УДК 539.6.013.4

Задача В.И. Феодосьева об устойчивости полосы с разрезами под потенциальной и неконсервативной нагрузками

В.П. Радин, В.П. Чирков, Е.В. Позняк, В.Э. Цой, О.В. Новикова

НИУ «МЭИ»

V.I. Feodosiev's problem on the stability of a slotted strip under potential and non-conservative loads

V.P. Radin, V.P. Chirkov, E.V. Poznyak, V.E Tsoy, O.V. Novikova

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

Рассмотрена задача расчета на устойчивость двухстержневой системы под действием потенциальной и неконсервативной сил. Расчетная схема приведена в книге В.И. Феодосьева «Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов» и представляет собой вертикальную полосу с двумя продольными разрезами, при этом боковые части полосы жестко защемлены сверху, а к верхней подвижной центральной части приложена сжимающая потенциальная сила. Нижняя часть полосы не разрезана и не закреплена. Задача сведена к двухстержневой системе, в которой два стержня на одном конце не закреплены, но жестко связаны друг с другом, а на другом конце один стержень защемлен, а другой свободен и нагружен сжимающей силой. В первоисточнике система нагружена только потенциальной силой и исследована на устойчивость с применением статического метода. Рассмотрена аналогичная система, находящаяся под действием дополнительной неконсервативной следящей силы. Применены различные подходы к определению критических значений нагрузок и границ области устойчивости. Граница дивергенции построена с применением статического метода. Граница флаттера построена динамическим методом с применением метода минимизации функции нескольких переменных. Изучено поведение характеристических показателей, ответственных за потерю устойчивости системы, при различных режимах нагружения системы.

EDN: QSTODV, https://elibrary/qstodv

Ключевые слова: двухстержневая система, потенциальная и следящая силы, прямолинейная форма равновесия, дивергенция или флаттер, границы области устойчивости

We consider the problem of stability analysis for a two-rod system under the action of both potential and non-conservative forces. The computational model is presented in V.I. Feodosiev's book "Selected Problems and Questions in Strength of Materials" and consists of a vertical strip with two longitudinal cuts. The lateral parts of the strip are rigidly clamped at the top, while a compressive potential force is applied to the upper movable central part. The lower part of the strip remains uncut and unconstrained. The problem reduces to a two-rod system in which the two rods are not fixed at one end but are rigidly connected to each other, while at the other end one rod is clamped and the other is free and loaded by a compressive force. In the original source, the system is loaded only by a potential force, and its stability is investigated using the static method. In this work, a similar system is subjected to an additional non-conservative follower force. Various approaches are applied to deter-

mine the critical load values and the boundaries of the stability region. The divergence boundary is constructed using the static method. The flutter boundary is obtained by the dynamic method employing minimization of a function of several variables. The behavior of the characteristic exponents responsible for the loss of stability of the system is studied under different loading regimes.

EDN: QSTODV, https://elibrary/qstodv

Keywords: two-rod system, potential and follower forces, rectilinear equilibrium form, divergence or flutter, stability region boundaries

Известно, что в высших учебных заведениях одной из самых сложных прикладных технических дисциплин является «Сопротивление материалов». По этой дисциплине существует широкий спектр учебной литературы, среди которой ведущее место занимает учебник «Сопротивление материалов» [1], написанный членом-корреспондентом АН СССР, специалистом в области динамики и прочности конструкций В.И. Феодосьевым. Первое издание учебника вышло в свет в 1960 г. С тех пор он многократно переиздавался, и на сегодняшний день остается образцом ясного и точного изложения учебного материала.

Не меньшую ценность для подготовки высококвалифицированных специалистов в области расчетов на прочность, жесткость и устойчивость представляют и дополнительные учебные издания этого автора. Дополнением к практическому приложению дисциплины является книга «Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов» [2], вышедшая во второй половине прошлого столетия в издательстве «Наука» и также пережившая несколько переизданий. Книга содержит большое количество задач с решениями, полезными для освоения дисциплины и с точки зрения практических приложений. Рассмотрены разнообразные расчетные системы реальных конструкций.

Цель работы — исследование устойчивости двухстержневой системы при потенциальном и неконсервативном нагружении.

Постановка задачи. Рассмотрим удлиненную фасонную пластину с двумя продольными разрезами (рис. 1), такую же, как в работе [2]. Боковые части полосы жестко защемлены сверху, а к подвижной центральной части приложены сжимающая потенциальная и следящая силы. Нижняя часть полосы не разрезана и не закреплена. Считаем, что при нагружении продольными силами напряженно-деформированное состояние в боковых частях пластины одинаковое, и подчиняется стержневой теории, т. е. боковые части пластины работают как единый стержень. За стержень принимаем и среднюю часть пластины. Аналогичная расчетная схема может возникать и при других конструктивных исполнениях каких-либо силовых элементов машин и конструкций.

Таким образом, приходим к расчетной схеме в виде двух стержней, которые жестко связаны на одном конце, а на другом стержень I жестко защемлен, а конец стержня II свободен от закреплений. Стержень II нагружен двумя сжимающими его силами Q и P. Сила Q является потенциальной и не меняет направления при любых деформациях стержня, а сила P — следящей, т. е. ее направление при любых перемещениях совпадает с направлением касательной к изогнутой оси стержня в точке приложения. Стержни имеют одинаковую длину l, погонную массу m и изгибную жесткость EI в плоскости возможной потери устойчивости.

Критическое значение потенциальной силы. В работе [2] критическое значение потенциальной силы Q определено с помощью уравнений нейтрального равновесия второго порядка. Эти уравнения, записанные для каждого стержня, по сути, являются определением изгибающего

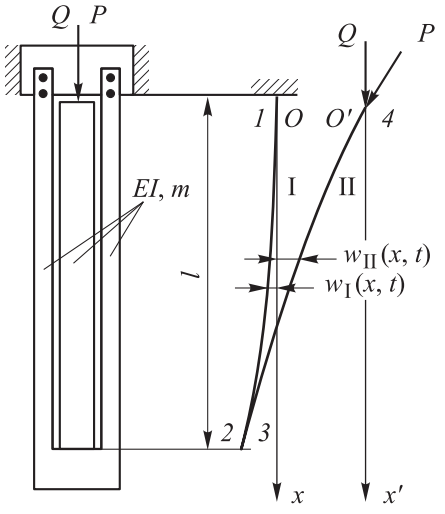


Рис. 1. Расчетная схема двухстержневой системы

момента через прогибы и силу Q. Если отсчитывать прогибы сечений стержней $y_{\text{I}}(x)$ и $y_{\text{II}}(x)$ от оси $O'x'$ (см. рис. 1), то эти уравнения будут иметь вид

$$EI\frac{d^2y_{\text{I}}}{dx^2}-Qy_{\text{I}}=0;\quad EI\frac{d^2y_{\text{II}}}{dx^2}+Qy_{\text{II}}=0.$$

Введем безразмерные координату $\xi=x/l$ и параметр потенциальной силы $\alpha^2=Ql^2/EI$ и перепишем уравнения следующий образом:

$$\frac{d^2y_{\text{I}}}{d\xi^2}-\alpha^2y_{\text{I}}=0;\quad \frac{d^2y_{\text{II}}}{d\xi^2}+\alpha^2y_{\text{II}}=0\,. \qquad (1)$$

Здесь знаки учитывают растяжение стержня I и сжатие стержня II.

Решения этих уравнений $y_{\text{I}}(\xi)=C_1\text{sh}\,\alpha\xi+C_2\text{ch}\,\alpha\xi$ и $y_{\text{II}}(\xi)=C_3\sin\alpha\xi+C_4\cos\alpha\xi$ должны удовлетворять граничным условиям и условиям сопряжения:

• при $\xi=0$

$$\frac{dy_{\text{I}}}{d\xi}=0,\quad y_{\text{II}}=0;$$

• при $\xi=1$

$$y_{\text{I}}=y_{\text{II}},\quad \frac{dy_{\text{I}}}{d\xi}=\frac{dy_{\text{II}}}{d\xi}.$$

Здесь $C_1...C_4$ — константы.

Из первых двух условий следуют соотношения $C_1=0$, $C_4=0$, а система уравнений относительно C_2 и C_3 имеет вид

$$C_2\text{ch}\,\alpha=C_3\sin\alpha;$$
$$\alpha C_2\text{sh}\,\alpha=\alpha C_3\cos\alpha.$$

Полагая для смежных состояний равновесия исследуемой системы константы C_2 и C_3 отличными от нуля и поделив первое уравнение на второе, получаем трансцендентное уравнение для определения критического значения параметра потенциальной силы α

$$\frac{1}{\text{th}\,\alpha}=\text{tg}\,\alpha. \qquad (2)$$

Наименьший корень этого уравнения $\alpha_*=0{,}938$. Отсюда имеем критическое значение потенциальной силы

$$Q_*=\frac{\alpha_*^2EI}{l^2}=\frac{0{,}88EI}{l^2}.$$

Рассмотрим ту же задачу с применением уравнений нейтрального равновесия четвертого порядка [3, 4], пригодного для любых вариантов опорного закрепления. Для изгибных отклонений сечений стержней от исследуемого прямолинейного положения равновесия от оси Ox $w_{\text{I}}(\xi)$ и $w_{\text{II}}(\xi)$ вместо уравнений (1) имеем

$$\frac{d^4w_{\text{I}}}{d\xi^4}-\alpha^2\frac{d^2w_{\text{I}}}{d\xi^2}=0;\quad \frac{\partial^4w_{\text{II}}}{\partial\xi^4}+\alpha^2\frac{\partial^2w_{\text{II}}}{\partial\xi^2}=0. \qquad (3)$$

Решения уравнений (3) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}&w_{\text{I}}(\xi)=C_1\,\text{sh}\,\alpha\xi+C_2\text{ch}\,\alpha\xi+C_3\xi+C_4;\\&w_{\text{II}}(\xi)=C_5\sin\alpha\xi+C_6\cos\alpha\xi+C_7\xi+C_8,\end{aligned} \qquad (4)$$

где $C_5...C_8$ — константы.

Для первого стержня в верхних сечениях при $\xi=0$ имеем жесткое защемление, для второго — свободный конец, загруженный продольной силой, которая при повороте сечения на угол $dw_{\text{II}}/d\xi$ дает проекцию на перпендикуляр к изогнутой оси стержня. Тогда граничные условия запишем как

при $\xi=0$

$$\begin{aligned}&w_{\text{I}}=0,\quad \frac{dw_{\text{I}}}{d\xi}=0,\quad \frac{d^2w_{\text{II}}}{d\xi^2}=0,\\&\frac{d^3w_{\text{II}}}{d\xi^3}+\alpha^2\frac{dw_{\text{II}}}{d\xi}=0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Условия стыковки решений сформулируем на основе жесткого соединения стержней на нижнем конце следующим образом:

при $\xi=1$

$$\begin{aligned}&w_{\text{I}}=w_{\text{II}},\quad \frac{dw_{\text{I}}}{d\xi}=\frac{dw_{\text{II}}}{d\xi},\quad \frac{d^2w_{\text{I}}}{d\xi^2}=-\frac{d^2w_{\text{II}}}{d\xi^2},\\&\frac{d^3w_{\text{I}}}{d\xi^3}=-\frac{d^3w_{\text{II}}}{d\xi^3}.\end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь знак минус в третьем и четвертом условиях стыковки учитывает поворот второго стержня в противоположную сторону относительно первого.

Подстановка решений (4) в условия (5) и (6) дает систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно констант $C_1...C_8$ с матрицей $\mathbf{A}$, которую представим в блочном виде

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}$, $\mathbf{A}_{14}$ — блочные матрицы,

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\\alpha&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-\alpha^2&0&0\\0&0&\alpha^2&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix}\operatorname{sh}\alpha&\operatorname{ch}\alpha&1&1\\ \alpha\operatorname{ch}\alpha&\alpha\operatorname{sh}\alpha&1&0\\ \alpha^2\operatorname{sh}\alpha&\alpha^2\operatorname{ch}\alpha&0&0\\ \alpha^3\operatorname{ch}\alpha&\alpha^3\operatorname{sh}\alpha&0&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix}-\sin\alpha&-\cos\alpha&-1&-1\\ -\alpha\cos\alpha&\alpha\sin\alpha&-1&0\\ -\alpha^2\sin\alpha&-\alpha^2\cos\alpha&0&0\\ -\alpha^3\cos\alpha&\alpha^3\sin\alpha&0&0\end{bmatrix}.$$

Условие существования формы равновесия, смежной с исследуемой прямолинейной, заключается в равенстве нулю определителя матрицы **A**:

$$\Delta(\alpha)=\det\left(\mathbf{A}(\alpha)\right)=0. \qquad (8)$$

Наименьший корень этого уравнения α_* определяет критическое значение потенциальной нагрузки Q_*.

Совпадение двух подходов к решению задачи об устойчивости рассматриваемой стержневой системы проиллюстрировано на рис. 2. Здесь построены кривые, соответствующие левой и правой частям уравнения (2). Точка пересечения этих кривых — графическое решение этого уравнения. Абсцисса этой точки соответствует нулю функции $\Delta(\alpha)$.

Если на систему действует только следящая сила P и применить такие же рассуждения, как и для потенциальной силы, то необходимо скорректировать граничные условия для $w_{\text{II}}(\xi)$ при $\xi=0$ следующим образом:

$$\frac{d^2w_{\text{II}}}{d\xi^2}=0,\quad \frac{d^3w_{\text{II}}}{d\xi^3}=0.$$

Заменяя в матрице **A** безразмерный параметр α^2 на $\beta^2=Pl^2/EI$, а блочную матрицу $\mathbf{A}_{12}$ на

$$\mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-\beta^2&0&0\\-\beta^3&0&0&0\end{bmatrix},$$

получаем определитель $\Delta(\beta)$, который ни при каких β не обращается в нуль. Это, как известно [5–9], свидетельствует о неприменимости статического метода при отсутствии у нагруженной неконсервативными силами системы смежных положений равновесия. В этих случаях при достижении силами критических значений наблюдается динамический тип потери устойчивости — флаттер [10].

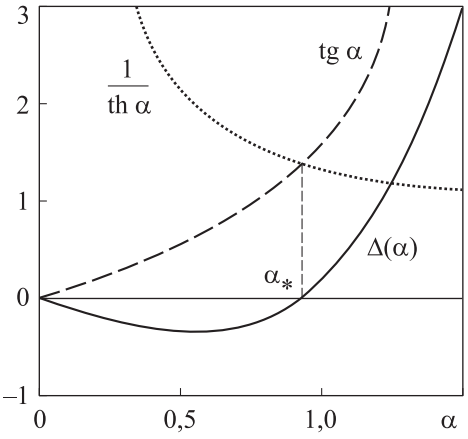


Рис. 2. Результаты решения уравнений (2) и (8)

Граница дивергенции. Рассмотрим совместное действие потенциальной Q и следящей P сил (см. рис. 1). Решим задачу о построении границы области устойчивости на плоскости параметров нагружения. Пересечение этой границы соответствует потере устойчивости по типу флаттера или дивергенции. Та часть границы, которая соответствует дивергенции, может быть построена из статических соображений.

Введем для компактности записи обозначение $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$. Уравнения нейтрального состояния и их решения будут совпадать с уравнениями (3) с заменой α^2 на γ^2 и выражениями (4) с заменой α на γ. Вид граничных условий (5) и условий стыковки решений (6) остается без изменений.

Вид матрицы коэффициентов системы однородных алгебраических уравнений относительно констант интегрирования аналогичен выражению (7) с заменой α на γ и блока $\mathbf{A}_{12}$ на

$$\mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-\gamma^2&0&0\\-\gamma^3+\alpha^2\gamma&0&\alpha^2&0\end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы **A** дает уравнение поверхности $\Delta(\alpha,\beta)$, нулевой уровень которой

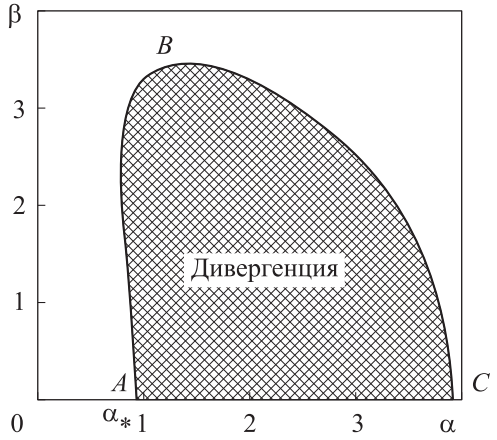


Рис. 3. Результаты построения границы дивергенции

$\Delta(\alpha,\beta)=0$ и есть граница дивергенции стержневой системы на плоскости $\alpha-\beta$, показанная на рис. 3.

Как видно из рисунка, только часть кривой *ABC* ограничивает область устойчивости, и эту часть необходимо дополнить границей флаттера. Для построения данной границы необходимо привлечь динамический метод исследования устойчивости. Так как при этом будем использовать динамические характеристики системы, рассмотрим ее собственные колебания.

Определение частот собственных колебаний и форм. Частоты и формы собственных колебаний определим, используя метод начальных параметров [11]. Уравнение собственных колебаний относительно форм колебаний $\varphi(\xi)$ имеет вид

$$\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}-\chi^4\varphi=0,\quad \chi^4=\frac{m\omega^2l^4}{EI}, \tag{9}$$

где χ — частотный параметр.

Нормальной фундаментальной системой решений Коши уравнения (9) являются функции Крылова

$$K_1(\chi\xi)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\chi\xi+\cos\chi\xi\right);$$

$$K_2(\chi\xi)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\chi\xi+\sin\chi\xi\right);$$

$$K_3(\chi\xi)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\chi\xi-\cos\chi\xi\right);$$

$$K_4(\chi\xi)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\chi\xi-\sin\chi\xi\right).$$

Пронумеруем характерные сечения, как показано на рис. 1. Согласно методу начальных параметров, связь между векторами характерных параметров сечения *4* $\mathbf{v}_4=[\varphi\quad\varphi'\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ и сечения *1* $\mathbf{v}_1=[0\quad 0\quad M\quad Q]^{\mathrm{T}}$ задана выражением

$$\mathbf{v}_4=\mathbf{B}_{34}\mathbf{B}_{23}\mathbf{B}_{12}\mathbf{v}_1,$$

где $\mathbf{B}_{34}$, $\mathbf{B}_{23}$, $\mathbf{B}_{12}$ — передаточные матрицы,

$$\mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}_{34}=\begin{bmatrix} K_1(\chi) & \dfrac{K_2(\chi)}{\chi} & \dfrac{K_3(\chi)}{\chi^2} & \dfrac{K_4(\chi)}{\chi^3}\\ \chi K_4(\chi) & K_1(\chi) & \dfrac{K_2(\chi)}{\chi} & \dfrac{K_3(\chi)}{\chi^2}\\ \chi^2K_3(\chi) & \chi K_4(\chi) & K_1(\chi) & \dfrac{K_2(\chi)}{\chi}\\ \chi^3K_2(\chi) & \chi^2K_3(\chi) & \chi K_4(\chi) & K_1(\chi) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрицы $\mathbf{B}_{12}$ и $\mathbf{B}_{34}$ совпадают вследствие равенства параметров обеих частей системы; знак минус в трех диагональных элементах матрицы $\mathbf{B}_{23}$ соответствует повороту второго стержня системы на 180°.

Обозначим матрицу размера 4×4 через $\mathbf{b}=\mathbf{B}_{34}\mathbf{B}_{23}\mathbf{B}_{12}$. Тогда один из вариантов частотного уравнения запишем как

$$b_{33}(\chi)b_{44}(\chi)-b_{43}(\chi)b_{34}(\chi)=0.$$

Первые четыре корня этого уравнения и соответствующие частоты, отнесенные к некоторому характерному значению

$$\omega_0=\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

приведены в таблице, а первые три формы собственных колебаний — на рис. 4.

Значения корней уравнения и соответствующих частот

Номер корня	χ_k	$\omega_k=\chi_k^2$
1	1,5708	2,4674
2	4,7124	22,2066
3	7,8540	61,6850
4	10,9900	120,9000

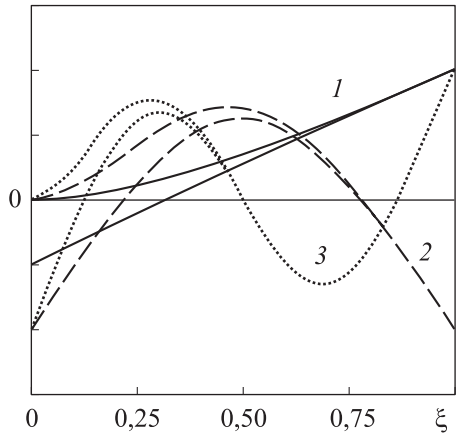


Рис. 4. Результаты построения первых трех форм собственных колебаний

Граница области устойчивости. Устойчивость систем, в которых возможны ее потери разного типа, необходимо исследовать динамическим методом [5–7]. Он заключается в решении несамосопряженной однородной краевой задачи, т. е. в определении собственных значений и, при необходимости, собственных функций. Реализация этого метода основана на анализе решений уравнений возмущенного движения.

Для рассматриваемой системы, находящейся под действием сил Q и P, эти уравнения с добавлением диссипации энергии с безразмерным коэффициентом ε и использованием безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$ запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 w_{\mathrm{I}}}{\partial \xi^4} + 2\varepsilon \frac{\partial w_{\mathrm{I}}}{\partial \tau} - \gamma^2 \frac{\partial^2 w_{\mathrm{I}}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_{\mathrm{I}}}{\partial \tau^2} = 0; \\ &\frac{\partial^4 w_{\mathrm{II}}}{\partial \xi^4} + 2\varepsilon \frac{\partial w_{\mathrm{II}}}{\partial \tau} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w_{\mathrm{II}}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_{\mathrm{II}}}{\partial \tau^2} = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь отклонения от исследуемой на устойчивость формы равновесия $w_{\mathrm{I}}(\xi,\tau)$ и $w_{\mathrm{II}}(\xi,\tau)$ зависят уже не только от координаты ξ, но и времени τ.

Решения линейных уравнений (10) представим в виде

$$w_{\mathrm{I}}(\xi,\tau) = \varphi_{\mathrm{I}}(\xi) e^{\lambda\tau}; \quad w_{\mathrm{II}}(\xi,\tau) = \varphi_{\mathrm{II}}(\xi) e^{\lambda\tau}, \qquad (11)$$

где $\varphi_{\mathrm{I}}(\xi)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}(\xi)$ — функции координаты ξ (формы потери устойчивости) на первом и втором участках; λ — характеристические показатели, определяющие поведение решения во времени.

Если действительные части всех характеристических показателей λ отрицательные, то решения $w_{\mathrm{I}}(\xi,\tau)$ и $w_{\mathrm{II}}(\xi,\tau)$ при каких-либо начальных возмущениях затухают во времени, и прямолинейная форма равновесия стержней — тривиальное решение уравнения (10) — является устойчивой.

Неустойчивость (дивергенция или флаттер) наступает, когда хотя бы один из характеристических показателей переходит в правую полуплоскость плоскости $\mathrm{Re}\lambda - \mathrm{Im}\lambda$ и его действительная часть $\mathrm{Re}\lambda$ становится положительной. Если переход λ в правую полуплоскость происходит при отличной от нуля мнимой части $\mathrm{Im}\lambda$, то имеет место колебательный тип потери устойчивости — флаттер. Достижение характеристическим показателем начала координат (действительная и мнимая части равны нулю) — состояние нейтрального равновесия, реализующее квазистатический тип потери устойчивости — дивергенцию.

Подставляя выражения (11) в уравнения (10), получаем однородные уравнения для определения форм потери устойчивости

$$\begin{aligned} &\frac{d^4\varphi_{\mathrm{I}}}{d\xi^4} - \gamma^2 \frac{d^2\varphi_{\mathrm{I}}}{d\xi^2} + \left(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda\right)\varphi_{\mathrm{I}} = 0; \\ &\frac{d^4\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi^4} + \gamma^2 \frac{d^2\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi^2} + \left(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda\right)\varphi_{\mathrm{II}} = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Эти уравнения дополним граничными условиями, совпадающими по виду и смыслу с условиями (5) и (6):

• при $\xi = 0$

$$\varphi_{\mathrm{I}} = 0, \quad \frac{d\varphi_{\mathrm{I}}}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi^2} = 0,$$

$$\frac{d^3\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi^3} + \alpha^2 \frac{d\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi} = 0;$$

• при $\xi = 1$

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_{\mathrm{II}}, \quad \frac{d\varphi_{\mathrm{I}}}{d\xi} = \frac{d\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi}, \quad \frac{d^2\varphi_{\mathrm{I}}}{d\xi^2} = -\frac{d^2\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi^2},$$

$$\frac{d^3\varphi_{\mathrm{I}}}{d\xi^3} = -\frac{d^3\varphi_{\mathrm{II}}}{d\xi^3}.$$

Уравнения (12) допускают решения вида $\varphi(\xi,\tau) = Ce^{r\xi}$, после подстановки которых в уравнения (12) имеем два биквадратных уравнения для определения показателей r

$$r^4 - \gamma^2 r^2 + \lambda^2 + 2\lambda\varepsilon = 0;$$

$$r^4 + \gamma^2 r^2 + \lambda^2 + 2\lambda\varepsilon = 0.$$

Решения этих биквадратных уравнений следующие:

$$r_i = \pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^4}{4} - \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda}};$$
$$r_j = \pm\sqrt{-\frac{\gamma^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^4}{4} - \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda}},$$

где $i = 1\ldots4$; $j = 5\ldots8$.

Таким образом, выражения для определения форм собственных колебаний имеют вид

$$\varphi_{\mathrm{I}}(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{4} C_k e^{r_k\xi};$$
$$\varphi_{\mathrm{II}}(\xi,\tau) = \sum_{k=5}^{8} C_k e^{r_k\xi}. \qquad (13)$$

Удовлетворяя этими функциями граничные условия, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1 \ldots C_8$

$$\mathbf{FC} = 0,$$

где $\mathbf{F}$ — матрица, составленная из коэффициентов, полученных в результате подстановки выражений (13) в граничные условия; $\mathbf{C}$ — вектор, элементами которого являются константы $C_1 \ldots C_8$.

Как для перехода исследуемой системы в смежное состояние, так и для начала колебательных явлений в ней должно существовать нетривиальное решение уравнений для $C_1 \ldots C_8$, т. е. хотя бы одна из констант должна отличаться от нуля. Это возможно лишь при обращении в нуль определителя $\det\mathbf{F}$ матрицы $\mathbf{F}$.

После тождественных преобразований получаем трансцендентное уравнение, связывающее параметры системы, которые считаем заданными, параметры нагружения α, β и характеристические показатели λ:

$$\det\mathbf{F}(\alpha,\beta,\lambda) = 0. \qquad (14)$$

Для компактности матрицу $\mathbf{F}$ размера 8×8 запишем в блочном виде

$$\mathbf{F}(\alpha,\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{F}_{11}$, $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{22}$ — блочные матрицы размера 4×4,

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & \ldots & r_4 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ r_5^2 & \ldots & r_8^2 \\ r_5^3 + \alpha^2 r_5 & \ldots & r_8^3 + \alpha^2 r_8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{21} = \begin{bmatrix} e^{r_1} & \ldots & e^{r_4} \\ r_1 e^{r_1} & \ldots & r_4 e^{r_4} \\ r_1^2 e^{r_1} & \ldots & r_4^2 e^{r_4} \\ r_1^3 e^{r_1} & \ldots & r_4^3 e^{r_4} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} -e^{r_5} & \ldots & -e^{r_8} \\ -r_5 e^{r_5} & \ldots & -r_8 e^{r_8} \\ r_5^2 e^{r_5} & \ldots & r_8^2 e^{r_8} \\ r_5^3 e^{r_5} & \ldots & r_8^3 e^{r_8} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (14) можно было бы положить в основу построения границы области устойчивости на плоскости параметров нагружения α, β, но поступим по-другому. Если при заданных значениях α и β некоторый характеристический показатель λ является корнем уравнения (14), то это же значение λ будет точкой абсолютного локального минимума функции, определяемой как

$$\Delta(\alpha,\beta,\lambda) = \left|\det\mathbf{F}(\alpha,\beta,\lambda)\right|,$$

т. е. это абсолютная величина левой части уравнения (14).

Таким образом, возможный алгоритм построения границы области устойчивости состоит в следующем [12]. При фиксированных значениях α и β функцию $\Delta(\alpha,\beta,\lambda)$ рассматриваем как функцию действительной $\mathrm{Re}\lambda$ и мнимой $\mathrm{Im}\lambda$ частей характеристического показателя λ. Минимизируя функцию $\Delta(\alpha,\beta,\lambda)$, находим соответствующие значения λ. Изменяя параметры нагрузки, фиксируем момент, когда хотя бы один из λ перейдет в правую полуплоскость с обращением в нуль его действительной части. Текущие значения параметров нагрузки определяют точку границы дивергенции, если $\mathrm{Im}\lambda = 0$, или флаттера, если $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$.

С учетом того, что обычно ответственными за потерю устойчивости являются низшие частоты, в качестве начальных значений для λ с поправкой на демпфирование принимаем

$$\lambda_1 = -\varepsilon + i\sqrt{\omega_1^2 - \varepsilon^2} = -\varepsilon + i\omega_{1\varepsilon};$$
$$\lambda_2 = -\varepsilon + i\sqrt{\omega_2^2 - \varepsilon^2} = -\varepsilon + i\omega_{2\varepsilon}.$$

При организации циклов по параметрам нагрузки α и β будем исходить из начала координат на плоскости $\alpha-\beta$ с линейной связью

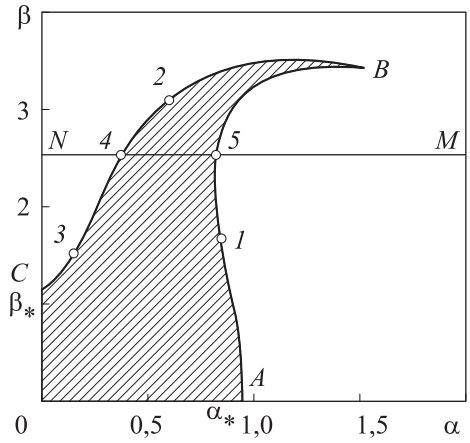


Рис. 5. Результаты построения границы области устойчивости

между этими координатами. Результаты построения границы области устойчивости приведены на рис. 5, а траектории характеристических показателей при различных значениях параметров нагружения — на рис. 6.

На рис. 5 показана область устойчивости (заштрихована), ограниченная координатными осями и кривой ABC. На границе области отмечены точки, фиксирующие критические состояния характеристических показателей. Точке *1* соответствует рис. 6, *а*, на котором продемонстрирована эволюция характеристического показателя λ_1 и комплексно сопряженного λ_1^* при $\beta = 2\alpha$ и различных значениях α. В точке *1* (см. рис. 5) при $\beta_* = 2\alpha_* = 1{,}67$ показатель $\lambda_1 = 0$, что свидетельствует о принадлежности этой точки границе дивергенции.

Аналогичная ситуация сохраняется для всех точек кривой AB. Так динамический метод подтверждает результаты построения границы дивергенции, полученные ранее статическим методом (см. рис. 3).

Как меняются действительные и мнимые части того же характеристического показателя при возрастании параметров нагружения по закону $\beta = 5\alpha$ показано на рис. 6, *б*. Здесь при

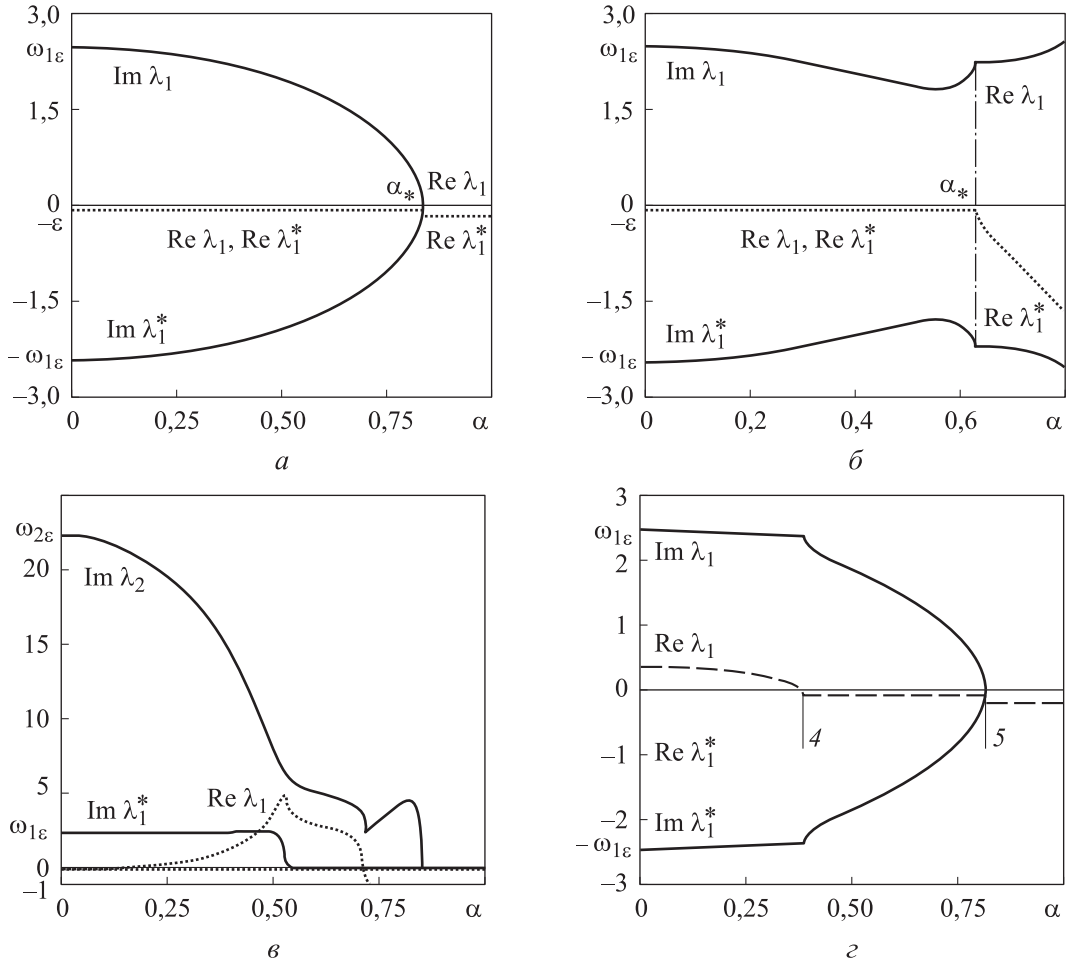


Рис. 6. Траектории характеристических показателей при различных значениях параметров нагружения: *а* — $\beta = 2\alpha$, $\alpha = \text{var}$; *б* — $\beta = 5\alpha$, $\alpha = \text{var}$; *в* — $\beta = 10\alpha$, $\alpha = \text{var}$; *г* — $\beta = 2{,}5$, $\alpha = \text{var}$

достижении значений $\beta_* = 5\alpha_* = 3{,}15$ действительная часть $\mathrm{Re}\,\lambda_1$ становится положительной при $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$, что указывает на то, что точка *2* на рис. 5 находится на границе флаттера. Такая ситуация сохраняется для всех точек на кривой *BC* этого рисунка.

Отличием рассматриваемой системы является то, что при наличии следящей силы за флаттер отвечает только первый характеристический показатель. В других стержневых системах, например, в консольном стержне, флаттер обусловлен взаимодействием первой и второй форм колебаний (мнимых частей характеристических показателей λ_1 и λ_2) [7, 8, 12, 13].

Обычная картина следующая: с ростом следящей силы увеличивается $\mathrm{Im}\,\lambda_1$, снижается $\mathrm{Im}\,\lambda_2$, и критическое значение силы соответствует слиянию этих частот и появлению одной из $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. В этой системе можно наблюдать лишь своеобразную тенденцию к такому сценарию по изменениям λ_1 и λ_2 для случая нагружения $\beta = 10\alpha$ (рис. 6, *в*). Существенное снижение $\mathrm{Im}\,\lambda_2$ наблюдается только в закритической стадии, так как уже при $\alpha_* = 0{,}145$, $\beta_* = 10\alpha_* = 1{,}45$ действительная часть λ_1 становится положительной (см. рис. 5, точка *3*).

Также проследим за изменениями характеристического показателя λ_1 при пересечении области устойчивости по линии *MN* (см. рис. 5) при $\beta = 2{,}5$. Соответствующие траектории приведены на рис. 6, *г*. Участок от $\alpha = 0$ до точки *4* соответствует неустойчивости, так как $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$. На отрезке от точки *4* до точки *5*, где $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$, система устойчива, но $\mathrm{Im}\,\lambda_1$ монотонно убывает до нуля, и точка *5* принадлежит границе дивергенции.

Вывод

В работах по решению неконсервативных задач теории упругой устойчивости [13–15] часто отмечается, что результаты этих решений нередко оказываются трудно предсказуемыми. В рассмотренном случае, в отличие от обычной тенденции снижения критического значения неконсервативной силы при увеличении потенциальной, кривая границы флаттера при возрастании параметра α монотонно возрастает.

Литература

[1] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.

[2] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1973. 400 с.

[3] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967. 984 с.

[4] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1978. 312 с.

[5] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 340 с.

[6] Гуськов А.М., Пановко Г.Я. *Особенности динамики механических систем под действием неконсервативных (циркуляционных) сил*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 53 с.

[7] Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes. *ZAMP*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: https://doi.org/10.1007/BF02008828

[8] Pfluger A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer, 1975. 526 p.

[9] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. Москва, Наука, 1967. 420 с.

[10] Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. *Изв. Ленингр. политехн. ин-та*, 1928, № 31, с. 1–26.

[11] Фролов В.К., ред. *Вибрации в технике*. Т. 1. *Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999. 504 с.

[12] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. и др. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 240 с.

[13] Elishakoff I. *Resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability*. World Scientific, 2014. 333 p.

[14] Радин В.П., Чирков В.П., Шугорев А.В. и др. Некоторые особенности неконсервативных задач устойчивости механических систем. *Известия высших учебных заве-*

дений. Машиностроение, 2018, № 8, с. 64–69, doi: http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2018-8-64-70

[15] Kirillov O.N. *Nonconservative stability problems of modern physics*. Berlin, De Gruyter, 2013. 429 p.

References

[1] Feodosyev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1999. 592 p. (In Russ.).

[2] Feodosyev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected problems and questions on strength of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 400 p. (In Russ.).

[3] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 984 p. (In Russ.).

[4] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh system* [Fundamentals of stability analysis of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 312 p.

[5] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Non-conservative problems of elastic stability theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 340 p. (In Russ.).

[6] Guskov A.M., Panovko G.Ya. *Osobennosti dinamiki mekhanicheskikh sistem pod deystviem nekonservativnykh (tsirkulyatsionnykh) sil* [Dynamic features of mechanical systems under the action of non-conservative (circulation) forces]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013. 53 p. (In Russ.).

[7] Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes. *ZAMP*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: https://doi.org/10.1007/BF02008828

[8] Pfluger A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer, 1975. 526 p.

[9] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem* [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 420 p. (In Russ.).

[10] Nikolai E.L. On the stability of the rectilinear equilibrium form of a compressed and twisted rod. *Izv. Leningr. politekhn. in-ta*, 1928, no. 31, pp. 1–26. (In Russ.).

[11] Frolov V.K., ed. *Vibratsii v tekhnike*. T. 1. *Kolebaniya lineynykh sistem* [Vibrations in engineering. Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1999. 504 p. (In Russ.).

[12] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. et al. *Reshenie nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solution of non-conservative problems of stability theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 240 p. (In Russ.).

[13] Elishakoff I. *Resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability*. World Scientific, 2014. 333 p.

[14] Radin V.P., Chirkov V.P., Shugorev A.V. et al. Some features of non-conservative stability problems of mechanical systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2018, no. 8, pp. 64–69, doi: http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2018-8-64-70 (in Russ.).

[15] Kirillov O.N. *Nonconservative stability problems of modern physics*. Berlin, De Gruyter, 2013. 429 p.

Статья поступила в редакцию 04.01.2026

Информация об авторах

РАДИН Владимир Павлович — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

ЧИРКОВ Виктор Петрович — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

ПОЗНЯК Елена Викторовна — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: elpoz@yandex.ru).

ЦОЙ Валерьян Эдуардович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: tsoyve@mpei.ru).

НОВИКОВА Ольга Валерьевна — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ МЭИ (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: NovikovaOV@mpei.ru).

Information about the authors

RADIN Vladimir Pavlovich — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

CHIRKOV Victor Petrovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

POZNYAK Elena Viktorovna — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: elpoz@yandex.ru).

TSOY Valeryan Eduardovich — Candidate of Science (Physics & Math), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: tsoyve@mpei.ru).

NOVIKOVA Olga Valeryevna — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Радин В.П., Чирков В.П., Позняк Е.В., Цой В.Э., Новикова О.В. Задача В.И. Феодосьева об устойчивости полосы с разрезами под потенциальной и неконсервативной нагрузками. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 11, с. 41–51.

Please cite this article in English as:
Radin V.P., Chirkov V.P., Poznyak E.V., Tsoy V.E, Novikova O.V. V.I. Feodosiev's problem on the stability of a slotted strip under potential and non-conservative loads. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 11, pp. 41–51.