

УДК 530.122

Космологическая постоянная и черные дыры*Шишанин Андрей Олегович*

shishandr@rambler.ru

SPIN-код: 1908-7522

НИУ МЭИ, Москва, Россия

Аннотация. В докладе обсуждается вывод термодинамических величин для близким к экстремальным черным дырам с космологической постоянной в любой размерности пространства-времени большей 2.

Ключевые слова: космологическая постоянная, метрика АдС-Шварцшильда, энтропия, температура, экстремальная черная дыра, энтальпия

Введение. Метрика радиально-симметричной черной дыры (статического решения уравнений Эйнштейна) задается выражением (см., например [1])

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

Хорошо известно, что первый закон термодинамики незаряженных статических черных дыр имеет вид

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S, \quad (2)$$

где M — масса черной дыры, κ — поверхностная гравитация $\kappa = \left. \frac{f'(r)}{4\pi} \right|_{r=r_H}$.

Радиус горизонта событий r_H вычисляется как наибольший корень уравнения $f(r) = 0$. S — это энтропия, которая равна четверти площади A горизонта событий

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_H^2. \quad (3)$$

Методы и материалы; результаты. Положим космологическую постоянную Λ отрицательной. Тогда в (3+1)-мерном пространстве-времени для метрики АдС-Шварцшильда [2]

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{b^2} \quad (4)$$

в системе единиц $\hbar = c = G = k = 1$. Здесь $b^2 \equiv -\frac{3}{\Lambda}$.

Черная дыра называется экстремальной, если для нее выполняются соотношения $f(r_H) = f'(r_H) = 0$. Из определения видно, что температура экстремальной черной дыры равна нулю. Для экстремального решения АдС-Шварцшильда $M = b = r_H$. Если масса ниже этого значения, то происходит фазовый переход Хокинга-Пейджа [2], когда черная дыра нестабильна и распадается на пространство Анти-де-Ситтера. Метрика (4) имеет обобщение, называемое черной дырой АдС-Бардина [3] с функцией $f(r)$, равной

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r^2}{b^2}. \quad (5)$$

Здесь g — заряд магнитного монополя. Метрика (5) получается, если к действию Гильберта — Эйнштейна с космологической постоянной добавить действие некоторой нелинейной электродинамики.

Если у черной дыры с $\Lambda = 0$ есть электрический заряд Q , тогда $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$. Первый закон термодинамики принимает вид

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S + \phi \delta Q,$$

где ϕ — потенциал черной дыры.

Случай, когда заряд равен массе $Q = M$, описывает экстремальную черную дыру. Такая черная дыра является БПС-решением в $N=2$ супергравитации и при больших g метрика описывает многообразие $AdS^2 \times S^2$. Отметим, что также активно изучаются вращающиеся черные дыры, которые тоже могут быть экстремальными.

Энергию, энтропию и потенциал черной дыры с зарядом Q можно найти из действия I по формулам

$$E = \left(\frac{\partial I}{\partial \beta} \right)_Q - \frac{\phi}{\beta} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)_\beta, \quad S = \beta \left(\frac{\partial I}{\partial \beta} \right)_Q - I, \quad \phi = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial I}{\partial Q} \right)_\beta. \quad (6)$$

Например, для энтропии эта формула имеет преимущество по сравнению с (3) тем, что она позволяет вычислять квантовые поправки через статистическую сумму Z

$$S = \left(1 - \beta \frac{d}{d\beta} \right) \log Z.$$

В классическом пределе $Z \approx \exp(-I)$. Для решения Шварцшильда и АдС-Шварцшильда (4) вывод энтропии приведен в [5]. Классические величины (6) были вычислены в любой размерности в [4].

Также было замечено [6], [7], что для полной аналогии с первым законом термодинамики в (2) не хватает слагаемого с давлением. Было показано, что, если массу черной дыры заменить на энтальпию $H = M + PV$, то давление P пропорционально космологической постоянной.

Заключение. В докладе рассматриваются термодинамические свойства экстремальных, а также близких к экстремальным черным дырам с космологической постоянной. Здесь имеются замечательные аналогии с теорией фазовых переходов и газом Ван-дер-Ваальса. Также будет обсуждаться черная дыра Бардина-де-Ситтера.

Список источников

- [1] Frolov V.P., Zelnikov A. Introduction to Black Hole Physics. New York, Oxford University Press, 2011, 506 p.
- [2] Hawking S.W., Page D.N. Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space. Commun. Math. Phys., 1983, vol. 87, pp. 577–588. <https://doi.org/10.1007/BF01208266>
- [3] Fernando S. Bardeen-de Sitter black holes. Int. Journal of Mod. Phys., 2017, vol. 26, no. 7. <https://doi.org/10.1142/S0218271817500717>
- [4] Chamblin A., Emparan R., Johnson C., Myers R. Charged AdS black holes and catastrophic holography. Phys.Rev., 1999, vol. D60, art. no. 064018.
- [5] Witten E. Introduction to Black Hole Thermodynamics. arXiv:2412.16795[hep-th].
- [6] Kastor D., Ray S., Traschen J. Enthalpy and the mechanics of AdS black holes. Class. Quantum Grav., 2009, vol. 26, art. no. 195011. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/19/195011>
- [7] Dolan B.P. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. Class. Quantum Grav., 2011, vol. 28, art. no. 125020. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125020>

The Cosmological Constant and Black Holes

Shishanin Andrei Olegovich

shishandr@rambler.ru
SPIN-code: 1908-7522

NRU MPEI, Moscow, Russia

Abstract. We discuss the derivation of thermodynamic quantities for near-extremal black holes with a cosmological constant in any spacetime dimension greater than 2.

Keywords: cosmological constant, AdS-Schwarzschild metric, entropy, temperature, extremal black hole, enthalpy

Introduction. The metric of a radially symmetric black hole (a static solution of Einstein's equations) is given by

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

It is well known that the first law of thermodynamics of uncharged static black holes has the form

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S, \quad (2)$$

where M is the mass of black hole, κ is the surface gravity $\kappa = \frac{f'(r)}{4\pi} \Big|_{r=r_H}$. The radius of the event horizon is calculated as the largest root of the equation $f(r) = 0$. S is the entropy, which is equal to a quarter of the area A of the event horizon

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_H^2. \quad (3)$$

Methods and materials; results. Let us set the cosmological constant Λ to be negative. Then in (3+1)-dimensional space-time for the AdS-Schwarzschild metric [2]

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{b^2} \quad (4)$$

in the system of units $\hbar = c = G = k = 1$. Here $b^2 \equiv -\frac{3}{\Lambda}$.

A black hole is called extremal if it satisfies the following relations: $f(r_H) = f'(r_H) = 0$. From the definition it is clear that the temperature of an extremal black hole is zero. For the AdS-Schwarzschild extremal solution relation holds: $M = b = r_H$. If the mass is below this value, then the Hawking-Page phase transition occurs [2], when the black hole is unstable and decays into an Anti-de Sitter space. The metric (4) has a generalization called the AdS-Bardeen black hole [3] with a function equal to

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r^2}{b^2}. \quad (5)$$

Here g is the charge of the magnetic monopole. The metric (5) is obtained if the action of some nonlinear electrodynamics is added to the Hilbert-Einstein action with the cosmological constant.

If a black hole c has an electric charge Q , then $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$.

The first law of thermodynamics takes the form

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S + \phi \delta Q,$$

where ϕ is the potential of a black hole.

The case where the charge is equal to the mass $Q = M$ describes an extremal black hole. Such a black hole is a BPS-solution in $N = 2$ supergravity and for large r the metric describes the manifold $\text{AdS}^2 \times S^2$. Note that rotating black holes, which can also be extremal, are also actively studied.

The energy, entropy and potential of a black hole with charge Q can be found from the action I using the formulas

$$E = \left(\frac{\partial I}{\partial \beta} \right)_Q - \frac{\varphi}{\beta} \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi} \right)_\beta, \quad S = \beta \left(\frac{\partial I}{\partial \beta} \right)_Q - I, \quad \varphi = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial I}{\partial Q} \right)_\beta. \quad (6)$$

For example, for entropy this formula has an advantage over (3) in that it allows one to calculate quantum corrections through the statistical sum Z

$$S = \left(1 - \beta \frac{d}{d\beta} \right) \log Z.$$

In the classical limit $Z \approx \exp(-I)$. For the Schwarzschild and AdS-Schwarzschild solutions (4) the derivation of the entropy is given in [5]. The classical quantities (6) were calculated in any dimension in [4].

It was also noted [6], [7] that for complete analogy with the first law of thermodynamics in (2) the term with pressure is missing. It has been shown that if the mass of a black hole is replaced by enthalpy $H = M + PV$, then the pressure P is proportional to the cosmological constant.

Conclusion. The paper discusses the thermodynamic properties of extreme and near-extreme black holes with a cosmological constant. There are remarkable analogies with the theory of phase transitions and the Van der Waals gas. The Bardeen-de Sitter black hole will also be discussed.

References

- [1] Frolov V.P., Zelnikov A. Introduction to Black Hole Physics. New York, Oxford University Press, 2011, 506 p.
- [2] Hawking S.W., Page D.N. Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space. Commun. Math. Phys., 1983, vol. 87, pp. 577–588. <https://doi.org/10.1007/BF01208266>
- [3] Fernando S. Bardeen-de Sitter black holes. Int. Journal of Mod. Phys., 2017, vol. 26, no. 7. <https://doi.org/10.1142/S0218271817500717>
- [4] Chamblin A., Emparan R., Johnson C., Myers R. Charged AdS black holes and catastrophic holography. Phys.Rev., 1999, vol. D60, art. no. 064018.
- [5] Witten E. Introduction to Black Hole Thermodynamics. arXiv:2412.16795[hep-th].
- [6] Kastor D., Ray S., Traschen J. Enthalpy and the mechanics of AdS black holes. Class. Quantum Grav., 2009, vol. 26, art. no. 195011. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/19/195011>
- [7] Dolan B.P. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. Class. Quantum Grav., 2011, vol. 28, art. no. 125020. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125020>