. Черная дыра и темная материя в синхронной системе координат. ЖЭТФ, 2023, т. 5, 660–668.

On the Meaning of Einstein's Hypothesis Considering the Schwarzschild Metric and the Synchronous Metric the Example

Meierovich Boris Edwardovich^(*)

meierovich@mail.ru

P.L. Kapitza IPP RAS, Moscow, Russia

Abstract. Comparing the properties of the Schwarzschild metric and the synchronous metric, the real meaning of Einstein's hypothesis on the choice of a coordinate system is revealed. In a synchronous reference system, matter can be in a static state, but only when compressed by its own gravitational field to the ultrarelativistic limit. The static state of extremely compressed matter can exist regardless of its internal structure.

Keywords: metric tensor, determinant, synchronous coordinate system, Einstein equations

Introduction, methods and materials; results. In the gravitational field of a static spherically symmetric object, according to the Schwarzschild solution [1], the components of the metric tensor g_{00} and g_{rr} “change signs” on the hypersurface $r = r_g$. In the Schwarzschild solution there is a singularity at the center. This circumstance did not go unnoticed by Einstein. Here is a quote from his article [2]: “If it turns out that in some place of the four-dimensional continuum $\det g_{ik}$ vanishes, then it means that at this place the infinite small “natural” volume corresponds to the finite coordinate volume. We assume that this is nowhere to be found. In this case, $\det g_{ik}$ cannot change its sign; we will accept, in accordance with the special theory of relativity, that $\det g_{ik}$ always has a finite and negative value. This assumption is a hypothesis about the physical nature of the considered continuum and, at the same time, a rule concerning the choice of a coordinate system.” (see [2], under the equation (18a)). The real meaning of Einstein's hypothesis is that in the absence of singularity it is possible (even desirable) to choose a coordinate system in which the determinant and signature of the metric do not change signs. It does not follow from the invariance property of Einstein's equations that the signs of the components of the metric tensor can be fixed in advance for any coordinate system.

For a hundred years, bearing in mind Einstein's hypothesis, the Schwarzschild metric

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^{v(r)} (dx^0)^2 - e^{\lambda(r)} (dr)^2 - r^2 \left[(d\theta)^2 + (\sin \theta)^2 (d\phi)^2 \right] \quad (1)$$

has traditionally been used to analyze the properties of gravitating static spherically symmetric objects [1]. The signs of the components of the metric tensor g_{ik} are fixed in advance by the exponents $g_{00} = e^{v(r)} > 0$ и $g_{rr} = -e^{\lambda(r)} < 0$. By the component $g_{22}(r) = -r^2$ Schwarzschild fixes in advance such a frame of reference in which the ratio of the circumference to the diameter is equal to π , regardless of the

distance r from the center. The solution to the Einstein equation (100.6) in [3] in the form $e^{\lambda(r)} = 1 - (\kappa / r) \int_0^r T_0^0(x) x^2 dx = 1 - (2k / c^2 r) M(r)$ limits the total mass $M = M(r_h)$. The exponent $e^{\lambda(r)}$ cannot be negative. Therefore, the total mass is $M \leq (c^2 / 2k) r_h$.

Without the exponent $e^{\lambda(r)}$, the same solution is $g^{rr}(r) = -1 + (2k / c^2 r) M(r)$ regular for any total mass of M . It grows inside the object with distance from $g^{rr}(r)$ the center. Outside the object, the total mass M remains constant, and the component $g^{rr}(r) = -1 + \frac{2k}{c^2 r} M(r_h)$ returns back -1 to at $r \rightarrow \infty$. Without the exponent $e^{\lambda(r)}$, the same solution $g^{rr}(r) = -1 + (2k / c^2 r) M(r)$ is regular for any total mass M . Inside the object, with distance from the center, $g^{rr}(r)$ increases. Outside the object, the total mass M remains constant, and the component $g^{rr}(r) = -1 + \frac{2k}{c^2 r} M(r_h)$ returns back to -1 at $r \rightarrow \infty$. $g^{rr}(r)$ has a maximum at $r = r_m$. If in the maximum $g^{rr}(r_m)$ the mass $M(r_m) < (c^2 / 2k) r_m$, then $g^{rr}(r) < 0$ and does not change sign. If $M(r_m) > (c^2 / 2k) r_m$, then $g^{rr}(r)$ changes sign twice $g^{rr}(r) = 0$ при $r = r_g < r_m$ and at $r = r_h > r_m$. In a spherical layer $r_g < r < r_h$ $g^{rr}(r) > 0$. The radii r_g and r_h , on which $g^{rr}(r) = 0$, are called gravitational. At the boundary $M(r_m) = (c^2 / 2k) r_m$ the radii $r_g = r_h = r_m$ coincide.

For the solution to Einstein and Klein — Gordon equations, the Schwarzschild metric (1) turns out to be incomplete. The incompleteness had been noticed by Kruskal [4] back in 1960. In fact, almost the same metric (1), but used without exponents, just simply

$$ds^2 = g_{00}(r)(dx^0)^2 + g_{rr}(r)(dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + (\sin\theta)^2(d\phi)^2], \quad (2)$$

turned out to be complete for the regular solution to the set of Einstein and Klein-Gordon equations [5]-[6]. However, if the mass $M > (c^2 / 2k) r_m$, then $\det g_{ik}$ and $g^{rr}(r)$ become positive in a spherical layer $r_g < r < r_h$ inside a gravitating object. Before my articles [5] and [6] appeared, the region of space in which $\det g_{ik} > 0$, was considered as non-physical. The gravitational radius r_h of a black hole surface was called the event horizon.

The signs of $\det g_{ik}$ and $g^{rr}(r)$ are not invariant with respect to changes of a coordinate system. In the class of regular solutions, one can change to a metric in which $\det g_{ik}$ и $g^{rr}(r)$ are negative. A static regular solution to the Einstein and Klein — Gordon equations [5, 6] is independent of time. Inside the central region $0 \leq r \leq r_g$ (in which $g^{rr}(r) < 0$), the metric component g_{00} turned out to be a constant independent of the radius r . Therefore, it was natural to move to a synchronous reference system. That is, to put $g_{00} = 1$, and instead of $g_{22}(r) = -r^2$ in (2), simply leave $g_{22}(r)$:

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{rr}(r)(dr)^2 + g_{22}(r) \left[(d\theta)^2 + (\sin \theta)^2 (d\phi)^2 \right]. \quad (3)$$

It is believed that "matter in space cannot, generally speaking, be at rest in a synchronous frame of reference" [3], §97. An exception is the case of "dust-like" matter, when particles do not interact with each other. In our case, this is precisely the case, since in the maximally compressed state, gravity dominates over all other particle interactions.

In a static gravitational field in a synchronous frame of reference, the Ricci tensor component is $R_0^0 = 0$. Therefore, it is convenient to work with Einstein's equations in the form: $R_i^k = \kappa (T_i^k - \delta_i^k T / 2)$. As is known ([3, formula (94.9)], the energy-momentum tensor is $T_i^k = (p + \varepsilon)u_i u^k - pg_i^k$. At rest, 4-velocity $u_i = \delta_{i0}$. So $T_0^0 - T / 2 = (\varepsilon + 3p) / 2$. At $R_0^0 = 0$, it follows from the Einstein equation $R_0^0 = \kappa(\varepsilon + 3p) / 2$ that in a synchronous frame of reference, matter can be in the static state only when compressed by its own gravitational field to the ultrarelativistic limit $p = -\varepsilon / 3$. Note that when matter tends to expand, the pressure $p > 0$. And if matter tends to contract, then the pressure $p < 0$. In synchronous coordinates, the gravitational radii r_g и r_h , like in the Schwarzschild metric, are distinguished by the fact that in solutions of the Einstein and Klein — Gordon equations with boundary conditions on the radii $r = r_g$ и $r = r_h$ the theorem of existence and uniqueness is violated. Unlike the Schwarzschild metric, in synchronous coordinates, for $r = r_g$ и $r = r_h$, the metric component $g^{rr}(r)$ does not vanish. By substitution $dx = \sqrt{-g_{rr}(r)}dr$, $x(r) = \int_0^r \sqrt{-g_{rr}(r)}dr$, $g_{22}(x) = g_{22}(r(x))$, interval (3) becomes dependent on only one metric component $g_{22}(x)$:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx)^2 + g_{22}(x) \left\{ (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2 \right\} \quad (4)$$

The metric function $g_{rr}(r) < 0$ remains arbitrary. This arbitrariness means that the static state of matter compressed by its own gravitational field to the ultrarelativistic limit can exist independently of the internal composition of the object. With a black hole in mind, consisting of a homogeneous medium of Bose-Einstein condensate, the solution to the system of Einstein and Klein-Gordon equations in synchronous coordinates is presented in the article [7].

Conclusion. Understanding the deep meaning of Einstein's hypothesis made it possible to find out that in a synchronous frame of reference, matter can be in a static state, but only when compressed by its own gravitational field to the ultrarelativistic limit. Such a state of matter can exist regardless of its internal composition. Understanding the deep meaning of Einstein's hypothesis allowed us to find out the state, but only when compressed by its own gravitational field to the ultrarelativistic limit. Such a state of matter can exist regardless of its internal composition.

References

- [1] Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Germany, 1916, pp. 189–196.
- [2] Einstein A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1916, vol. 49, art. no. 769.
- [3] Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Moscow, Nauka Publ., 1995.
- [4] Kruskal M.D. Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys. Rev., 1960, vol. 119, art. no. 1743.
- [5] Meierovich B.E. Static state of a black hole supported by dark matter. Universe, 2019, vol. 5, art. no. 198.
- [6] Meierovich B.E. Guessing the Riddle of a Black Hole. Universe, 2020, vol. 6, art. no. 113.
- [7] Meierovich B.E. Black Hole and Dark Matter in Synchronous Coordinate System. JETP, 2023, vol. 5, pp. 585–592.