М293560

НЕ ВЫДА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКОЕ
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ имени Н.Э.БАУМАНА

На правах рукописи

ХАЗИН Лев Моисеевич

ВАРИАНТ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛИАНО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКИХ ПЛАСТИНАХ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ

/01.02.06 – Динамика, прочность и надежность машин, приборов и аппаратуры/

Автореферат
диссертации на соискание ученой
степени кандидата технических наук

Москва 1976 г.

Работа выполнена в Московском высшем техническом училище им. Н.Э.Баумана.

Научный руководитель – доктор технических наук, профессор БАЛАБУХ Л.И.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор НОВИЦКИЙ В.В.

кандидат технических наук, доцент ТАРАСОВ А.Т.

Ведущее предприятие: ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. проф. Н.Е.Жуковского

Автореферат разослан "10" сентября 1976 г.

Защита диссертации состоится "14" октября 1976 г.

на заседании Специализированного Совета по динамике и прочности машин Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшего технического училища имени Н.Э.Бауман[illegible] по адресу: Моск[illegible]

Ваши отзывы [illegible]
выслать по у[illegible]

С диссе[illegible]а.

УЧЕНЫЙ
док[illegible]А.

Л.101384

М295360

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. В современных конструкциях, особенно в самолетостроении и судостроении, широко применяются тонкостенные элементы, ослабленные отверстиями различной формы. Наличие отверстий является причиной значительного локального увеличения напряжений по сравнению с напряжениями в регулярной части. Особенно опасно это явление для конструкций с высоким уровнем напряжений при повторных нагрузках. Для снижения эффекта концентрации напряжений зоны, прилегающие к отверстиям, подкрепляют кольцами, накладками, окантовками различной формы и толщины. Для оценки статической прочности конструкций в зоне выреза необходимо знать напряженно-деформированное состояние конструкции при действии эксплуатационных и расчетных нагрузок, причем при действии последних допускается работа материала конструкции в пластической области. Несмотря на подкрепление, уровень напряжений в зоне отверстия все же значительно превышает уровень напряжений в регулярной части. Поэтому знание поля напряжений в окрестности отверстия имеет важное, а иногда и решающее значение для оценки прочности всей конструкции.

№ 995360

В настоящее время для пластин постоянной толщины хорошо разработаны методы решения плоской задачи, основанные на теории аналитических функций комплексных переменных /Н.И.Мусхелишвили, Г.Н.Савин, А.Г.Угодчиков, А.С.Космодемианский, А.Я.Александров и другие/.

В последнее время для решения задач о концентрации напряжений около отверстий в пластинах конечных размеров сложной конфигурации и переменной толщины используется метод конечных элементов (МКЭ). В большинстве работ по методу конечных элементов используется вариант МКЭ на основе вариационного принципа Лагранжа. Обзор работ этого направления содержится в работах В.А.Постнова и И.Я.Хархурима, О.К.Зенкевича. Однако при использовании МКЭ на основе вариационного принципа Лагранжа для определения поля напряжений приходится применять операцию численного дифференцирования, что приводит к снижению точности вычисления напряжений. Поэтому представляет теоретический и практический интерес разработка варианта МКЭ на основе вариационного принципа Кастилиано, в котором поле напряжений вычисляется непосредственно.

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана

Разработке вариантов МКЭ на основе этого вариационного принципа посвящены работы Вебеке (1968 г.), В.Прагера (1968 г.) Г.Сандера (1974 г.), А.А.Челюбеева и М.П.Сычева (1975 г.).

Цель и метод исследований. Разработка варианта метода конечных элементов на основе вариационного принципа Кастидиано в форме метода П.Ф.Папковича для решения задач об определении напряженно-деформированного состояния в плоских пластинах переменной толщины, ослабленных отверстиями.

Научная новизна работы состоит в разработке методики получения координатных функций для МКЭ в напряжениях, отвечающих всем требованиям метода и требованиям удобства и простоты реализации на ЭВМ.

Практическая ценность работы заключается в том, что на основе разработанной методики составлена программа для "ЕЭСМ-4", позволяющая решать задачи о концентрации напряжений около отверстий в упругой и упруго-пластической постановке. Программа используется для решения конкретных задач, возникающих в процессе проектирования изделий, для проведения поверочных расчетов, а также для накопления справочного материала для конструкторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались:

1. На Втором Всесоюзном симпозиуме по применению численных методов в строительной механике корабля в 1973 г. в г. Николаеве;

2. На научном семинаре кафедры М-1 в Московском высшем техническом училище имени Н.Э.Баумана;

3. На научном семинаре третьего отделения Центрального Аэро-гидродинамического института им. проф. Н.Е.Жуковского;

4. На научном семинаре кафедры № 19 ВВИА им. проф. Жуковского.

По теме диссертации опубликовано две работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения; содержит 149 страниц, из них 42 страницы с рисунками.

Библиография к диссертации состоит из 44 наименований работ.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МВТУ им. Н. Э. Баумана БИБЛИОТЕКА

Во введении дано обоснование актуальности темы работы, сделан обзор работ по МКЭ в напряжениях, сформулирована цель работы, кратко изложено содержание глав.

В первой главе рассматривается задача об обобщенном плоском напряженном состоянии пластины, ограниченной двухсвязной областью. Для дискретизации задачи предлагается использовать четырехугольный конечный элемент, разделенный диагоналями на четыре треугольных элемента, с линейным законом изменения погонных усилий в каждом из них. Представление двухсвязных областей набором четырехугольных конечных элементов производится с помощью разбиения, границы которого образуются прямыми, соединяющими внутреннюю и внешнюю границы области, и ломаными, вершины которых находятся на вышеуказанных прямых. Примеры таких разбиений показаны на рис. 2. При таком разбиении зона, прилегающая к внутренней границе области, описывается более подробно, что важно, так как именно в этой зоне имеют место большие градиенты напряжений. Кроме того, при таком разбиении удается частично автоматизировать задание исходных данных. Частным видом такого разбиения является разбиение прямоугольной области на квадратные конечные элементы. Предварительно координатные функции строятся для прямоугольной области, разделенной на квадратные конечные элементы. Для каждого квадратного элемента вводятся две системы параметров, определяющих напряженное состояние в нем. В качестве первой системы параметров принимаются коэффициенты многочленов первой степени в разложениях погонных усилий N_x, N_y, N_{xy} в пределах каждого треугольного элемента. Погонные усилия в треугольном элементе, удовлетворяющие однородным дифференциальным уравнениям равновесия при принятом линейном законе, записываются в виде:

$$\begin{aligned} N_x^{(i)} &= -B_i x + D_i y + E_i \\ N_y^{(i)} &= F_i x - A_i y + G_i \\ N_{xy}^{(i)} &= A_i x + B_i y + C_i, \end{aligned} \qquad (I)$$

где i – номер треугольного элемента. Всего для задания напряженного состояния одного квадратного элемента требуется 28 параметров. Из них после выполнения условий сопряжения усилий по диагоналям квадратного элемента линейно независимыми являются 13 параметров. При линейном законе изменения

погонных усилий для задания нормальных и касательных составляющих по сторонам квадратного элемента достаточно задать их значения в вершинах квадратного элемента по каждой стороне, которые и принимаются в качестве второй системы параметров. В отличие от первой, вторая система параметров инвариантна по отношению к выбору системы координат. Этим определяется удобство использования второй системы параметров для промежуточных вычислений. Общее число второй системы параметров для квадратного элемента равно 16. Из них после выполнения условий равновесия на плоскости линейно независимыми являются также 13 параметров. Вторая система параметров выражается через первую по формулам для нормальной и касательной составляющих напряжений в произвольно ориентированной площадке. Для получения координатных функций с локальной областью ненулевых значений рассматривается объединение из четырех смежных квадратных конечных элементов, имеющих общую вершину. Записываются условия сопряжения погонных усилий между элементами и нулевые граничные условия по контуру такого объединения. Записанная система однородных линейных уравнений имеет семь линейно независимых решений. Свободным неизвестным задаются такие системы значений, при которых каждое из полученных решений обладает одним из свойств симметрии относительно осей, проходящих через общую вершину элементов. Такое разделение функций на симметричные и кососимметричные составляющие улучшает обусловленность системы разрешающих уравнений и облегчает выполнение условий симметрии в симметричных задачах. Полученные системы значений параметров определяют семь самоуравновешенных полей погонных усилий с локальной областью ненулевых значений. С каждой вершиной квадратных элементов, принадлежащих рассматриваемой области, связываются полученные самоуравновешенные поля погонных усилий, совокупность которых и образует координатные функции для данного разбиения прямоугольной области на квадратные элементы. Условия, при которых координатные функции являются линейно независимыми и удовлетворяют однородным граничным условиям сводятся к исключению некоторых функций. При этом после выполнения условий линейной независимости с каждой вершиной квадратных конечных элементов связывается не более пяти функций. Методом математи-

ческой индукции доказывается, что полученные координатные функции являются базисом в конечномерном пространстве, образованном на данном разбиении множеством самоуравновешенных полей погонных усилий с линейным законом изменения в пределах каждого треугольного элемента.

Координатные функции для произвольной двухсвязной области, разделенной на четырехугольные конечные элементы, строятся на основе полученных координатных функций для прямоугольной области, разделенной на квадратные конечные элементы. Для каждого четырехугольного конечного элемента вводятся две системы параметров, как описано выше для квадратного элемента. Из условий сопряжения погонных усилий по диагоналям четырехугольного элемента с помощью функции напряжений записываются в явном виде зависимости между параметрами первой системы, относящимися к различным треугольным элементам, составляющим четырехугольник. Далее вторая система параметров выражается через первую по формулам для нормальной и касательной составляющих напряжений в произвольно ориентированной площадке. При этом число линейно независимых параметров первой и второй систем, также как и для квадратного элемента, равно 13. Устанавливается соответствие между линейно независимыми параметрами второй системы для квадратного и четырехугольного элементов. Остальные параметры второй системы определяются из условий равновесия четырехугольных элементов на плоскости. Закон соответствия выбирается таким образом, что для всех функций нулевым нормальным и касательным составляющим по контуру объединения из четырех квадратных элементов соответствуют нулевые значения этих величин по контуру объединения из четырех четырехугольных элементов, а ненулевые линейно независимые параметры объединений из четырех квадратных и четырехугольных элементов отличаются только постоянными множителями. На рис. I показана физическая интерпретация полученных самоуравновешенных функций для разбиения области на четырехугольные конечные элементы и выбранном соответствии с помощью обобщенных сил статически эквивалентных действующим по линиям раздела между элементами погонным усилиям. Таким образом, процедура нахождения координатных функций сводится к вычислению величин второй системы

Закон изменения погонных усилий в треугольных конечных элементах

$$N_x^{(i)} = -B_i x + D_i y + E_i$$

$$N_y^{(i)} = F_i x - A_i y + G_i$$

$$N_{xy}^{(i)} = A_i x + B_i y + C_i$$

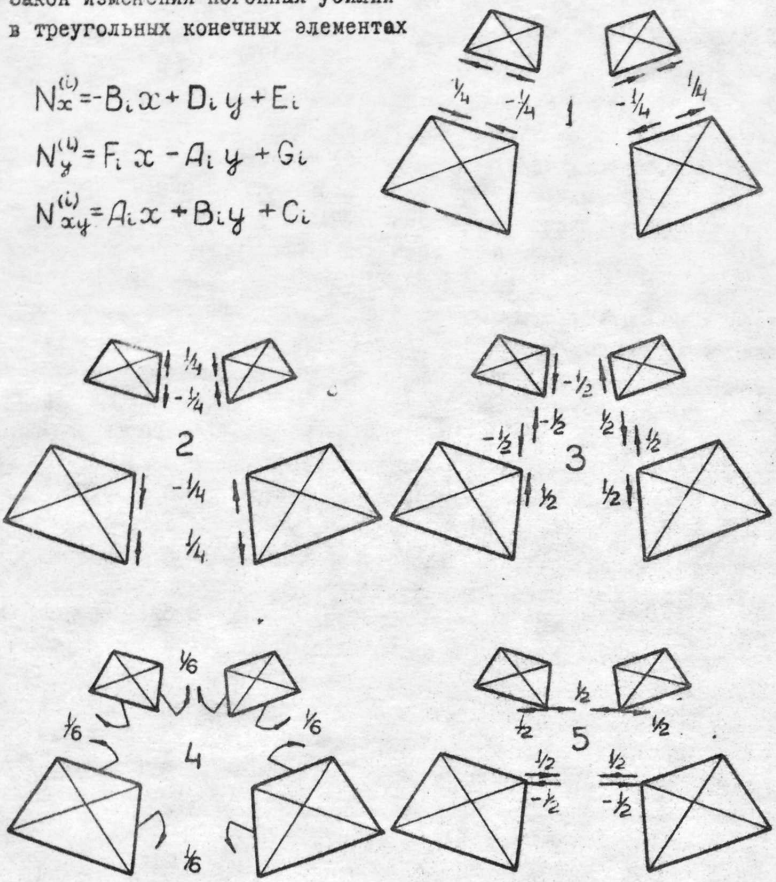


Рис. I.

Физическая интерпретация полученных координатных функций для двухсвязной области, разделённой на четырёхугольные конечные элементы, с помощью обобщённых сил статически эквивалентных действующим по границам элементов погонным усилиям.

параметров и нахождению первой системы параметров по известной второй системе. При выбранном законе соответствия условия линейной независимости и свойства симметрии функций при симметричном разбиении на четырехугольные элементы сохраняются. Для одного из граничных контуров двухсвязной области выполнение однородных граничных условий, также как и для прямоугольной области, сводится к исключению некоторых функций, связанных с вершинами, лежащими на этом контуре. Для другого - сводится к тому, что коэффициенты при функциях, связанные с вершинами, лежащими на этом контуре, должны удовлетворять однородным линейным алгебраическим уравнениям.

Во второй главе рассматриваются вопросы, связанные с реализацией на ЭВМ решения плоской задачи теории упругости методом конечных элементов в напряжениях с помощью полученных координатных функций. Система разрешающих уравнений получается из рассмотрения минимума функционала дополнительной энергии деформации, выраженного через координатные функции, при дополнительных ограничениях на одном из контуров в случае двухсвязной области. Условный минимум функционала находится с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. При определенной нумерации координатных функций система разрешающих уравнений имеет квазитрехленточную структуру. Отметим, что применение координатных функций с заранее выполненными условиями сопряжения погонных усилий между элементами и равновесия элементов приводит к меньшему числу неизвестных по сравнению с другими вариантами МКЭ.

Решение системы линейных уравнений с учетом ее структуры производится методом Гаусса.

По приведенному алгоритму составлена программа для "БЭСМ-4".

Для оценки точности приближенного решения приводятся решения эталонных задач, имеющих аналитическое решение, при различных разбиениях пластины на четырехугольные конечные элементы. Решается задача о растяжении квадратной пластины, ослабленной круглым отверстием, со стороной квадрата, равной десяти диаметрам отверстия. В силу симметрии задачи рассматривается четвертая часть пластины. Варианты разбиений пластины на четырехугольные элементы показаны на рис. 2. Полу-

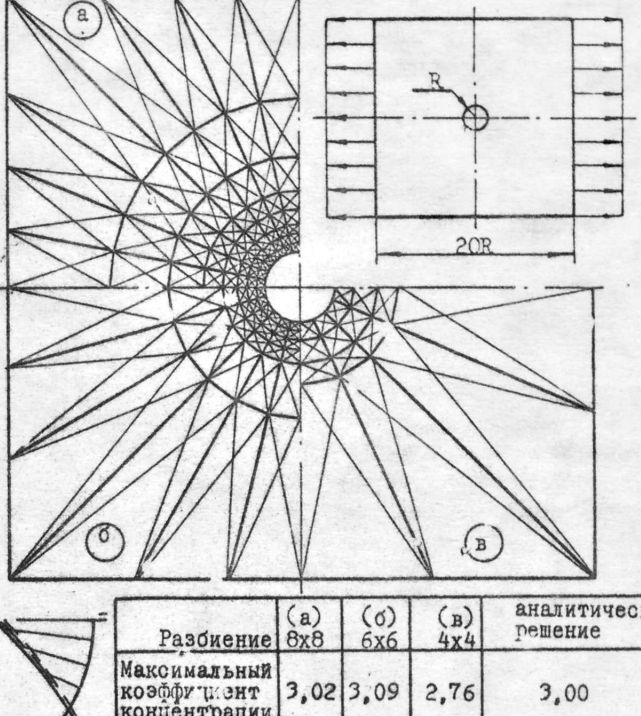
ченные приближенные решения сравниваются с аналитическим решением задачи о растяжении бесконечной плоскости, ослабленной круглым отверстием (задача Кирша). Из аналитического решения следует, что на расстоянии десяти радиусов от центра отверстия напряжения незначительно отличаются от напряжений на бесконечности. Результаты сравнения приведены на рис. 2. Сравнение показывает, что необходимая в инженерных расчетах точность достигается уже при разбиении 4x4. Аналогичный результат получен при сравнении приближенного и точного решений для пластины с круглым отверстием при действии равномерно распределенных напряжений сдвига.

Решается задача о растяжении прямоугольной пластины, ослабленной прямоугольным отверстием с закругленными углами. Результаты сравнения максимального коэффициента концентрации напряжений, полученного методом конечных элементов в напряжениях, приближенным аналитическим решением и экспериментальным путем с помощью поляризационно-оптического метода, приводятся в таблице I.

Таблица I

Метод решения	МКЭ в напряжениях	Аналитическое решение		Экспериментальное значение
		По Собею	По Петерсону	
Максимальный коэффициент концентрации напряжений	4,2	4,I	4,I2	4,28

Расчётная схема задачи и варианты разбиения пластины на четырёхугольные конечные элементы.



Разбиение	(а) 8x8	(б) 6x6	(в) 4x4	аналитическое решение
Максимальный коэффициент концентрации	3,02	3,09	2,76	3,00



Графики окружных напряжений при различных разбиениях пластины на конечные элементы.

——·—·— решение при разбиении 8x8 (а),

— — — решение при разбиении 6x6 (б),

- - - - - решение при разбиении 4x4 ( ),

—— —— аналитическое решение.

Рис. 2.

Интересно отметить, что замена криволинейного контура полигональным при использовании четырехугольного элемента с линейным законом изменения погонных усилий в пределах каждого треугольного элемента дает вполне удовлетворительные результаты. Учет криволинейности контура посредством точного удовлетворения граничных условий в вершинах четырехугольных элементов, или интегрального удовлетворения граничных условий по частям контура, опробованные на эталонных задачах, не привели к улучшению решения. Учет криволинейности контура при подсчете коэффициентов системы разрешающих уравнений путем уточненного вычисления интегралов по подобластям с криволинейными границами дал весьма незначительное улучшение решения. Отметим также, что итерационное уточнение решения системы разрешающих уравнений после решения их методом Гаусса, проведенное для эталонных задач, практически не влияет на решение.

В третьей главе рассматриваются задачи об определении напряженного состояния в окантовках малых вырезов конструкций при работе материала окантовок в упругой области. Решение таких задач, учитывающее реальную работу всех элементов конструкции окантовки, представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Простейшая из таких задач об определении напряженного состояния в плоской пластине с отверстием, край которой подкреплен симметрично расположенным кольцом, требует решения пространственной задачи теории упругости. В реальной конструкции решение задачи осложняется кривизной и несимметрией окантовки, наличием ребер, стрингеров, шангоутов, перестыковочных элементов и заклепочных соединений. Влияние каждого из перечисленных факторов на напряженно-деформированное состояние окантовок не изучено и требует проведения дальнейших исследований. Поэтому в практике конструкторских бюро при проектировании окантовок применяется комплексный расчетно-экспериментальный подход. Конструкции окантовок, спроектированные на основании справочных или расчетных данных по плоской задаче, проверяются на плоских моделях окантовок с последующим уточнением после проведения статических испытаний натурных конструкций. Анализ тензометрии натурных конструкций окантовок показывает, что практически влияние выреза распространяется на зону, размер которой не превышает одного - полутора максимальных размеров выреза.

Поэтому на основании принципа Сен-Венана для расчета выделяется часть конструкции размером, равным четырем - пяти максимальным размерам выреза. Граничными условиями для выделенной части конструкции служат результаты общего расчета регулярной конструкции. Для расчета окантовки принимается обобщенная плоская модель пластины. Решение при таком допущении сводится к решению задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии пластины для неоднородной среды. При дискретизации задачи принимается, что в пределах каждого треугольного элемента погонные усилия меняются по линейному закону, а толщина является постоянной.

В качестве примера расчета приводятся решения для типовых конструкций окантовок малых вырезов. Анализ результатов расчетов и экспериментов, проведенных на натурных конструкциях, показывает, что в наиболее напряженной части конструкции - в полотне окантовки - расчетные значения удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Погрешность в определении максимальных напряжений, полученных в результате расчета, не превосходит десяти процентов по отношению к экспериментальным значениям.

Кроме расчета реальных окантовок составленная программа используется для накопления справочного материала для конструкторов. Рассматриваются прямоугольные пластины, ослабленные прямоугольными отверстиями с закругленными углами. Задача решается для различных видов подкреплений, нагружений и соотношений между сторонами отверстия и радиусов закруглений. В работе приводится решение одной из серий таких задач, используемых в качестве справочного материала при проектировании окантовок.

Четвертая глава посвящена решению задач об определении напряженно-деформированного состояния в пластинах, ослабленных отверстиями, при работе материала пластины в пластической области. Предполагается, что в каждой точке пластины имеет место активная деформация и нагружение близко к простому. Применяется теория малых упруго-пластических деформаций. В качестве метода решения используется метод переменных параметров упругости, разработанный И.А.Биргером. В основе метода лежит представление зависимостей деформаций от напря-

жений в форме обобщенного закона Гука, в котором параметры упругости являются функциями напряженного состояния. Решение задачи сводится к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается упругая задача для неоднородного тела с новыми параметрами упругости, уточненными на предыдущем шаге. Процесс заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений и при условии, что интенсивность напряжений и деформаций, полученных в расчете, близки к кривой деформирования. В практических расчетах принималось, что материал пластин является несжимаемым, или, что то же, считалось, что коэффициент Пуассона равен 0,5. При этом диаграмма деформирования, связывающая интенсивности напряжений и деформации, совпадает с диаграммой растяжения материала. Диаграмма растяжения в пластической области аппроксимировалась аналитическим выражением вида

$$\sigma_i = A \times (\sigma_i / B)^{1/P}, \qquad (2)$$

где коэффициенты A, B и P подбирались исходя из наилучшего приближения диаграммы растяжения. В пределах каждого треугольного элемента секущий модуль принимается постоянным и равным секущему модулю, вычисленному для центра тяжести треугольного элемента. Эти упрощения позволяют использовать в процессе итерационного решения матрицы податливости треугольных элементов, вычисленные в первом приближении.

Приводится решение об упруго-пластическом состоянии круглой пластины, ослабленной круглым отверстием и растянутой осесимметрично относительно центра отверстия. Диаметр пластины равен десяти диаметрам отверстия. Материал пластины является идеальным упруго-пластическим телом. Сравнение результатов расчета с аналитическим решением, полученным для аналогичной задачи для бесконечной плоскости, показывает хорошее совпадение решений. Для материала с линейным упрочнением решена задача о растяжении квадратной пластины, ослабленной круглым отверстием. Полученное решение хорошо совпадает с результатами приближенного решения и экспериментом, приведенным в работе И.И.Фаерберга.

В качестве примера приводятся результаты расчета одной из окантовок натурного изделия. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает удовлетворительное совпадение

результатов.

Резюмируя, отметим, что в работе:

I. Разработан алгоритм построения координатных функций для решения плоской задачи методом конечного элемента на основе вариационного принципа Кастилиано в форме метода П.Ф.Папковича.

2. На эталонных задачах, имеющих аналитическое решение, исследованы различные варианты удовлетворения силовым граничным условиям для криволинейных границ и выбран наилучший из них. Исследовано влияние различных разбиений на точность приближенных решений.

3. Разработана программа для "БЭСМ-4", позволяющая решать широкий круг инженерных задач, которые с достаточной для практики точностью можно формулировать как задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии пластин переменной толщины, работающих при упругих и упруго-пластических деформациях.

4. Разработанная программа используется для проведения проектировочных и поверочных расчетов окантовок малых вырезов конструкций.

5. На основе разработанной программы создан альбом расчетных данных для большого числа вариантов окантовок вырезов.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

I. Л.М.Хазин. Решение плоской задачи теории упругости для пластины переменной толщины методом конечного элемента на основе вариационного принципа Кастилиано. РЖ "Механика" 5В56ДЕП, 5, I974 г.

2. Л.М.Хазин. Реализация вариационного принципа Кастилиано для плоской задачи теории упругости по методу конечных элементов. Расчеты на прочность, выпуск I6, М.; I975 г.