

DM 223766
Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское
ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

ШАПОВАЛОВ Леонид Александрович

ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
И УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК, ПЛАСТИН
И СТЕРЖНЕЙ

Специальность 01.02.06 — Динамика, прочность и надежность
машин, приборов и аппаратуры

Диссертация написана на русском языке

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Официальные оппоненты:

1. Доктор технических наук, профессор А. С. Вольмир.
2. Доктор технических наук, профессор Н. В. Валишвили.
3. Доктор технических наук В. И. Мяченков.

Ведущее предприятие указано в решении Ученого Совета.

Автореферат разослан « » 197 г.

Защита диссертации состоится « » 197 г.
на заседании Специализированного Совета по динамике и
прочности машин, по адресу: Москва, 107005, 2-я Бауман-
ская ул., д. 5, МВТУ.

Ваши
сим нап'

вчатья, про-

С дн
им. Н. 3

Учен
к. **Ожалостин.**

M 223766

М В У
Н. С. 1942
МБЛНО

КНИЖНАЯ



1223766

Шаповалов П. А. Исследован

- I -

Исследование прочности и устойчивости оболочек, пластин и стержней, применяемых в различных областях техники в качестве несущих элементов конструкций, является одной из важных задач механики твердых деформируемых тел.

Для современного состояния этого направления науки характерны дальнейшее развитие и совершенствование методов расчета, непосредственно связанных с разработкой конструкций, создание алгоритмов расчета сложных составных систем с учетом геометрической и физической нелинейности и обращение на качественно новом уровне к решению классических задач. Быстрому внедрению в практику эффективных способов оценки прочности инженерных сооружений способствует широкое использование электронных вычислительных машин.

Реферируемая диссертация посвящена исследованиям напряженного состояния и устойчивости оболочек, пластин и стержней. Рассматриваются общие вопросы строительной механики оболочек и практические методы расчетов прочности и устойчивости тонкостенных конструкций. Содержится решение ряда новых задач статистики деформируемых систем, возникающих в процессе проектирования объектов современного машиностроения.

Работа состоит из четырех глав и содержит 275 стр. текста, 79 фигур и библиографический список 286 наименований.

В первой главе обсуждаются основные соотношения нелинейной теории оболочек применительно к задачам устойчивости конструкций.

Уравнения теории тонких оболочек при больших смещениях и при различных предположениях геометрического и статического характера были получены в разное время А.Лявом, С.П.Тимошенко, А.И.Лурье, В.В.Новожиловым, Ю.Н.Работновым, Н.А.Алумияе, В.П.Ченом, Э.Рейсснером, Х.М.Муштари, К.З.Галимовым, В.З.Власовым, Л.Х.Доннеллом, К.Маргерром, В.М.Даревским, В.Т.Койтером,

1223766

И.И.Воровичем, Б.Будянским, В.В.Кабановым, Л.И.Шкутиным и другими авторами.

В диссертации излагается простейший вариант геометрически нелинейной теории непологих тонких оболочек в квадратичном приближении. Этот вариант построен на допущениях о малости удлинений, сдвигов и поворотов в сравнении с единицей, малости деформаций срединной поверхности по сравнению с поворотами и пренебрежении поворотом элемента оболочки относительно его нормали.

С принятой точностью, компоненты деформации оболочки, как трехмерного тела, имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \omega_2^2 & \varepsilon_{12} &= e_{12} - \omega_1 \omega_2 \\ \varepsilon_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} \omega_1^2 & \varepsilon_{23} &= e_{23} \\ \varepsilon_{33} &= e_{33} + \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) & \varepsilon_{31} &= e_{31} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь e_{ik} -линейные части компонентов деформации; ω_k -повороты элементарного объема.

Зависимости /I/ рассматривались В.В.Новожиловым при обсуждении возможных упрощений в задачах устойчивости гибких тел.

Геометрические соотношения, положенные в основу предлагаемого варианта нелинейной теории непологих оболочек, получены исходя из уравнений трехмерного тела и гипотезы Кирхгофа-Лява, формулируемой с учетом нагрева

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \alpha T$$

где α -коэффициент линейного расширения; $T = T(\alpha_1, \alpha_2)$ -температура, постоянная по толщине оболочки.

Приводятся, как точные выражения для деформаций, кривизн и кручения срединной поверхности, обобщающие формулы В.В.Новожилова-К.Х.Тзяо на температурные задачи, так и простейший вариант геометрических соотношений, следующий из формул /I/. Показано, что для простейшего варианта нелинейной теории оболочек

дополнительные температурные члены в формулах для кривизн и кручения, связанные с учетом тепловых деформаций при переходе к двумерной задаче, могут быть исключены из рассмотрения. Деформации волокна оболочки для этого варианта геометрических соотношений выражаются формулами

$$\varepsilon_{11} = E_1 + z K_1, \quad \varepsilon_{22} = E_2 + z K_2, \quad \varepsilon_{12} = \Omega + 2z \tau$$

$$E_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \theta_1^2, \quad K_1 = \kappa_1 - \frac{\theta_2^2}{2R_1}$$

$$E_2 = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2, \quad K_2 = \kappa_2 - \frac{\theta_1^2}{2R_2}$$

$$\Omega = \omega + \theta_1 \theta_2, \quad \tau = \tau \quad (2)$$

Здесь ε_1 , ε_2 , ω , κ_1 , κ_2 , τ , θ_1 , θ_2 - общепринятые обозначения деформаций, кривизн, кручения и поворотов элемента срединной поверхности в линейном приближении.

Для получения уравнений равновесия и силовых граничных условий оболочки, срединная поверхность которой ограничена гладким криволинейным контуром, в диссертации использован метод возможных перемещений. Этот метод, реализующий заданные геометрические предпосылки с принятой точностью, исходя из функционала энергии, для оболочек конечного прогиба впервые применил К.Маргерр.

Вариационный подход к построению простейшего варианта нелинейной теории оболочек, основанный на приближенных геометрических соотношениях /2/, приводит к следующим уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1 H}{R_1} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H + \frac{1}{R_1} \left\{ \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - A_1 A_2 \left[\left(T_1 - \frac{M_2}{R_2} \right) \theta_1 + S \theta_2 \right] \right\} = -A_1 A_2 P_1 \end{aligned} \quad (1 \neq 2)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left\{ \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - A_1 A_2 \left[\left(T_1 - \frac{M_2}{R_2} \right) \theta_1 + S \theta_2 \right] \right\} - \\
 & \quad - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left\{ \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - A_1 A_2 \left[\left(T_2 - \frac{M_1}{R_1} \right) \theta_2 + S \theta_1 \right] \right\} = P_n \quad (3)
 \end{aligned}$$

В уравнениях /3/ α_1 , α_2 - ортогональные криволинейные координаты, совпадающие с линиями кривизны; A_1 , A_2 , R_1 , R_2 - параметры Ламе и главные радиусы кривизны срединной поверхности; T_1 , T_2 , S , M_1 , M_2 , H - усилия и моменты элемента оболочки; P_1 , P_2 , P_n - компоненты поверхностной нагрузки.

Силовые граничные условия на криволинейном контуре оболочки, пересекающем сетку координатных линий $\alpha_2 = \text{const}$ под углом $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
 T_v - \frac{M_v}{R_{vt}} &= T_1 \cos^2 \gamma + 2 S \sin \gamma \cos \gamma + T_2 \sin^2 \gamma + H \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \\
 & \quad - \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[(M_2 - M_1) \sin \gamma \cos \gamma + H (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right], \\
 T_t + \frac{M_v}{R_t} &= (T_2 - T_1) \sin \gamma \cos \gamma + S (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) + H \left(\frac{\cos^2 \gamma}{R_2} - \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} \right) + \\
 & \quad + \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right) \left[(M_2 - M_1) \sin \gamma \cos \gamma + H (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right], \\
 T_n + \frac{d M_v}{d s_t} &= \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \left\{ \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -A_1 A_2 \left[\left(T_1 - \frac{M_2}{R_2} \right) \theta_1 + S \theta_2 \right] \Big\} + \\
 & + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \left\{ \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) - A_1 A_2 \left[\left(T_2 - \frac{M_1}{R_1} \right) \theta_2 + S \theta_1 \right] \right\} + \\
 & + \left(-\frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \left[(M_2 - M_1) \sin \gamma \cos \gamma + H (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right], \\
 & M_t = M_1 \cos^2 \gamma + 2 H \sin \gamma \cos \gamma + M_2 \sin^2 \gamma \quad (4)
 \end{aligned}$$

Здесь T_v , T_t , T_n , M_v , M_t — погонные усилия и моменты, заданные на граничном контуре с элементом дуги ds_t ; $R_t = \sin^2 \gamma / R_1 + \cos^2 \gamma / R_2$; $R_{vt} = (1/R_1 - 1/R_2) \sin \gamma \cos \gamma$. Линейный вариант силовых граничных условий /4/ сформулирован К.Ф.Черных.

Статические уравнения непологой оболочки /3/, /4/, полученные в диссертации, соответствуют проектированию главного вектора на оси, связанные с недеформированной срединной поверхностью.

В рамках энергетического метода, из условия существования упругого потенциала в первой главе получены соотношения упругости геометрически нелинейной теории оболочек, аналогичные известным зависимостям В.В.Новожилова-Л.И.Балабуха для линейных задач

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (E_1 + \nu E_2) - \beta T h, \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_1 + \nu K_2) \\
 T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (E_2 + \nu E_1) - \beta T h, \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_2 + \nu K_1) \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \Omega, \quad H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \mathcal{T} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Функции S и H в уравнениях /3-5/ представляют собой формальные симметричные тангенциальные усилия и моменты. Эти величины подобны соответствующим силовым факторам линейной теории оболочек, введенным в рассмотрение А.И.Лурье и В.В.Новожиловым.

На основе нелинейных уравнений равновесия /3/ и силовых граничных условий /4/ в диссертации получены линеаризированные уравнения непологих оболочек. Формулируется энергетическое условие устойчивости тонкой оболочки для простейшего варианта геометрически нелинейной теории

$$\begin{aligned}
 W'' = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[(E_1' + E_2')^2 - 2(1-\nu)(E_1'E_2' - \frac{\Omega_2'^2}{4}) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[(K_1' + K_2')^2 - 2(1-\nu)(K_1'K_2' - \tau'^2) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \iint \left[(T_1^\circ - \frac{M_2^\circ}{R_2})\theta_1'^2 + 2S^\circ\theta_1'\theta_2' + (T_2^\circ - \frac{M_1^\circ}{R_1})\theta_2'^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0
 \end{aligned}$$

где T_1° , T_2° , S° , M_1° , M_2° - докритические значения усилий и моментов; E_1' , E_2' , Ω_2' , K_1' , K_2' , τ' , θ_1' , θ_2' - дополнительные деформации, кривизны и повороты.

В задачах устойчивости, для состояния нейтрального равновесия оболочки имеет место вариационное уравнение $\delta(W'') = 0$.

Простейший вариант геометрически нелинейной теории оболочек, отражающий основные свойства тонкостенных конструкций при больших перемещениях, представляется удобным для решения практических задач и в том числе задач устойчивости с учетом начальных смещений и моментности исходного напряженного состояния. Нелинейные силовые граничные условия /4/, составленные для произвольного криволинейного контура, позволяют подойти к решению нетрадиционных задач упругой устойчивости, возникающих при

разработке новых конструкций типа оболочек.

Согласно принятым в работе геометрическим гипотезам, параметрические члены уравнений устойчивости, учитывающие начальные смещения, содержат лишь повороты касательных к координатным линиям на срединной поверхности. Через те же повороты выражаются дополнительные усилия и моменты в указанных уравнениях. Это обстоятельство облегчает практическое использование полученных уравнений при разработке машинных алгоритмов для решения задач упругой устойчивости на ЭЦВМ.

Содержанию первой главы предшествует подробный обзор наиболее известных уравнений теории оболочек при конечных перемещениях.

Вторая глава посвящена решению контактных задач сопряжения оболочек вращения с упругими кольцами и продольными ребрами для безмоментных, полубезмоментных и моментных расчетных моделей. Рассматриваются задачи устойчивости оболочек и колец, связанных с обшивкой.

Контактным задачам теории оболочек уделяется значительное внимание при исследованиях напряженного состояния и устойчивости тонкостенных конструкций. Эти задачи возникают при расчетах составных пространственных систем, сочетающих различные элементы гибких тел в форме оболочек, стержней и колец.

Во второй главе подробно исследованы распределение напряжений и устойчивость элементов конструкции цилиндрического резервуара со сферическими днищами и торцевыми кольцами. Указанные вопросы, а также родственные контактные задачи для цилиндрической и сферической оболочек рассматривались Л.Бескиным, В.З. Власовым, В.И.Моссаковским, М.Сальвадори, П.Цикала, Ф.Виком, В.Ф.Чижовым, В.С.Гудрамовичем, Е.М.Макеевым.

При расчетах колец цилиндрического резервуара, представляющего сложную составную конструкцию, целесообразно выбрать упрощенную расчетную модель тонкой оболочки, достаточно правильно отражающую особенности ее работы в качестве упругого основания для подкрепляющих круговых колец.

Для оболочки, длина которой не слишком велика и соизмерима

с размерами поперечного сечения, в качестве такой модели может быть использована безмоментная теория, нашедшая применение для задач прочности и устойчивости шпангоутов, связанных тонкой обшивкой в работах Л.И.Балабуха, В.З.Власова, С.И.Галкина и других авторов.

Наиболее ответственным вопросом в контактных задачах безмоментной теории является составление геометрических и статических условий сопряжения оболочек и колец. В диссертации статические граничные условия по линии контакта оболочек вращения с упругими кольцами получены энергетическим методом. Для нерастяжимого кругового кольца указанные силовые и геометрические условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} \sin \theta_0^{(1)} - T_1^{(2)} \sin \theta_0^{(2)} + P &= 0, & -\frac{EJ}{z^4} \left(\frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{d}{d\varphi} \right)^2 \bar{v}_\kappa + \\ + \frac{dq}{d\varphi} - t - \frac{1}{z} \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m \right) + \frac{d}{d\varphi} \left(T_1^{(1)} \cos \theta_0^{(1)} + T_1^{(2)} \cos \theta_0^{(2)} \right) + S^{(1)} + S^{(2)} &= 0 \\ u^{(1)} = -\cos \theta_0^{(1)} \frac{d\bar{v}_\kappa}{d\varphi} + u_\kappa \sin \theta_0^{(1)}, & \quad \bar{v}^{(1)} = \bar{v}_\kappa \\ u^{(2)} = -\cos \theta_0^{(2)} \frac{d\bar{v}_\kappa}{d\varphi} - u_\kappa \sin \theta_0^{(2)}, & \quad \bar{v}^{(2)} = \bar{v}_\kappa \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь EJ , z , φ - изгибная жесткость, радиус и угловая координата кольца; θ_0 - полярный угол граничного контура оболочки вращения; u , $\bar{v}$, u_κ , $\bar{v}_\kappa$ - тангенциальные смещения оболочек и кольца; P , t , q , m - распределенные внешние силы и погонные моменты, приложенные к кольцу. Индексы "1" и "2" относятся к оболочкам, сопрягаемым с кольцом.

Энергетический способ получения силовых граничных условий особенно надежен для задач рассматриваемого типа, в которых расчетная схема весьма упрощена и не учитывает всех свойств реальной конструкции.

Исходя из предложенной расчетной модели резервуара, в работе решена задача об изгибе торцевых колец под действием произвольных распределенных нагрузок. Решение дано в тригонометрических рядах.

Подробно рассмотрен изгиб кольца сосредоточенной радиальной силой, касательной силой и моментом. Для указанных случаев нагружения улучшена сходимость тригонометрических рядов, достигнутая путем выделения и последующего суммирования решений, относящихся к изолированному кольцу.

Исследовано комбинированное нагружение торцевого кольца сосредоточенными радиальными нагрузками.

Показано существенное влияние на изгиб колец относительной жесткости элементов конструкции резервуара.

Результаты вычислений изгибающих моментов, осевых и перерезывающих сил колец при варьировании параметров жесткости резервуара и степени пологости днищ для различных случаев нагружения подробно иллюстрированы графически.

В контактной задаче сопряжения цилиндрической оболочки с продольными ребрами исследованы тепловые напряжения, возникающие вследствие перепада температур между панелями оболочки и элементами продольного набора. Эта задача, в известном смысле, близка к случаю нагружения подкрепленного цилиндра сосредоточенными силами, приложенными к его торцу.

Вопросы термоупругости цилиндрических оболочек с продольными ребрами обсуждались в работах Л.А.Ильина, Л.А.Бордуновой, В.А.Заруцкого и Т.А.Нешумаевой, Я.С.Подстригача и В.А.Осадчука. Родственные задачи статики для оребренных замкнутых тонкостенных цилиндров и панелей рассматривались И.А.Биргером, Э.И.Григолюком и В.М.Толкачевым, В.А.Заруцким, Е.С.Гребнем, В.М.Рябовым, П.А.Жилиным, Н.П.Абовским, А.П.Варваком.

Простейшим приближенным методом определения температурных напряжений в составных неравномерно нагретых оболочках является метод, основанный на элементарной теории плоских сечений. В этом методе не учитываются краевые эффекты и влияние деформаций сдвига. В соответствии с принципом Сен-Венана можно ожидать, что вычисленные таким образом напряжения будут близки к действительным только в сечениях оболочки, достаточно удаленных от ее торцов. Принцип Сен-Венана не позволяет сделать какие-либо оценки правильности расчета по элементарной теории плоских сечений, если длина оболочки одного порядка с ее диаметром. В этом случае необходим более точный расчет температурных напряжений.

В диссертации контактная задача о температурных напряжениях в тонкостенной пространственной конструкции, составленной из цилиндрических панелей и связывающих их продольных ребер решена методами теории оболочек.

Наиболее простой теорией цилиндрических оболочек является полубезмоментная теория В.З.Власова. Однако эта теория в общем случае предполагает малую изменяемость напряженного состояния в направлении длины оболочки, чего может не быть в рассматриваемой задаче о температурных напряжениях. Поэтому решение поставленной задачи произведено на основе двух теорий: моментной теории пологих оболочек и полубезмоментной теории. В обоих случаях функции напряжения для цилиндрических панелей разыскиваются в бесконечных тригонометрических рядах, удовлетворяющих краевым условиям свободного опирания оболочки на жесткий контур

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{\ell} \quad (7)$$

В выражениях /7/ ℓ -длина оболочки; x , y -осевая и окружная координаты панелей.

Граничные условия на линиях контакта панелей с продольными ребрами имеют вид

$$y = \pm R \varphi_0 \quad u = u_0, \quad v = M_2 = N_2 = 0$$

Здесь R , φ_0 -радиус оболочки и угловой размер панели; u , v -тангенциальные смещения цилиндра; u_0 -продольное перемещение ребра, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$2S(x, R\varphi_0) - \frac{dN_0}{dx} = 0, \quad \frac{du_0}{dx} = \frac{N_0}{E_0 F_0} + \alpha_0 t_0(x);$$

$E_0 F_0$, α_0 , t_0 , N_0 -жесткость, коэффициент линейного расширения, температура и осевое усилие ребра; S , N_2 , M_2 -внутренние усилия и моменты в оболочке.

Для холодных панелей и равномерно нагретых продольных ребер результаты расчета по моментной и полубезмоментной теориям обо-

лочек сравниваются между собой. Температурное поле каждого ребра $t_o(x) = T_o = \text{Const}$ в обоих случаях принимается в форме ряда

$$t_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos \lambda_n x, \quad \theta_n = \frac{4 T_o (-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$$

В работе показано, что температурные напряжения продольного набора можно с удовлетворительной точностью определять, пользуясь полубезмоментной теорией оболочек. Для расчета напряженного состояния самой оболочки эта теория оказывается менее пригодной.

Вблизи угловых точек панелей, где имеет место значительная концентрация напряжений, результаты вычисления касательных усилий по обоим теориям существенно отличаются между собой.

Наблюдаемые различия в величинах сдвигающих сил объясняются несовпадением характера особенностей решений дифференциальных уравнений теории пологих оболочек и полубезмоментной теории в окрестности торцов оболочки при $x = \pm \ell/2$, $y = \pm R\varphi$.

Установлено, что в первом случае, для усилий вычисляемых по теории пологих оболочек, особенность носит логарифмический характер

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} S \equiv \lim_{x_1 \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x_1} \right), \quad x_1 = \frac{\ell}{2} - x$$

Для уравнений полубезмоментной теории соответствующая особенность имеет дробно-степенной вид

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} S \equiv \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

При практических расчетах сдвигающих сил наличие особенности второго типа приводит к резкому ~~завышению~~ касательных напряжений вблизи торцов оболочки.

Характер особенностей аналитических решений для тонкостенных конструкций при передаче сосредоточенных воздействий от упругого стрингера к обшивке обсуждался в работах Э.И.Григолюка и В.М.Толкачева.

Вопросы влияния кольцевого сжатия на изгиб цилиндрической оболочки в окружном направлении недостаточно отражены в литературе. Между тем, комбинированное нагружение оболочки вращения неравномерно распределенной поверхностной нагрузкой и кольцевым сжатием приводит к такому же эффекту резкого уменьшения несущей способности, который наблюдается в задаче о продольном изгибе сжатого стержня по мере приближения осевой силы к ее критическому значению.

Для изучения изгиба поперечных сечений оболочки в присутствии кольцевых сжимающих сил в работе рассмотрено нагружение тонкостенного цилиндра гидростатическим давлением q , состоящим из постоянной части q_0 и переменной составляющей $\bar{q}$, представленной в виде тригонометрического разложения

$$\bar{q} = \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cos n\varphi, \quad q = q_0 + \bar{q}$$

Решение поставленной задачи получено на основе полубезмоментной теории оболочек для граничных условий, соответствующих опиранию торцов цилиндра на упругие кольца.

Ввиду геометрической нелинейности данной задачи, уравнения равновесия полубезмоментной теории записаны для деформированной срединной поверхности и линеаризированы относительно смещений, возникающих при отклонении оболочки от состояния однородного кольцевого сжатия.

Разрешающее уравнение изгиба сжато-изогнутой оболочки, выраженное через функцию напряжений В.З.Власова, имеет вид

$$\left(1 - \frac{12 T_0 R^2}{E h^3}\right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Omega(F) + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \Omega(F) + \frac{12 R^4}{h^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = -R^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi^2}, \quad \Omega = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \quad (8)$$

Здесь $T_0 = -q_0 R$, h - толщина оболочки.

Для случая кольцевого изгиба оболочки нагрузкой, изменяющейся

по закону косинуса двойного угла, решение дифференциального уравнения /8/ получено в замкнутом виде и доведено до числовых результатов.

Показано, что учет возрастания окружных изгибающих моментов в присутствии кольцевого сжатия приводит к существенным поправкам при практических расчетах оболочек, нагруженных неравномерным давлением.

При рассмотрении устойчивости колец цилиндрического резервуара нагруженного внутренним давлением в работе дан энергетический анализ возможности замены точного решения поставленной задачи приближенным решением, в котором действие внутреннего давления имитируется статически эквивалентной распределенной радиальной нагрузкой, приложенной к кольцам. Исследование выполнено для упрощенного варианта конструкции, состоящей из двух сферических сегментов, связанных между собой промежуточным упругим кольцом.

Анализ устойчивости проведен, исходя из энергетического условия С.П.Тимошенко для состояния безразличного равновесия колец резервуара

$$\Delta \Pi = \Pi_1(u_0 + u_1, \dots) - \Pi_0(u_0, v_0, w_0) = 0$$

$$\Pi = 2W + W_K - A \quad (9)$$

Здесь Π - полная потенциальная энергия системы; W, W_K - энергия обшивки и кольца; A - работа внешних сил; Π_0 - значение полной энергии в момент, предшествующий выпучиванию и в отклоненном состоянии; u_0, v_0, w_0 и u_1, v_1, w_1 - начальные и бифуркационные смещения.

Для определения критической нагрузки кольца резервуара в точной постановке, под действием мембранных усилий со стороны сферических оболочек, нагруженных внутренним давлением, в качестве потенциала внешних сил принята работа гидростатического давления P на изменении объема оболочек в процессе деформации. В этом случае

$$A = pV, \quad V = V^* - V_0, \quad V^* = \frac{1}{3} \iint \Delta^* d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix}$$

где V_0 , V^* - исходный и деформированный объемы резервуара;
 X_1 , X_2 , X_3 - декартовы координаты деформированной срединной поверхности.

При использовании приближенного подхода к вычислению критической нагрузки и замене внутреннего давления действием эквивалентной радиальной нагрузки $q = p r \operatorname{ctg} \theta_0$, приложенной к кольцу, выражение для работы внешних сил имеет вид

$$A = q \Omega, \quad \Omega = \frac{1}{2} \int (\bar{v}_{\kappa_1}^2 + \bar{w}_{\kappa_1}^2 + 2 \bar{w}_{\kappa_1} \frac{d\bar{v}_{\kappa_1}}{dy}) dy$$

где Ω - изменение площади, ограниченной контуром кольца при выпучивании; $\bar{v}_{\kappa_1}$, $\bar{w}_{\kappa_1}$ - дополнительные смещения кольца.

В обоих случаях анализ точного и приближенного решений выполнялся для бифуркационных смещений кольца, задаваемых в форме

$$\bar{v}_{\kappa_1} = B_{\kappa} \sin n y, \quad \bar{w}_{\kappa_1} = C_{\kappa} \cos n y$$

Оценка порядка отдельных слагаемых функционала /9/, произведенная в работе для обоих вариантов решения, позволила установить справедливость замены точного решения приближенным для задач устойчивости реальных конструкций, у которых выпучивание торцевых колец происходит с образованием большого числа полу-волн.

На основе приближенного подхода, в работе вычислены крити-

ческие нагрузки колец цилиндрического резервуара, исходя из дифференциального уравнения устойчивости кольца, как криволинейного стержня на упругом основании. Жесткостные свойства основания для такого стержня определяются характером конструкции и задаются в виде упругих реакций оболочек.

Численные результаты приближенного решения, представленные в работе серией графиков, показывают, что критические напряжения сжатия колец цилиндрической оболочки со сферическими днищами существенно выше критических напряжений изолированного кольца и, как правило, близки к пределу упругости материала.

Для оценки погрешности, связанной с заменой реальной оболочки безмоментной расчетной моделью, рассмотрена частная задача об устойчивости равномерно сжатого упругого кольца, сопряженного с двумя моментными полусферами. На данном примере тонкостенной конструкции показано слабое влияние изгибной жесткости оболочки на величину критической нагрузки кольца.

В конце второй главы рассматривается устойчивость длинной цилиндрической оболочки при кручении с учетом начальной деформации сдвига.

Эта задача обобщает на случай тонкой оболочки известное решение А.Гринхилла для гибкого стержня, теряющего прямолинейную форму равновесия при скручивании торцов крутящими моментами.

Изучению выпучивания гибких стержней и цилиндрических оболочек при кручении без учета начальных смещений и с учетом исходной геометрии посвящены работы С.П.Тимошенко, В.Флюгге, Е.Шверина, Е.Л.Николаи, Р.Граммеля, Г.Циглера, Е.Треша, С.П.Вязьменского, В.М.Даревского.

В диссертации для тонкой цилиндрической оболочки, напряженное состояние которой остается безмоментным, как в докритическом состоянии, так и после искривления оси цилиндра, приводится точное решение задачи о выпучивании при кручении с учетом конечных докритических перемещений срединной поверхности

$$u_0 = - \left(1 - \sqrt{1 - R^2 \tau^2} \right) x, \quad v_0 = R \sin \tau x$$

$$w_0 = - R (1 - \cos \tau x)$$

Здесь R , x - радиус и осевая координата цилиндра; τ - конечный погонный угол закручивания оболочки.

Уравнения устойчивости для безмоментных форм выпучивания, отвечающие пространственному искривлению оси цилиндра, получены энергетическим методом, путем варьирования функционала

$$A^{(2)} = \iint (\sigma_{11}' \varepsilon_{11}' + \sigma_{22}' \varepsilon_{22}' + \sigma_{12}' \varepsilon_{12}' + 2 \sigma_{12}^0 \varepsilon_{12}'') R dy dx$$

где

$$\varepsilon_{11}' = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

.....

$$\varepsilon_{12}'' = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - v_1 \right) \right]$$

σ_{11}' , σ_{22}' , σ_{12}' - дополнительные напряжения, отвечающие деформациям ε_{11}' , ε_{22}' , ε_{12}' ; $\sigma_{12}^0 = M/2\pi R^2 h$; M - приложенный крутящий момент.

При конечных углах закручивания длинной цилиндрической оболочки учет докритических смещений приводит к дифференциальным уравнениям нейтрального равновесия с переменными коэффициентами относительно дополнительных перемещений u_1 , v_1 , w_1 .

В настоящей работе, путем введения вместо упомянутых компонентов перемещений некоторых вспомогательных функций

$$u^* = u_1 \sqrt{1 - R^2 \tau^2}$$

$$v^* = v_1 \cos \tau x - w_1 \sin \tau x$$

$$w^* = v_1 \sin \tau x + w_1 \cos \tau x$$

уравнения устойчивости удалось свести к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Функции

куса, Б.Е.Гейтвуда, И.И.Гольденבלата и Н.А.Николаенко. Задачи устойчивости неравномерно нагретых прямоугольных пластин и пластин с неоднородным распределением напряжений рассматривались А.И.Дурье, Е.Паркусом, М.С.Ганеевой, Б.Г.Газизовым, Р.А.Ададу-ровым, П.М.Огибаловым, В.Ф.Грибановым. Исследования потери устойчивости круглых и кольцевых пластин содержатся в работах А.Н.Динника, Е.Мейсснера, Э.И.Григолюка, В.М.Макушина, Е.Мэнс-филда, А.Д.Лизарева, Г.Н.Бареевой.

В первом разделе данной главы изучается распределение тепловых напряжений в неограниченной полосе под действием разрывного температурного поля, постоянного по ширине и скачкообразно изменяющегося по длине пластины. Эта задача является родственной задачам о термическом включении для составных равномерно нагретых тел, отдельные части которых обладают одинаковыми упругими свойствами, но различными коэффициентами теплового расширения.

Рассмотрение в задачах механики вместо действительного распределения температур разрывных температурных полей дает простейшую модель явления локального нагрева. Хотя подобная идеализация температурного поля приводит к появлению разрывов непрерывности компонентов напряженно-деформированного состояния, замена действительных температур некоторыми разрывными функциями позволяет использовать для решения хорошо разработанный математический аппарат и путем расчета установить характер распределения возникающих тепловых напряжений.

Анализ напряженного состояния для неограниченной полосы выполнен в работе, исходя из уравнений плоской задачи теории упругости, с привлечением аппарата интеграла Фурье. Исследован характер особенностей напряженного состояния на линиях разрыва температурного поля. Вычисления компонентов напряжений доведены до числовых результатов и представлены графически.

В последующих разделах третьей главы получены некоторые точные решения для задач осесимметричного выпучивания круглых и кольцевых пластин на упругом основании и при неоднородном распределении напряжений. Решение задач такого рода сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения четвертого

порядка с переменными коэффициентами

$$\Delta \nabla_1^2 \nabla_1^2 w + \kappa w = \frac{h}{z} \frac{d}{dz} \left(z G_z \frac{dw}{dz} \right), \quad \nabla_1^2 = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \quad (11)$$

Здесь w -прогиб; G_z , h , z -радиальные напряжения, толщина и текущий радиус пластины; Δ -цилиндрическая жесткость; κ -жесткость упругого основания.

Для радиального сжатия, допускающего представление в виде разложения

$$G_z = - \sum_{n=-2}^{\infty} A_n z^n$$

получено общее решение дифференциального уравнения устойчивости /II/ в обобщенных степенных рядах.

Рассмотрена потеря устойчивости пластины на упругом основании при действии поля напряжений

$$A_{-2} \neq 0, \quad A_{-1} = A_0 = A_1 = \dots = 0; \quad G_z = -A_{-2} z^{-2} \quad (12)$$

соответствующего локальному нагреву поверхности мгновенным точечным источником тепла. Распределение напряжений в форме /12/ имеет место также при нагружении неограниченной пластины с отверстием радиальными сжимающими усилиями, приложенными к внутреннему контуру.

Фундаментальная система частных решений дифференциального уравнения устойчивости /II/ для напряженного состояния /12/ имеет вид

$$V_1(z) = z^2 \left(1 + \sum_{\nu=4,8,\dots}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \right), \quad V_2(z) = 1 + \sum_{\nu=4,8,\dots}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}$$

$$V_3(z) = \Omega(z) \cos(\beta \ell n z) - \psi(z) \sin(\beta \ell n z)$$

$$V_4(z) = \Omega(z) \sin(\beta \ell n z) + \psi(z) \cos(\beta \ell n z)$$

где $z = \mu z$ - вспомогательная переменная; $\mu^2 = \kappa/\Delta$; $\beta^2 = (A_2 h/\Delta) - 1$.
 Функции $\Omega(z)$, $\Psi(z)$ вычисляются по формулам

$$\Omega(z) = z \left[1 + \sum_{\nu=4,8,\dots}^{\infty} (A_{\nu} \cos \alpha_{\nu}) z^{\nu} \right], \quad \Psi(z) = z \sum_{\nu=4,8,\dots}^{\infty} (A_{\nu} \sin \alpha_{\nu}) z^{\nu}$$

Здесь a_{ν} , b_{ν} , A_{ν} , α_{ν} - коэффициенты, представляющие собой функции номера члена ряда ν и параметра внешней нагрузки β .

Для защемленной по внутреннему и наружному контуру кольцевой пластины на упругом основании, находящейся под действием неоднородного радиального сжатия /12/, в работе приводятся числовые результаты определения критических значений параметра β .

Показано, что при любой отличной от нуля жесткости упругого основания можно выбрать такие значения относительных размеров кольцевых пластин, начиная с которых параметр критических напряжений не зависит от их размеров. Начиная с этих значений, критические напряжения, вычисленные для пластин конечных размеров и для неограниченных пластин практически совпадают.

Исследованы предельные случаи выпучивания пластин, относящиеся к пластинам неограниченных размеров. Установлено, что постановка задач о выпучивании при локальном нагреве неограниченных пластин, не связанных с упругим основанием, приводит к нарушению классического определения устойчивости, содержащего понятие смежных бесконечно близких форм равновесия.

Решена задача о термическом выпучивании круглой пластины при неравномерном распределении температур

$$t(z) = \begin{cases} T & (0 \leq z \leq a) \\ 0 & (a \leq z \leq b) \end{cases} \quad (13)$$

Температурному полю /13/ соответствуют сжимающие напряжения

$$\sigma_z = \begin{cases} -A_0 & (0 \leq z \leq a) \\ -A_2 z^{-2} & (a \leq z \leq b) \end{cases}$$

Здесь a - радиус области нагрева; $2b$ - диаметр пластины;
 $A_0 = A_2 a^{-2} = (1/2) \alpha T E$.

Решение поставленной задачи, найденное без учета жесткости упругого основания, сводится к интегрированию дифференциального уравнения Бесселя для внутренней области $0 \leq z \leq a$

$$\frac{d^2 \theta_1}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\theta_1}{ds} + \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \theta_1 = 0 \quad (14)$$

и сопряжению общего интеграла уравнения /I4/ на линии $z = a$ с решением уравнения Эйлера для внешней области пластины $a \leq z \leq b$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta_2}{dz} - \frac{1}{z^2} \theta_2 = 0 \quad (15)$$

Условия сопряжения решений дифференциальных уравнений /I4/, /I5/ выражаются равенствами

$$z = a \quad \theta_1 = \theta_2, \quad d\theta_1/dz = d\theta_2/dz$$

В формулах /I4/, /I5/ θ_1, θ_2 - углы поворота нормали к срединной плоскости; $s = (z/a) \sqrt{1 + \gamma^2}$; $\gamma^2 = (\alpha T E a^3 h / 2D) - 1$.

Для пластины защемленной по краю приводятся результаты вычисления критических температур в функции отношения радиусов a/b .

Рассмотрена устойчивость кольцевой пластины конечных размеров под действием постоянной погонной нагрузки приложенной к ее внутреннему контуру.

Эта задача, впервые поставленная А.Н.Динником, возникает при посадке тонкого равномерно нагретого диска с отверстием на холодный вал.

Для неограниченной пластины А.Н.Диннику не удалось получить критического значения внешней нагрузки, и он сделал вывод, что единственным решением в данном случае является плоская форма равновесия пластины.

В диссертации получено точное решение данной задачи, исходя из распределения радиальных напряжений

$$\sigma_z = -(A_0 + A_{-2} z^{-2}), \quad A_0 = -\frac{q a^2}{(1-a^2)h}, \quad A_{-2} = \frac{q a^2}{(1-a^2)h}, \quad a^2 = \frac{a}{b}$$

Здесь a , b - размеры кольцевой пластины ($b > a$); q - погонное сжатие, приложенное к окружности $z = a$.

Дифференциальное уравнение устойчивости для осесимметричной формы выпучивания диска имеет вид

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\theta}{dt} - \left(1 + \frac{v^2}{t^2}\right) \theta = 0, \quad t = \frac{z}{b} \sqrt{1-v^2}, \quad v^2 = 1 - \frac{q a^2}{\Delta (1-a^2)}$$

Указанное уравнение интегрируется в модифицированных цилиндрических функциях первого и второго рода

$$\theta = C_1 I_\nu(t) + C_2 K_\nu(t)$$

$$I_\nu(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{\nu+2\kappa}}{\Gamma(\kappa+1) \Gamma(\nu+\kappa+1)}, \quad K_\nu(t) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_\nu(t) - I_\nu(t)}{\sin \nu \pi} \right]$$

Здесь $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Неизвестный параметр внешней нагрузки ν содержится при аргументах цилиндрических функций и их индексах. Для произвольных значений ν , характерных для данной задачи, функции I_ν , K_ν не табулированы.

Действительным критическим значениям внешней нагрузки для защемленной по краям кольцевой пластины отвечают чисто мнимые корни характеристического определителя

$$\begin{vmatrix} I_\nu(a^2 \sqrt{1-v^2}) & K_\nu(a^2 \sqrt{1-v^2}) \\ I_\nu(\sqrt{1-v^2}) & K_\nu(\sqrt{1-v^2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

В работе приведены числовые значения критических усилий кольцевой пластины, вычисленные по уравнению /16/.

В четвертой, заключительной главе диссертации рассматриваются вопросы устойчивости прямых и криволинейных стержней в упруго-пластической стадии и при упругих деформациях с учетом эффекта кривого бруса.

Основные результаты при исследовании неупругой устойчивости гибких стержней были получены Ф.Энгессером, Ф.Ясинским, Т.Карманом, Р.Саусвеллом, Ф.Р.Шэнли. Дальнейшее развитие теории устойчивости сжатых стержней за пределом упругости содержится в работах К.Ф.Пирсона, С.Б.Батдорфа, Ю.Н.Работнова, А.Пфлюгера, Э.Стоуэлла, П.Цикала, Я.Г.Пановко, Н.Хоффа, Ю.Р.Лепика, И.С.Малютина, В.Г.Зубчанинова, Г.В.Иванова, В.Д.Клюшников, В.И.Ванько, С.В.Симонова. Общим вопросам упруго-пластического равновесия и движения посвящены исследования Д.Друккера, Е.Оната, Л.М.Качанова, А.А.Ильюшина, Р.Хилла, В.В.Болотина.

В диссертации задача об устойчивости упруго-пластического стержня рассматривается в постановке Ф.Р.Шэнли, согласно которой наименьшее критическое значение осевой сжимающей силы реализуется при условии непрерывного возрастания внешней нагрузки в процессе выпучивания. Изучается бифуркация форм равновесия стержня при продолжающемся нагружении.

Решение получено, исходя из предположения о равновесности процесса деформирования за пределом упругости, с учетом действительного положения границы, разделяющей упругую и пластическую области в процессе потери устойчивости.

Уравнения изгиба стержня в закритическом состоянии получены вариационным методом и обобщают уравнения эластики Эйлера на случай упруго-пластической деформации. Указанные уравнения имеют вид

$$P_1 - P + \frac{B}{C} \frac{du}{ds} = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(K \frac{d\theta}{ds} \right) + P_1 \sin \theta = 0$$

$$B = B(s) = v \left[E_1 (h+c)^2 - E_2 (h-c)^2 \right]$$

$$K = K(s) = \frac{v}{3} \left[E_1 (h+c)^2 (2h-c) + E_2 (h-c)^2 (2h+c) \right] \quad (12)$$

Здесь P_1 - текущее значение сжимающей силы; P - величина внешней нагрузки в момент искривления стержня; $\sin \theta = dw/ds$; $u(s)$, $w(s)$ - бифуркационные смещения стержня; s - длина дуги недеформированной оси стержня; E_1 , E_2 - модуль упругости и касательный модуль материала; b , h - размеры прямоугольного поперечного сечения стержня; $c=c(s)$ - уравнение границы областей активной пластической деформации и разгрузки.

В соответствии с концепцией продолжающегося нагружения, внешняя сила P_1 в уравнениях /I7/ считается неизвестной возрастающей функцией сближения концов стержня

$$\Delta = l - \int_{-l/2}^{+l/2} \left(\frac{du}{ds} + \cos \theta \right) ds$$

Предполагается, что эта функция допускает разложение в степенной ряд

$$P_1 = P + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \Delta^n$$

где θ_n - неопределенные коэффициенты.

Использование представления переменной сжимающей силы в форме степенного ряда с неопределенными коэффициентами дает возможность математической реализации концепции продолжающегося нагружения и позволяет, в частности, линеаризировать исходные уравнения равновесия /I7/.

Приближенное решение линеаризованного варианта уравнений /I7/ методом Бубнова-Галеркина для бифуркационных смещений

$$u(s) = -u_0 \left(1 + \sin \frac{\pi s}{l} \right), \quad w(s) = w_0 \cos \frac{\pi s}{l}$$

приводит к зависимостям

$$f(c^0, s^0, \alpha) = \frac{\alpha c^0}{(1+c^0)^2 - \nu (1-c^0)^2} - \cos \pi s^0 = 0 \quad (20)$$

$$P^{\circ} = \frac{1}{2\nu} T(\alpha), \quad T(\alpha) = \int_{-1/2}^{+1/2} K^{\circ}(s^{\circ}; \alpha) \cos^2 \pi s^{\circ} ds^{\circ} \quad (21)$$

Здесь α -неопределенный параметр, связанный с коэффициентом разложения ν_1 /18/ и амплитудами бифуркационных смещений u_0 , w_0 ; $K^{\circ} = 3K/6h^3E_1$; $s^{\circ} = s/\ell$; $c^{\circ} = c(s)/h$; $\nu = E_2/E_1$; $P^{\circ} = P/P^*$, $P^* = 4\pi^2 6h^3 E_2 / 3\ell^2$.

Трансцендентное уравнение /20/ с параметром α , полученное из первого уравнения равновесия системы /17/, в неявной форме определяет семейство кривых, разделяющих упругую и пластическую зоны стержня.

Равенства /21/ являются результатом интегрирования второго уравнения системы /17/ и дают возможность вычислить критическую силу стержня в функции того же неопределенного параметра.

Минимальное значение критической силы реализуется из условия относительного минимума интеграла $T(\alpha)$ в интервале изменения $0 \leq \alpha \leq 4\nu$ и соответствует касательно-модульной нагрузке.

Характер ветвления равновесных форм в окрестности точки бифуркации исследован в работе путем асимптотического решения нелинейных уравнений упруго-пластического равновесия /17/.

Установлено, что при сжимающих силах близких к касательно-модульной нагрузке упругое ядро стержня, ограниченное линией $c(s)$ /20/, вырождается в эллиптическую область с полуосями, зависящими от осевого сжатия и амплитуды углов поворота сечений стержня.

Показано, что в точке бифуркации на кривой $w = w(P_1)$ имеет место ветвление форм равновесия упруго-пластического стержня при $dw/dP_1 \neq 0$. Значения производной dw/dP_1 в этой точке совпадают с результатами А.Пфлюгера и С.В.Симеонова.

На основе результатов полученных для сжатого стержня, в работе рассмотрена родственная задача об устойчивости упруго-пластического равновесия кругового кольца под действием возрастающего гидростатического давления.

Уравнения изгиба кольца, разделенного на упругие и пластические зоны, в закритическом состоянии получены, исходя из принципа

минимума полной энергии в форме, принятой в деформационной теории пластичности. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dM}{ds} \left(\frac{1}{R} - \theta' \right) + \frac{dN}{ds} = 0, \quad N \left(\frac{1}{R} - \theta' \right) - \frac{d^2 M}{ds^2} = -q_1, \quad (22)$$

где

$$N = -qR + \frac{B(s)}{c(s)} \varepsilon, \quad M = -K(s) \theta' \left(-\frac{\pi R}{4} \leq s \leq +\frac{\pi R}{4} \right);$$

q_1 , q - значения гидростатического давления в закритическом состоянии и при бифуркации.

При составлении функционала энергии использованы конечные геометрические соотношения для деформированного элемента кольца, найденные в работе

$$\varepsilon_z = \varepsilon + z \varkappa, \quad \varepsilon = e + \frac{1}{2} (e^2 + \gamma^2), \quad \varkappa = - \frac{d\theta}{ds}$$

$$1+e = \cos \theta, \quad \gamma = \sin \theta, \quad e = \frac{d\psi}{ds} + \frac{\psi}{R}, \quad \gamma = \frac{d\omega}{ds} - \frac{\psi}{R}$$

Здесь ω , ψ - нормальные и касательные смещения нейтральной линии.

Решения уравнений нейтрального равновесия, полученных путем линеаризации соотношений /22/, разбиваются в форме, учитывающей перемещения изгиба и всестороннего сжатия при бифуркации

$$\psi = \psi_0 \sin \frac{2s}{R} + \psi_*(s), \quad \omega = \omega_0 \cos \frac{2s}{R} + \omega_*(s) \quad (23)$$

В формулах /23/ ψ_* , ω_* - дополнительные смещения упруго-пластического кольца при равномерном внешнем давлении, как криволинейного стержня переменной жесткости.

При решении задачи устойчивости кольца с учетом действительного расположения границы упругой и пластической зон показано, что критическая величина гидростатического давления при продол-

жащемся нагружении соответствует касательно-модульной нагрузке.

В заключение четвертой главы приводится решение задачи об устойчивости упругого кругового кольца под действием равномерного гидростатического сжатия, с учетом эффекта кривого бруса.

Решение данной задачи получено энергетическим методом и представлено в форме

$$q_{\kappa} = \frac{ES \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right)^2 - 2 \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) \left(\frac{dw}{d\varphi} + v \right) + \frac{FR}{S} \left(\frac{dw}{d\varphi} + w \right)^2 \right] d\varphi}{\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{z} \left[\left(\frac{dw}{d\varphi} + w \right)^2 + \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right)^2 - w^2 - v^2 - 2w \frac{dv}{d\varphi} \right] \right\} d\varphi}$$

Здесь F , S - площадь и статический момент сечения кольца; E - модуль упругости материала; R - радиус окружности центров тяжести; z - радиус нейтральной линии кривого бруса; α - радиус окружности, к которой приложена внешняя нагрузка; q_{κ} - критическое значение погонного сжатия.

Для формы выпучивания $v = A_1 \sin n\varphi$, $w = A_2 \cos n\varphi$ и случая, когда внешняя нагрузка приложена к нейтральной линии кольца, приближенное выражение для критического сжатия имеет вид

$$q_{\kappa} = \frac{(n^2 - 1) EJ}{R^3 (1 + \beta)} \left[1 - \frac{\beta}{(1 + \beta) - (n^2 - 1)\beta} \right],$$

где $\beta = \mathcal{I} / FR^2$; $\mathcal{I}$ - момент инерции сечения.

Полученное решение обобщает известный результат М. Леви на случай нелинейного распределения напряжений по высоте сечения кольца.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Получены основные уравнения для простейшего варианта геометрически нелинейной теории непологих оболочек, построенного на допущениях о малости деформаций срединной поверхности по сравнению с поворотами и пренебрежении поворотом элемента оболочки относительно нормали.

Уравнения включают исходные геометрические соотношения, составленные на основе гипотезы Кирхгофа-Лява; уравнения равновесия и нелинейные силовые граничные условия, формулируемые для произвольного гладкого граничного контура; соотношения упругости, найденные из условия существования упругого потенциала; энергетическое условие устойчивости и дифференциальные уравнения нейтрального равновесия.

Предлагаемые уравнения непологих оболочек относительно просты по своей структуре, пригодны для решения неклассических задач упругой устойчивости и используются при создании машинных алгоритмов расчета тонкостенных конструкций.

2. Исследовано напряженное состояние и устойчивость элементов тонкостенных конструкций для контактных задач сопряжения оболочек вращения с упругими кольцами и ребрами. Решения

получены для безмоментных, полубезмоментных и моментных расчетных моделей.

Дана постановка контактных задач безмоментной теории оболочек вращения с привлечением вариационного метода. Рассмотрены изгиб и устойчивость колец цилиндрического резервуара со сферическими днищами. Произведен энергетический анализ приближенных решений в задачах устойчивости колец резервуара. Методами теории полых оболочек и полубезмоментной теории исследованы температурные напряжения в цилиндрической оболочке, подкрепленной продольными ребрами. Изучено влияние кольцевого сжатия на изгиб цилиндрической оболочки в кольцевом направлении. Рассмотрена устойчивость длинной цилиндрической оболочки при кручении с учетом начальной деформации сдвига.

Решения перечисленных контактных задач и задач устойчивости оболочек, связанных с практическими расчетами тонкостенных пространственных систем, доведены до числовых результатов и подробно иллюстрированы графически.

3. Найдены точные решения некоторых задач термоупругости и устойчивости пластин при неоднородном поле напряжений.

Получено общее решение дифференциального уравнения устойчивости круглой пластины на упругом основании для осесимметричных форм выпучивания и неоднородного напряженного состояния. Решены задачи устойчивости круглых и кольцевых пластин при локальном нагреве с учетом и без учета жесткости упругого основания. Рассмотрена потеря устойчивости нагретого тонкого диска при посадке на холодный вал. Изучено распределение тепловых напряжений в неограниченной полосе при местном нагреве.

Результаты исследования напряженного состояния и устойчивости пластин представлены в форме, удобной для практического использования.

4. Рассмотрены задачи устойчивости прямых и криволинейных стержней в упруго-пластической стадии и при упругих деформациях.

Исследован характер бифуркации форм равновесия сжатого упруго-пластического стержня при потере устойчивости в условиях продолжающегося нагружения, с учетом действительного положения гра-

ницы, разделяющей упругую и пластическую области в процессе потери устойчивости. В той же постановке решена задача о выпучивании упруго-пластического кольца при однородном сжатии. В задаче об устойчивости сжатого кругового кольца при упругих деформациях решение получено с учетом эффекта кривого бруса.

При решении задач устойчивости упруго-пластического равновесия предложен новый подход к практической реализации концепции продолжающегося нагружения.

Основное содержание диссертации отражено в работах автора:

1. Контактные задачи сопряжения безмоментных оболочек вращения с упругими кольцами. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 4 /совместно с Л.И.Балабухом/.

2. Об устойчивости сжатого кругового кольца при нелинейном законе распределения напряжений в его сечениях. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 4.

3. Исследование температурных напряжений в цилиндрической оболочке подкрепленной продольными ребрами. В Сб. Расчеты на прочность, Вып. 12, Машиностроение, М., 1966 /совместно с Л.И.Балабухом/.

4. Некоторые задачи устойчивости круглых пластин при неоднородном напряженном состоянии. Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1966, № 5 /совместно с Л.И.Балабухом/.

5. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1968, № 1.

6. Основные соотношения геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Всес. конференция по проблемам устойчивости в строит. механ. /Каунас, 13-15 июня 1967 г./, Тезисы докладов, Вильнюс, 1967. РЖ Механика 1В33, 1968.

7. Об учете начальной деформации сдвига в задаче устойчивости длинной цилиндрической оболочки при кручении. Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1969, № 3 /совместно с Л.И.Балабухом/.

8. О бифуркации форм равновесия упруго-пластического стержня и кольца в условиях продолжающегося нагружения. Прикладная математика и механика, том 35, 1971, № 2.

9. Об одной простейшей модели упруго-пластического стержня в условиях продолжающегося нагружения. IV Всес. конференция по проблемам устойчивости в строит. механ. /Харьков, 12-15 сентября 1972 г./, Тезисы докладов, Москва, 1972. РЖ Механика I2B366, 1972.