На правах рукописи



Рятина Евгения Павловна

Быстрые алгоритмы для вихревых методов моделирования плоских течений

Специальность 1.2.2 —
Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Марчевский Илья Константинович**

Официальные оппоненты: **Сетуха Алексей Викторович,** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», Научно-исследовательский вычислительный центр, ведущий научный сотрудник

Нуриев Артем Наилевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, кафедра механики сплошных сред, профессор

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Защита состоится 22 декабря 2026 года в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.331.05 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.331.05,
кандидат технических наук, доцент А.В. Аттетков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Расчет нестационарных нагрузок, действующих на обтекаемые тела, необходим при исследовании колебаний конструкций в потоке жидкости или газа, проектировании ветроэнергетических установок и моделировании движения подводных аппаратов. Бессеточная лагранжева природа вихревых методов вычислительной гидродинамики, используемых для моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости и определения действующих на обтекаемые профили аэрогидродинамических нагрузок, делает их удобными для расчета внешнего обтекания профилей, включая подвижные или деформируемые, и решения сопряженных задач гидроупругости. Развитие вихревых методов связано с работами С.М. Белоцерковского и И.К. Лифанова по методу дискретных вихрей и его математическому обоснованию, а также исследованиями A. Chorin, A. Leonard, G.-H. Cottet и P. Koumoutsakos в области численного моделирования несжимаемых течений. Одной из эффективных модификаций вихревых методов является метод вязких вихревых доменов Г.Я. Дынниковой, реализованный И.К. Марчевским, К.С. Сокол и Е.П. Рятиной в программном комплексе VM2D с открытым исходным кодом.

Моделирование нестационарных течений требует выполнения большого числа шагов расчета по времени. На каждом шаге выполняются различные трудоемкие операции: расчет поля скоростей, формирование правой части линейной системы, являющейся дискретным аналогом граничного интегрального уравнения, ее прямое или итерационное решение, а также набор вспомогательных процедур (поиск соседей, реструктуризация вихревого следа, контроль проникновения частиц внутрь профилей). Во многих инженерных приложениях требуется проведение серии нестационарных расчетов, например, при исследовании зависимости аэрогидродинамических характеристик от параметров движения и формы профиля; при решении задач оптимизации в различных постановках; при использовании метода плоских сечений, когда характеристики протяженной конструкции определяются по совокупности двумерных расчетов для набора ее поперечных сечений. В этих случаях время выполнения одного расчета непосредственно определяет возможность проведения всего вычислительного эксперимента за приемлемое время. Повышение точности моделирования, как правило, требует увеличения степени дискретизации течения: числа вихревых частиц, моделирующих распределение завихренности, и панелей, аппроксимирующих обтекаемую границу, а также уменьшения шага по времени. При непосредственной реализации основные операции вихревого метода имеют квадратичную/билинейную зависимость от параметров дискретизации. В T-схемах, предложенных В.С. Моревой, К.С. Сокол и И.К. Марчевским для моделирования обтекания профилей, необходим учет взаимодействий не только точечных

вихревых частиц, но и распределенных по панелям слоев вихрей и источников, причем вычислять их влияние необходимо как в отдельных точках, так и интегрально по контрольным панелям. В результате вычислительно трудоемкие операции не сводятся только к классической задаче типа N тел. Известные быстрые алгоритмы квазилинейной вычислительной сложности, восходящие к методу Барнса — Хата и быстрому методу мультиполей, предложенному L. Greengard и V. Rokhlin, позволяют существенно снизить трудоемкость решения задачи типа N тел, однако их применение к одной лишь операции расчета взаимного влияния точечных вихревых частиц не решает проблему вычислительной сложности для остальных трудоемких операций алгоритма. Поэтому актуальной является задача разработки подхода, позволяющего использовать общую иерархическую структуру данных и единый математический аппарат при приближенном вычислении влияний для различных типов взаимодействующих объектов в вихревом методе с возможностью применения той же иерархической структуры для выполнения вспомогательных операций. Особое значение имеет создание программных реализаций алгоритмов для эффективного использования возможностей современных многоядерных центральных процессоров и графических ускорителей, архитектурные особенности которых требуют различной организации процедур построения и обработки иерархических структур.

Степень разработанности темы. Быстрые алгоритмы для расчета вихревого влияния развивались в научной школе Е.Е. Тыртышникова, предложившего алгоритм быстрого матрично-векторного умножения для метода дискретных вихрей, а также в работах C.I. и M. Draghicescu, использовавших разложения для приближенного учета влияния удаленных групп частиц. Адаптации быстрых алгоритмов к вихревым методам посвящены работы G.S. Winckelmans, Г.Я. Дынниковой, Н.А. Гумерова и др.; вопросы эффективной реализации быстрых алгоритмов на графических ускорителях исследовались M. Burtscher и K. Pingali, R. Yokota и L.A. Barba. Вместе с тем ни один из известных подходов в существующем виде не отвечает совокупности требований новых расчетных схем повышенной точности, где важно обеспечить ускорение не отдельной операции с фиксированным типом взаимодействующих объектов, а снижение трудоемкости различных по математической природе блоков общего вычислительного алгоритма, включая вспомогательные операции геометрического поиска. Таким образом, исследование, направленное на разработку семейства быстрых алгоритмов квазилинейной вычислительной сложности для всех основных операций метода вязких вихревых доменов, их адаптацию к выполнению вычислений на CPU и GPU и их реализацию в программном комплексе VM2D, является актуальным и позволит повысить эффективность вихревых методов, делая возможным моделирование нестационарных двумерных вязких

течений с высоким разрешением, когда число вихревых частиц достигает нескольких миллионов.

Целью данной работы является разработка семейства быстрых алгоритмов для расчета вихревого влияния в методе вязких вихревых доменов для вычислений на CPU и GPU и их реализация в программном комплексе VM2D для решения двумерных задач гидродинамики и гидроупругости.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**.

1. Разработка и обоснование единого подхода для приближенного расчета различных типов дальнодействующих взаимодействий, которые возникают в алгоритме вихревого метода, включая влияние точечных вихревых частиц, распределенных слоев вихрей и источников, а также интегральное влияние вдоль панелей обтекаемых профилей.

2. Создание быстрого алгоритма квазилинейной вычислительной сложности на основе объединения идей метода Барнса — Хата и быстрого метода мультиполей для основных операций вихревого метода, включая расчет конвективных скоростей вихревых частиц, формирование правой части системы линейных алгебраических уравнений и матрично-векторное умножение при ее итерационном решении. Исследование влияния параметров алгоритма на точность и вычислительную сложность.

3. Программная реализация и оптимизация разработанных алгоритмов для проведения расчетов на многоядерных центральных процессорах и графических ускорителях Nvidia с учетом особенностей их архитектуры. Интеграция разработанных модулей в программный комплекс VM2D для повышения эффективности решения задач гидродинамики и гидроупругости вихревыми методами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Предложен подход для приближенного расчета различных типов дальнодействующих взаимодействий в алгоритме вихревого метода, включая влияние точечных вихревых частиц, распределенных слоев вихрей и источников, а также интегральное влияние вдоль панелей профилей.

2. Разработано семейство быстрых алгоритмов квазилинейной вычислительной сложности, основанных на объединении идей метода Барнса – Хата и быстрого метода мультиполей. Они применимы ко всем вычислительно трудоемким операциям вихревого метода: расчету конвективных скоростей вихревых частиц, формированию правой части граничного интегрального уравнения и матрично-векторному умножению при его итерационном решении, поиску ближайших соседей, реструктуризации вихревого следа и контролю проникновения частиц внутрь профиля.

3. Созданы программные реализации алгоритмов для проведения расчетов на многоядерных процессорах и графических ускорителях.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в создании единого математического подхода к приближенному расчету различных типов дальнодействующих взаимодействий, возникающих в двумерных вихревых методах вычислительной гидродинамики. Разработанный подход позволяет использовать аппарат мультипольных и локальных разложений для выполнения всех основных операций метода вязких вихревых доменов. Практическая значимость работы определяется реализацией разработанных алгоритмов для проведения расчетов на многоядерных CPU и GPU в составе программного комплекса VM2D с открытым исходным кодом. Это позволяет многократно сократить время вычислений и объем затрачиваемой памяти при моделировании нестационарных течений с высоким разрешением.

Методы исследования. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: бессеточные лагранжевы методы вычислительной гидродинамики, теория граничных интегральных уравнений, теория мультипольных и локальных разложений, иерархические методы обработки пространственных данных, а также методы параллельных вычислений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Единый подход к приближенному расчету дальнодействующих взаимодействий в вихревом методе, включая влияние точечных вихревых частиц, распределенных слоев вихрей и источников, а также интегральное влияние вдоль панелей обтекаемых профилей.

2. Семейство быстрых алгоритмов квазилинейной вычислительной сложности, сочетающих идеи метода Барнса — Хата и метода мультиполей, для всех трудоемких операций в методе вязких вихревых доменов: расчета конвективных скоростей, формирования правой части и решения граничного интегрального уравнения, с возможностью их адаптации для выполнения вспомогательных операций.

3. Программные реализации разработанных алгоритмов для центральных процессоров и графических ускорителей Nvidia с архитектурно ориентированной оптимизацией.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечиваются строгостью используемого математического аппарата и подтверждаются сравнением результатов расчетов с теоретическими оценками, экспериментальными данными, а также результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на следующих всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах: Конференция по методам конечных элементов в задачах расчета течений «FEF» (Италия, Рим, 2017), Европейская конференция по вычислительной гидродинамике «ECFD» (Великобритания, Глазго, 2018), Всероссийский семинар с международным участием

по струйным, отрывным и нестационарным течениям (Санкт-Петербург, 2018), Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (Москва, 2018), Международная конференция «Particles» (Германия, Ганновер, 2017; Испания, Барселона, 2019), Международная конференция по методу граничных элементов «BEM/MRM» (Португалия, Коимбра, 2019), Конференция «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2019), Конференция «Параллельные вычислительные технологии» (Ростов-на-Дону, 2018; Калининград, 2019; Пермь, 2020), Международная конференция «Марчуковские научные чтения» (Новосибирск, 2020), Международная летняя школа-конференция «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2021), Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (Орел, 2021), Конференция «Методы аэрофизических исследований (ICMAR)» (Новосибирск, 2018, 2022), Открытая конференция ИСП им. В.П. Иванникова РАН «ISPRAS Open» (Москва, 2019 и 2022), Байкальская конференция «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (Иркутск, 2021, 2022), Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Кемеровская обл., 2023), Международная конференция «Математическое моделирование, численные методы и инженерное программное обеспечение» (Москва, 2023), Международная конференция по параллельной вычислительной гидродинамике «ParCFD» (Франция, Ницца, 2021; Мексика, Мерида, 2025), Научный семинар им. С.М. Белоцерковского (Москва, 2022, 2026).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проводимых в рамках гранта РНФ 17-79-20445, 17-79-20445п «Развитие эффективных численных методов расчета нестационарных аэрогидродинамических нагрузок для аэрогидробаллистического проектирования летательных аппаратов» и гранта РФФИ 18-31-20051 «Разработка новых алгоритмов моделирования обтекания профилей и решения сопряженных задач гидроупругости на основе вихревых методов и их эффективная программная реализация для ЭВМ различных архитектур».

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 16 научных статьях, в том числе в 15 статьях в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Личный вклад. Представленные в диссертации исследования выполнены лично соискателем. В диссертацию включены только принадлежащие соискателю материалы совместных публикаций; заимствованные фрагменты обозначены ссылками на соответствующие источники.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 111 наименований. Работа изложена на 150 страницах, содержит 38 иллюстраций и 7 таблиц.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в диссертационной работе, приведен обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулированы цель и задачи работы, а также положения, составляющие научную новизну и практическую значимость.

В первой главе сформулирована математическая постановка задачи моделирования двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости и выделены операции, определяющие вычислительную сложность алгоритма вихревого метода.

Течение вязкой несжимаемой жидкости постоянной плотности описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье — Стокса:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = \nu\, \Delta \boldsymbol{V} - \frac{\nabla p}{\rho},$$

где $\rho = \text{const}$ — плотность среды; p — давление; $\boldsymbol{V}$ — скорость; $\nu = \text{const}$ — кинематическая вязкость. Начальное поле скоростей считается известным. Граничные условия ставятся следующим образом: затухание возмущений на бесконечности и условие прилипания на обтекаемой поверхности.

В вихревых методах завихренность $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r},t) = \nabla \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$ — первичная расчетная величина; плоское течение жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}.$$

В рассматриваемых модификациях вихревых методов завихренность присутствует в двух различных формах: как распределение в области течения и как тонкие слои, расположенные на обтекаемой границе. Этим двум формам соответствуют различные дискретные представления: завихренность в области течения моделируется совокупностью N вихревых частиц, а граница профиля заменяется ломаной из M звеньев-панелей, на которых задаются распределенные слои (свободный и присоединенный вихревые слои и слой источников), Рисунок 1.

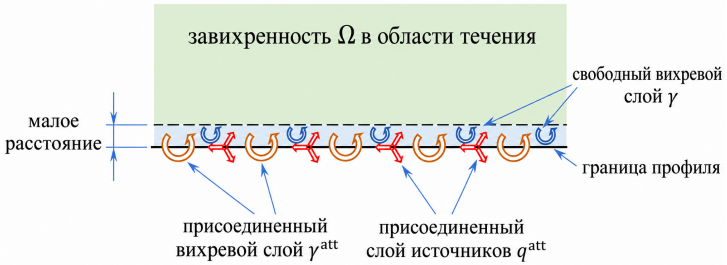


Рисунок 1 — Схематическое представление завихренности в области течения, распределений вихревых слоев и слоя источников на границе профиля

К основным трудоемким операциям вихревого метода, связанным с расчетом дальнодействующего влияния, относятся расчет скоростей вихревых частиц, формирование правой части и решение граничного интегрального уравнения.

Восстановление конвективной скорости требует учета влияния вихревых частиц, свободного вихревого слоя, а также присоединенных слоев вихрей и источников, интенсивности которых определяются движением границы. Соответствующее выражение имеет вид

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{V}_\infty + \boldsymbol{V}_\Omega + \boldsymbol{V}_\gamma + \boldsymbol{V}_q = \boldsymbol{V}_\infty + \sum_{w=1}^{N} \Gamma_w \left(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{Q}_\varepsilon(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_w)\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M}\sum_{q=0}^{m} \left[\gamma_j^q + \left(\gamma^{\text{att}}\right)_j^q\right] \int_{K_j} \left(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\xi})\right) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi})\, dl_\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M}\sum_{q=0}^{m} \left(q^{\text{att}}\right)_j^q \int_{K_j} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi})\, dl_\xi, \qquad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}}{2\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}|^2},$$

где $m = 0$ соответствует кусочно-постоянному способу представления распределенных по панелям величин (схема $\mathcal{T}^0$), а $m = 1$ — кусочно-линейному представлению (схема $\mathcal{T}^1$); φ_j^0 — постоянная базисная функция на j-й панели, φ_j^1 — линейная. Второе слагаемое в данном выражении, обусловленное влиянием вихревых частиц в области течения, соответствует взаимодействию «частица — точка», а два последних, обусловленных суммарным влиянием свободного и присоединенного вихревых слоев и присоединенного слоя источников, — взаимодействию «панель — точка».

Неизвестная интенсивность свободного вихревого слоя определяется из $\mathcal{T}$-модели — граничного интегрального уравнения (ГИУ), выражающего равенство касательных компонент скоростей на границе. Использование метода Галеркина приводит к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с заполненной матрицей, компоненты которой характеризуют интегральное влияние завихренности, расположенной на j-й панели, на i-ю контрольную панель, поэтому такое взаимодействие будем называть «панель — панель».

Компоненты правой части СЛАУ получаются в результате проецирования правой части ГИУ на базисные функции и включают в себя учет взаимодействий типа «частица — панель» и «панель — панель»:

$$b_i^p = \left(\int_{K_i} \left(\alpha(\boldsymbol{r})\boldsymbol{U}_K(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{V}_\infty\right) \varphi_i^p(\boldsymbol{r}) dl_r - \int_{K_i} \varphi_i^p(\boldsymbol{r}) \sum_{w=1}^{N} \Gamma_w \left(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_w)\right) dl_r - \right.$$
$$- \sum_{j=1}^{M}\sum_{q=0}^{m} \left(\gamma^{\text{att}}\right)_j^q \int_{K_i} \varphi_i^p(\boldsymbol{r}) \left[\int_{K_j} \left(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi})\right) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right] dl_r -$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{M}\sum_{q=0}^{m} \left(q^{\text{att}}\right)_j^q \int_{K_i} \varphi_i^p(\boldsymbol{r}) \left[\int_{K_j} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right] dl_r \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_i}{L_i}.$$

В результате все основные операции, связанные с расчетом влияния вихрей и источников, рассмотрены с общих позиций и сведены к четырем типам взаимодействий, различающихся представлением влияющих и контрольных объектов, и имеющих квадратичную/билинейную вычислительную сложность по параметрам дискретизации при непосредственной реализации.

Во второй главе представлен единый математический аппарат приближенного расчета вихревого влияния для всех рассматриваемых типов взаимодействия: влияния вихревых частиц и распределенных слоев в контрольных точках и интегрально по панелям. Снижение вычислительной сложности основных операций достигается за счет отказа от непосредственного перебора всех пар влияющих/контрольных объектов: влияние близко расположенных объектов вычисляется непосредственно и точно, а достаточно удаленные влияющие объекты объединяются в кластеры, суммарное влияние которых аппроксимируется с помощью мультипольных и локальных разложений.

При расчете взаимодействия типа «частица — точка» функция скорости, выражающая суммарное влияние N_{inf} вихревых частиц, находящихся во влияющем кластере, и вычисляемая в N_{ctr} контрольных точках, может быть записана в комплексной форме, ее разложение имеет вид

$$V^*_\Omega(r_i) = -\sum_{j=1}^{N_{\text{inf}}} \frac{\mathrm{i}\,\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{r_i - \xi_j} \approx -\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{k=0}^{P} E_k (\Delta r_i)^k, \quad i = 1, \ldots, N_{\text{ctr}},$$

где r_i — комплексное число, соответствующее положению контрольной точки; $\Delta r_i = r_i - r$ — положению i-й точки наблюдения в контрольном кластере относительно его центра; ξ_j — положению влияющей вихревой частицы; Γ_j — циркуляция j-й частицы; E_k — коэффициенты локального разложения, определяемые формулой

$$E_k = (-1)^k \sum_{p=0}^{P-k} C^k_{p+k} \frac{m^{(p)}}{\rho^{p+k+1}}, \qquad m^{(p)} = \sum_{j=1}^{N_{\text{inf}}} \Gamma_j \underbrace{(\xi_j - \xi)}_{\Delta\xi_j}{}^p, \qquad k, p = 0, \ldots, P,$$

где $\rho = r - \xi$ соответствует вектору, соединяющему центры кластеров; $m^{(p)}$ — мультипольные моменты, зависящие только от характеристик влияющего кластера с центром ξ; P — порядок разложения (настраиваемый параметр метода), при этом порядок локального разложения мультипольных слагаемых выбирается согласованно. Получены формулы для пересчета мультипольных моментов при изменении точки приведения.

Обоснована равномерная сходимость разложений для всех пар частиц и контрольных точек при выполнении условия

$$\max_j |\Delta\xi_j| + \max_i |\Delta r_i| < |\rho|,$$

имеющего ясный геометрический смысл: круги, содержащие контрольный и влияющий кластеры, не должны иметь общих точек.

При приближенном расчете взаимодействия типа «панель — точка» влияющими объектами являются прямолинейные панели с распределенными по ним слоями вихрей и/или источников. Получены аналитические выражения для мультипольных моментов прямолинейных панелей с постоянным и линейным распределениями интенсивностей слоев:

$$\mu_{\sigma,j}^{(p)} = \begin{cases} \sigma_j^0 \tau_j^p \dfrac{L_j^{p+1}}{2^p(p+1)}, & p = 0, 2, 4, \ldots, \\ \sigma_j^1 \tau_j^p \dfrac{L_j^{p+1}}{2^{p+1}(p+2)}, & p = 1, 3, 5, \ldots. \end{cases}$$

Здесь L_j — длина j-й панели; τ_j — соответствует орту касательной; σ_j^0, σ_j^1 — постоянная и линейная составляющие распределения вихрей или источников; в схеме $\mathcal{T}^0$ принимается $\sigma_j^1 = 0$.

Моменты отдельных панелей приводятся к центру влияющего кластера и суммируются; далее расчет влияния кластера панелей выполняется по тем же формулам, что и для вихревых частиц. Условие равномерной сходимости разложения имеет тот же вид, если при определении размеров влияющего кластера учитывать протяженность входящих в него панелей.

Когда контрольными объектами являются панели, требуется вычислять интегралы от функции влияния вдоль них. Получены аналитические выражения для интегралов от слагаемых локальных разложений с постоянным и линейным весом. Возникающие при этом коэффициенты определяются характеристиками контрольной панели и ее положением относительно центра кластера; они могут использоваться при расчете влияния как со стороны вихревых частиц, так и распределенных слоев. На их основе записаны формулы для расчета взаимодействий «частица — панель» и «панель — панель», необходимые при формировании правой части СЛАУ и выполнении матрично-векторного умножения в процессе ее итерационного решения.

В результате сформирован единый математический аппарат для приближенного расчета всех необходимых типов дальнодействующих взаимодействий: тип влияющего объекта учитывается при вычислении мультипольных моментов, а тип контрольного объекта — при работе с локальными разложениями. При этом переход между типами взаимодействий не требует изменения общей схемы обработки удаленных кластеров.

В третьей главе разработан иерархический быстрый алгоритм и представлены особенности его применения к основным трудоемким операциям вихревого метода, получена оценка вычислительной сложности алгоритма и исследовано влияние настраиваемых параметров метода на его точность и трудоемкость.

Иерархическая кластеризация объектов выполняется с помощью линейно-упорядоченного дерева ограничивающих объемов — LBVH. По объектам (вихревым частицам или панелям) вычисляются коды Мортона, после сортировки которых строится k-d дерево. Быстрый алгоритм

предполагает построение дерева, его однократный обход снизу вверх с вычислением характеристик ячеек и многократный обход сверху вниз для всех кластеров на контрольном уровне L_{tree} с определением ячеек, допускающих приближенный расчет влияния при выполнении критерия дальности

$$|\boldsymbol{\rho}| > \frac{h_{\text{inf}} + h_{\text{ctr}}}{\theta}, \qquad \theta \in (0, 2),$$

где $|\boldsymbol{\rho}|$ — расстояние между центрами влияющего и контрольного кластеров; h_{inf} и h_{ctr} — полупериметры их ограничивающих прямоугольников; θ — параметр, определяющий размер ближней зоны. При уменьшении θ возрастает доля взаимодействий, рассчитываемых непосредственно; при $\theta \to 0$ вся область рассматривается как ближняя зона и быстрый алгоритм фактически сводится к прямому расчету.

Для ячеек, удовлетворяющих критерию дальности, накапливаются коэффициенты локального разложения, и дальнейший спуск по соответствующей ветви дерева прекращается. Если внутренняя ячейка не удовлетворяет критерию, то рассматриваются ее дочерние ячейки; влияние листа, попавшего в ближнюю зону, вычисляется непосредственно.

Разработанный алгоритм имеет три настраиваемых параметра: параметр близости θ, порядок мультипольных и локальных разложений P и контрольный уровень L_{tree}. Первые два параметра определяют соотношение между точностью и вычислительной сложностью, последний практически не влияет на погрешность приближенного расчета, однако его удачный выбор позволяет существенно уменьшить сложность. Построена оценка вычислительной сложности алгоритма для расчета взаимного влияния вихревых частиц, которая хорошо согласуется с фактическим числом выполняемых операций. На основании этой оценки и результатов вычислительных экспериментов сформулированы рекомендации по рациональному выбору параметров алгоритма в зависимости от обеспечиваемой точности (Таблица 1) и количества объектов.

Таблица 1 — Значения параметра θ для различной длины разложений P и уровня погрешности δV, а также рекомендуемые значения P_{opt} и θ_{opt}

δV	$P = 2$	$P = 4$	$P = 8$	$P = 12$	P_{opt}	θ_{opt}
10^{-3}	$\theta_2 = 0.2$	$\theta_4 = 0.9$	$\theta_8 = 1.7$	$\theta_{12} = 1.9$	8	1.7
10^{-5}	$\theta_2 = 0.02$	$\theta_4 = 0.3$	$\theta_8 = 1.0$	$\theta_{12} = 1.3$	12	1.3
10^{-7}	$\theta_2 = 0.002$	$\theta_4 = 0.1$	$\theta_8 = 0.5$	$\theta_{12} = 0.9$	14	1.0

При расчете конвективных скоростей контрольное дерево строится по вихревым частицам; влияющим для составляющей $\boldsymbol{V}_\Omega$ является оно же, а для $\boldsymbol{V}_\gamma$ и $\boldsymbol{V}_q$ — дерево панелей. При формировании правой части СЛАУ контрольными объектами становятся панели; для них дополнительно выполняется интегрирование локального разложения с использованием интегральных коэффициентов.

При быстром матрично-векторном умножении в итерационном решении СЛАУ компоненты вектора, на который происходит умножение, интерпретируются как коэффициенты, определяющие плотность вихревого слоя на панелях. На каждой итерации пересчитываются мультипольные моменты, соответствующие этим плотностям. Положения панелей в пределах итераций на одном шаге по времени остаются неизменными, поэтому структура дерева, списки ближних панелей и дальних ячеек могут быть определены однократно. Для ближней зоны коэффициенты матрицы также вычисляются один раз и сохраняются; компоненты матрицы, соответствующие дальней зоне, напротив, в явном виде не формируются и не хранятся: их совокупное действие вычисляется в процессе обхода дерева через обновляемые мультипольные моменты и интегралы от локальных разложений. Таким образом, в памяти хранится только небольшая часть компонент (обычно — доли процента) и однократно вычисляемые величины, что снимает проблему хранения плотной матрицы. Предложенная процедура предобуславливания позволяет уменьшить число итераций обобщенного метода минимальных невязок GMRES примерно в 2 раза.

Построенная иерархическая структура также может быть использована для выполнения «вспомогательных» операций. Поиск k ближайших соседей, необходимый для расчета диффузионных скоростей и реструктуризации вихревого следа, выполняется с использованием эвристического алгоритма на основе упорядочивания кодов Мортона с несколькими сдвигами координат. Для контроля проникновения частиц внутрь профиля используется дерево панелей и алгоритм псевдонормалей для подвижных и/или деформируемых профилей, или алгоритм поиска пересечения траекторий частиц с панелями, который менее трудоемок, но применим лишь для неподвижных профилей. Мультипольные и локальные разложения в этих случаях не используются — достаточно лишь знать топологию дерева и ограничивающие прямоугольники его ячеек.

На Рисунке 2 представлена общая структура вычислительного конвейера для одного расчетного шага. Зеленым цветом отмечены наиболее трудоемкие операции метода, для которых был применен разработанный быстрый алгоритм; красным цветом отдельно выделен расчет диффузионных скоростей, не относящийся к расчету дальнодействующих влияний; синим цветом отмечены операции линейной вычислительной сложности, не являющиеся трудоемкими.

Таким образом, все вычислительно-трудоемкие блоки алгоритма вихревого метода удалось реализовать на основе общей иерархической структуры (LBVH-дерева) и схожих алгоритмов ее обхода, снизив их сложность с квадратичной до квазилинейной.

Четвертая глава посвящена особенностям программных реализаций разработанных быстрых алгоритмов для CPU и GPU, а также результатам вычислительных экспериментов при проведении расчетов

в программном комплексе VM2D. Основное внимание уделено программной реализации алгоритмов построения и обхода LBVH-деревьев, поскольку способы эффективной организации этих операций существенно зависят от используемой вычислительной архитектуры. Одним из существенных отличий GPU-реализации является отсутствие контрольного уровня L_{tree} в явном виде: при обходе сверху вниз каждое CUDA-ядро обрабатывает один контрольный объект, а решение о спуске по дереву принимается согласованно в пределах варпа. Кластеризация контрольных объектов на GPU происходит таким образом не алгоритмически, а на аппаратном уровне.



Рисунок 2 — Основные операции на расчетном шаге вихревого метода

При интеграции быстрых алгоритмов в программный комплекс VM2D были созданы универсальные классы, реализующие CPU- и GPU-функции и соответствующие структуры данных для работы с LBVH-деревом. При создании дерева задаются его назначение, тип объектов, а также используемая расчетная схема, Рисунок 3.

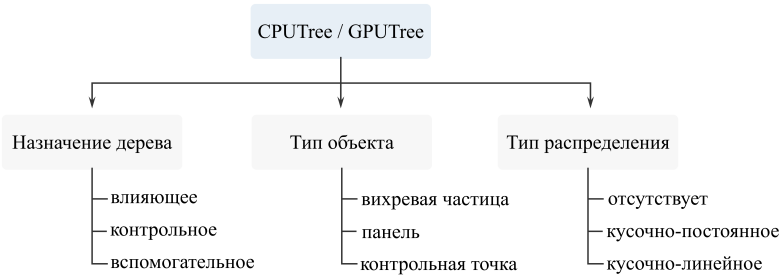


Рисунок 3 — Структура классов для LBVH-деревьев в VM2D

Для исследования эффективности программной реализации отдельных операций алгоритма рассмотрена задача о расчете обтекания двух неподвижных близко расположенных круговых профилей. Время построения дерева и его обхода снизу вверх при достаточно большом числе частиц возрастает линейно, а время расчета конвективных скоростей и правой части — квазилинейно. На GPU Nvidia H100 время построения дерева для 2 млн вихревых частиц составляет 0.5 мс, время обхода снизу вверх — 2 мс, расчет скоростей занимает 15 мс, а расчет правой части — 3 мс.

Для оценки производительности полной вычислительной процедуры VM2D с быстрыми алгоритмами рассмотрена задача моделирования обтекания неподвижного профиля крыла NACA-0012 при малых углах атаки и числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$ и $\mathrm{Re} = 10^5$. Зависимость времени выполнения одного шага от текущего числа вихревых частиц представлена на Рисунке 4.

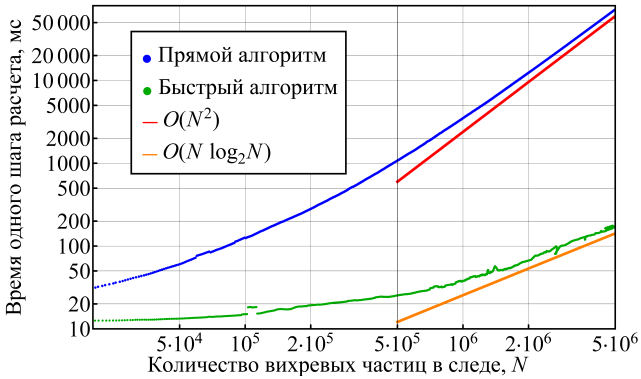


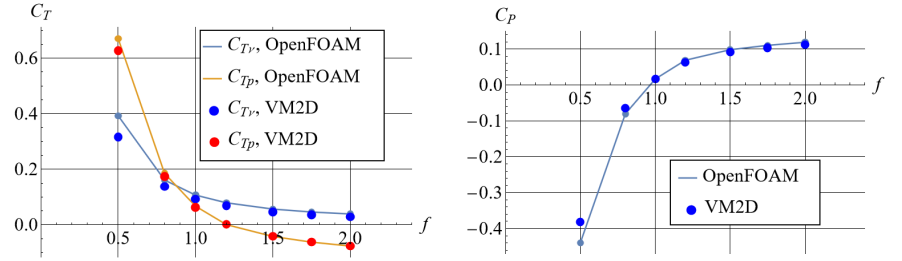
Рисунок 4 — Время выполнения одного шага расчета в VM2D

При достаточно больших значениях N для прямого алгоритма наблюдается квадратичная зависимость времени одного шага от количества частиц, тогда как для расчета с использованием быстрых алгоритмов рост времени имеет квазилинейный характер; при больших N ускорение превышает 400 раз. Для данной задачи в рассматриваемом диапазоне углов атаки полученные значения аэродинамических коэффициентов хорошо согласуются с данными эксперимента.

Также рассмотрена задача моделирования обтекания деформируемого профиля. Для решения задачи определения оптимальной формы поверхности автономного подводного аппарата биомиметического типа в форме рыбоподобного пловца и кинематического закона его собственного движения, которые максимизируют пропульсивную силу при заданных ограничениях на энергозатраты и частотный диапазон, требуется проведение больших серий нестационарных расчетов при заданных параметрах,

и низкое время выполнения одного расчета критически важно для возможности проведения всего вычислительного эксперимента за приемлемое время. В рассматриваемой постановке профиль рыбоподобного пловца является деформируемым с заранее заданным законом движения границы. В ходе вычислительного эксперимента определялись интегральные характеристики: продольная сила и энергопотребление.

Зависимости осредненных коэффициентов сил и мощности от частоты колебаний приведены на Рисунке 5, где результаты расчетов в VM2D сопоставлены с результатами, полученными в OpenFOAM. Расчет выполнялся при числе Рейнольдса Re = 5000.



а *б*

Рисунок 5 — Зависимости коэффициентов продольной силы ($а$), обусловленных давлением C_{T_p} и вязким трением C_{T_ν}, и осредненного коэффициента мощности ($б$) от частоты колебаний f

Результаты, полученные в VM2D, хорошо согласуются с расчетами в OpenFOAM; время выполнения одного нестационарного расчета в VM2D на GPU Nvidia H100 составляло в среднем 2 минуты.

Основные результаты и заключение

В диссертационной работе разработано семейство быстрых алгоритмов, обеспечивающих квазилинейную вычислительную сложность расчета в вихревых методах вычислительной гидродинамики при моделировании обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды и решении сопряженных задач гидроупругости.

1. Предложен единый подход к приближенному расчету всех типов дальнодействующих взаимодействий, возникающих в алгоритме вихревого метода. Получены мультипольные и локальные разложения функции влияния, условия их равномерной сходимости и необходимые формулы пересчета. Предложенный подход позволяет рассчитывать как точечные взаимодействия, так и влияния распределенных по панелям слоев вихрей и источников, а также интегральное влияние вдоль панелей.

2. Разработано семейство быстрых алгоритмов квазилинейной сложности, объединяющих идеи методов Барнса — Хата и мультиполей и использующих линейные структуры данных LBVH для иерархической кластеризации объектов. Алгоритмы позволяют рассчитывать конвективные скорости, правую часть системы линейных уравнений и выполнять быстрое матрично-векторное умножение при ее итерационном решении. Построенная оценка вычислительной сложности, подтвержденная вычислительными экспериментами, позволила исследовать влияние параметров алгоритма на точность и вычислительную сложность, а также сформулировать рекомендации по рациональному выбору их значений. Схожие алгоритмы обхода деревьев применены для вспомогательных операций: поиска соседей, реструктуризации вихревого следа, контроля проникновения вихревых частиц внутрь обтекаемых профилей.

3. Созданы параллельные реализации разработанных быстрых алгоритмов для многоядерных центральных процессоров и для графических ускорителей Nvidia с учетом особенностей их архитектуры, которые интегрированы в открытый программный комплекс VM2D для моделирования двумерных течений вихревыми методами и решения сопряженных задач гидроупругости. Вычислительные эксперименты подтвердили квазилинейную зависимость времени счета от числа вихревых частиц; полученные гидродинамические характеристики профилей хорошо согласуются с данными эксперимента и результатами расчетов других авторов. Достигнуто многократное ускорение вычислений по сравнению с прямыми алгоритмами.

Полученные в диссертационной работе результаты повышают эффективность вихревых методов, делая возможным моделирование нестационарных двумерных вязких течений с высоким разрешением. Это расширяет возможности вихревых методов при решении широкого класса задач, связанных с моделированием обтекания подвижных, деформируемых профилей и систем профилей, в том числе в гидроупругой постановке.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Numerical scheme of the second order of accuracy for vortex methods for incompressible flow simulation around airfoils / E.P. Ryatina [et al.] // Russian Aeronautics. 2017. V. 60, No. 3. P. 398–405. (0,5 п.л./0,15 п.л.)

2. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact analytical formulae for linearly distributed vortex and source sheets influence computation in 2D vortex methods // Journal of Physics: Conf. Ser. 2017. V. 918. Art. 012013. (0,56 п.л./0,19 п.л.)

3. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. VM2D: Open source code for 2D incompressible flow simulation using vortex methods // Communications in Computer & Information Science. 2018. V. 910. P. 251–265. (0,94 п.л./0,3 п.л.)

4. Ryatina E.P., Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. On investigation and efficient software implementation of fast methods for vortex influence

computation in 2D flow simulation // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2027, No. 1. Art. 040051. (0,5 п.л./0,17 п.л.)

5. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Numerical simulation in 2D strongly coupled FSI problems for incompressible flows by using vortex method // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2027. Art. 040045. (0,56 п.л./0,19 п.л.)

6. The approximate calculation of 2D field strength with a Coulomb potential by using multipole expansion / E.P. Ryatina [et al.] // Journal of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1301. Art. 012010. (0,63 п.л./0,2 п.л.)

7. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. V. 126. P. 255–267. (0,81 п.л./0,3 п.л.)

8. Ryatina E., Lagno A. The Barnes–Hut-type algorithm in 2D Lagrangian vortex particle methods // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 1715. Art. 012069. (0,44 п.л./0,28 п.л.)

9. Kolganova A., Marchevsky I., Ryatina E. Hybrid Barnes–Hut/multipole algorithm application to vortex particles velocities calculation and integral equation solution // Journal of Physics: Conf. Ser. 2023. V. 2543. Art. 012003. (0,63 п.л./0,22 п.л.)

10. Kolganova A., Marchevsky I., Ryatina E. Barnes–Hut/multipole fast algorithm in the Lagrangian vortex method // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2023. V. 135. P. 155–167. (0,81 п.л./0,3 п.л.)

11. The VM2D open source code for two-dimensional incompressible flow simulation by using fully Lagrangian vortex particle methods / E.P. Ryatina [et al.] // Axioms. 2023. V. 12, No. 3. Art. 248. (2,0 п.л./0.5 п.л.)

12. Коробова И.А., Рятина Е.П., Хорошева А.А. О проблемах при моделировании плоских течений вязкой жидкости при повышенных значениях числа Рейнольдса вихревыми методами в программном комплексе VM2D // Труды ИСП РАН. 2023. Т. 35, № 2. С. 201–214. (0,9 п.л./0,4 п.л.)

13. Marchevsky I., Ryatina E., Kolganova A. Fast Barnes–Hut-based algorithm in 2D vortex method of computational hydrodynamics // Computers & Fluids. 2023. V. 266. Art. 106018. (2,0 п.л./0,7 п.л.)

14. Реализация быстрых алгоритмов при моделировании двумерных течений вихревыми методами / Е.П. Рятина [и др.] // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2025. Т. 167. № 1. С. 99–114. (1,0 п.л./0,3 п.л.)

15. Ryatina E.P. Fast BH/multipoles algorithm for solving boundary integral equation in vortex particle methods of computational hydrodynamics // Technical Physics. 2026. V. 71. P. 294–301. (0,5 п.л.)

16. Implementation of fast algorithms for CPUs and GPUs for 2D flows simulation with vortex particle method / E.P. Ryatina [et al.] // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2026. V. 36, No. 7. P. 2864–2916. (3,3 п.л. / 1,0 п.л.)

Рятина Евгения Павловна

Быстрые алгоритмы для вихревых методов моделирования плоских течений

Автореферат дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано к печати ___.___._____. Заказ №_____
Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана