На правах рукописи

Фетисов Дмитрий Анатольевич

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ АФФИННЫХ СИСТЕМ С НУЛЕВОЙ ДИНАМИКОЙ

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Крищенко А. П.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Пантелеев А.В.

кандидат физико-математических наук, доцент Фомичев В.В.

Ведущая организация:
Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН

Защита состоится "____" ____________ 2006 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан "____" ____________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н., профессор   Волков И. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Значительный раздел современной теории управления составляет проблема управляемости динамических систем. Наиболее полно разработана теория управляемости линейных систем, для которых получены необходимые и достаточные условия управляемости (Р.Е. Калман). Известен следующий результат: линейная система управляема тогда и только тогда, когда она эквивалентна системе канонического вида. За последние десятилетия получено много результатов и по исследованию нелинейных систем (A. Isidori, H. Nijmeijer, S. Sastry, А.М. Ковалев, А.П. Крищенко, H.J. Sussmann, R. Hermann, A.J. Krener).

Значительная часть работ посвящена исследованию локальной управляемости нелинейных систем. Задача локальной управляемости заключается в установлении условий, при которых все траектории системы, выходящие из фиксированной точки, заполняют полную окрестность этой точки. Известен принцип линеаризации (S. Sastry): аффинная система локально управляема в окрестности точки, в которой управляемо линейное приближение этой системы. Для случаев, когда по линейному приближению системы о локальной управляемости судить нельзя, получены соответствующие условия высших порядков.

Одним из направлений анализа управляемости нелинейных систем является подход, заключающийся в преобразовании исходной системы в некоторую эквивалентную систему специального вида, для которого рассматриваемая задача может быть решена с помощью известных методов (А.М. Ковалев, А.П. Крищенко). В монографии А.М. Ковалева для неавтономных систем предложен способ приведения системы к треугольной форме, дающий возможность для определенного класса систем получить достаточные условия управляемости.

С исследованием управляемости динамических систем тесно связаны вопросы существования решений терминальных задач. Известны результаты по преобразованию аффинных систем к каноническому виду, для которого решение терминальной задачи строится на основе концепции обратных задач динамики. Показано, что если аффинная система эквивалентна системе канонического вида, определенной на всем пространстве состояний, то эта система управляема.

В связи с этим представляется актуальным получить условия управляемости на всем пространстве состояний за любой конечный интервал времени для аффинных систем, которые не эквивалентны системам канонического вида.

В данной работе рассматриваются аффинные системы, которые в области определения эквивалентны регулярной системе квазиканонического вида, определенной на всем пространстве состояний. Исследование управляемости для преобразованной системы проводится на основе анализа существования решений терминальных задач.

К исследованию аффинных систем с нулевой динамикой приводит решение целого ряда практических задач. Среди них можно выделить задачу моделирования движений различных шагающих механизмов. Значительное место в этих исследованиях занимает разработка алгоритмов управления плоским перемещением двуногих шагающих роботов (В.В. Белецкий, А.М. Формальский, H. Hemami, I. Kato, В.Е. Бербюк, М. Вукобратович, А.К. Ковальчук, J.W. Grizzle).

Одной из часто рассматриваемых задач является задача построения периодического движения робота по некоторой поверхности. Сложность, возникающая при решении этой задачи, состоит в необходимости анализировать динамические системы большой размерности. Так, для пятизвенного шагающего механизма система уравнений, описывающая движение механизма на каждом шаге, имеет десятый порядок. Представляется актуальным предложить метод решения, дающий результаты на основе анализа системы уравнений меньшей размерности.

Один из возможных вариантов такого метода состоит в преобразовании исходной аффинной системы к нормальной форме и сведение исследования преобразованной системы к исследованию системы уравнений нулевой динамики, имеющей второй порядок.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование существования решений терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида, разработка методов решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой и получение условий управляемости таких систем.

Методы исследования. В работе применяются методы математической теории управления, теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и различные численные методы.

Научная новизна. Получены необходимые и достаточные условия существования решений терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида со скалярным и векторным управлением.

Разработан метод решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

С помощью разработанного метода доказаны достаточные условия управляемости регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата и подтверждается результатами математического моделирования.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются развитием математической теории управления, позволяют решать терминальные задачи для аффинных систем, исследовать управляемость регулярных систем квазиканонического вида и разрабатывать алгоритмы управления различными шагающими механизмами.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Необходимые и достаточные условия существования решений терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида со скалярным и векторным управлением.

2. Метод решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

3. Достаточные условия управляемости регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на VIII международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" имени Е.С. Пятницкого, проходившем в 2004 г. в Москве, на 2-й Московской конференции "Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике", проходившей в 2004 г. в Москве, а также на IX Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" имени Е. С. Пятницкого, проходившем в 2006 г. в Москве.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в трех научных статьях [1 - 3] и трех тезисах докладов на конференциях [4 - 6].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, приложения, выводов и списка литературы. Работа изложена на 146 страницах, содержит 31 иллюстрацию. Библиография включает 79 наименований.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №02-01-00704, №05-01-00840, гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2094.2003.1, проекта УР.03.01.018 по программе «Университеты России – фундаментальные исследования» Министерства образования РФ и проекта УР.03.01.141 раздела 1.2. «Университеты России» подпрограммы «Фундаментальные исследования» ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Федерального агентства по образованию РФ и программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006 – 2007)», проект РНП 2.1.1.2381.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, указаны основные положения, выносимые на защиту, структура и объем диссертационной работы.

В **первой главе** рассматривается проблема существования решений терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида со скалярным управлением, доказываются условия управляемости систем со скалярным управлением и одномерной нулевой динамикой.

В разделе 1.1 обсуждаются свойства достижимости и управляемости для нелинейных систем, приводится определение системы, управляемой на данном множестве за данный интервал времени.

В разделе 1.2 изложены результаты по преобразованию аффинных систем со скалярным управлением к эквивалентным системам квазиканонического вида с ρ-мерной нулевой динамикой.

В разделе 1.3 исследуется существование решений терминальных задач для аффинных систем со скалярным управлением

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^{\mathrm{T}}, \quad G(x) = (G_1(x), \ldots, G_n(x))^{\mathrm{T}},$$
$$F_i(x), G_i(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Терминальная задача представляет собой задачу нахождения такого непрерывного управления $u = u(t)$, $t \in [0, t_*]$, которое за время t_* переводит систему (1) из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное $x(t_*) = x_*$.

За основу взято предположение, что аффинная система (1) эквивалентна на множестве Ω регулярной системе квазиканонического вида с ρ-мерной нулевой динамикой

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = z_3,\ \ldots\ \dot{z}_{n-\rho} = f(z, \eta) + g(z, \eta)u \\ \dot{\eta}_1 = q_1(z, \eta),\ \ldots\ \dot{\eta}_\rho = q_\rho(z, \eta), \end{array} \tag{2}$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-\rho})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-\rho}, \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\rho)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{\rho}, \quad (z^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \Phi(x),$$

$f(z, \eta), g(z, \eta) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, функция $g(z, \eta)$ не обращается в нуль в $\mathbb{R}^n$.

Отображение $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ позволяет сформулировать для системы (2) эквивалентную терминальную задачу: найти непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_*]$, переводящее систему (2) за тот же интервал времени из начального состояния

$$\Phi(x_0) = (z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n-\rho,0}, \eta_{10}, \ldots, \eta_{\rho 0})^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_*) = (z_{1*}, z_{2*}, \ldots, z_{n-\rho,*}, \eta_{1*}, \ldots, \eta_{\rho *})^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

В работе получено следующее необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи (3), (4) для системы (2).

Теорема 1. Для того чтобы существовало непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_*]$, являющееся решением терминальной задачи (3),

(4) для регулярной системы (2) с ρ-мерной нулевой динамикой, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $B(t) \in C^{n-\rho}([0,t_*])$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &B(0) = z_{10}, \quad \dot{B}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad B^{(n-\rho-1)}(0) = z_{n-\rho,0}, \\ &B(t_*) = z_{1*}, \quad \dot{B}(t_*) = z_{2*}, \quad \ldots, \quad B^{(n-\rho-1)}(t_*) = z_{n-\rho,*} \end{aligned} \tag{5}$$

и такая, что задача Коши

$$\begin{aligned} &\dot{\eta}_1 = q_1(\overline{B}(t), \eta), \ \ldots, \ \dot{\eta}_\rho = q_\rho(\overline{B}(t), \eta), \\ &\eta_1(0) = \eta_{10}, \ldots, \eta_\rho(0) = \eta_{\rho 0}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\overline{B}(t) = (B(t), \dot{B}(t), \ldots, B^{(n-\rho-1)}(t))^{\text{т}},$$

имеет решение $\eta_1(t), \ldots, \eta_\rho(t)$, определенное при $t \in [0,t_*]$ и удовлетворяющее условиям

$$\eta_1(t_*) = \eta_{1*}, \ldots, \eta_\rho(t_*) = \eta_{\rho *}. \tag{7}$$

В разделе 1.4 рассматриваются вопросы существования решений терминальных задач для системы (2), в которой $\rho = 1$:

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2, \ \dot{z}_2 = z_3, \ \ldots \ \dot{z}_{n-\rho} = f(z,\eta) + g(z,\eta)u \\ &\dot{\eta} = q(z,\eta), \qquad \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Предложен способ поиска функции $B(t)$ из теоремы 1 в семействе многочленов, зависящих от параметра. При любых значениях параметра многочлены удовлетворяют условию (5), а параметр выбирается так, чтобы для решения $\eta(t)$ задачи Коши $\dot{\eta} = q(\overline{B}(t), \eta)$, $\eta(0) = \eta_0$, было выполнено условие $\eta(t_*) = \eta_*$.

В разделе 1.5 содержатся результаты исследования управляемости системы (8). Исследование управляемости рассматривается как проверка существования решений терминальных задач для этой системы. С использованием предложенного способа поиска функции $B(t)$ сформулировано и доказано достаточное условие управляемости системы (8).

Теорема 2. Пусть в системе (8) функция $q(z,\eta)$ представима в виде

$$q(z,\eta) = Q(z)R(\eta), \tag{9}$$

$Q(z)$ имеет вид

$$Q(z) = Q_1(z_1)Q_2(z) + Q_3(z), \quad z = (z_1, \ldots, z_{n-1})^{\text{т}},$$

$Q_1(z_1) \in C(\mathbb{R})$, $Q_2(z), Q_3(z) \in C(\mathbb{R}^{n-1})$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{z_1 \to +\infty} Q_1(z_1) = +\infty, \qquad \lim_{z_1 \to -\infty} Q_1(z_1) = -\infty,$$

функция $Q_2(z)$ положительна, ограничена и отделена от нуля в $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\exists N_1, N_2 > 0 \, \forall z \in \mathbb{R}^{n-1} : \quad N_1 \leqslant Q_2(z) \leqslant N_2,$$

при любом p функция $Q_3(z)$ ограничена снизу на множествах вида $\{z \in \mathbb{R}^{n-1} : z_1 \geqslant p\}$:

$$\forall p \, \exists L_1 \in \mathbb{R} \, \forall z_1 : \; z_1 \geqslant p \; \Rightarrow \; Q_3(z) \geqslant L_1,$$

при любом p функция $Q_3(z)$ ограничена сверху на множествах вида $\{z \in \mathbb{R}^{n-1} : z_1 \leqslant p\}$:

$$\forall p \, \exists L_2 \in \mathbb{R} \, \forall z_1 : \; z_1 \leqslant p \; \Rightarrow \; Q_3(z) \leqslant L_2,$$

функция $R(\eta)$ непрерывна, положительна и ограничена в $\mathbb{R}$:

$$\exists M_R > 0 \, \forall \eta \in \mathbb{R} : \quad 0 < R(\eta) \leqslant M_R.$$

Тогда система (8) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

Также в разделе 1.5 приведен пример аффинной системы третьего порядка, которая не эквивалентна системе канонического вида ни на каком открытом множестве пространства состояний, но тем не менее управляема на всем пространстве состояний за любое конечное время.

В разделе 1.6 доказано достаточное условие управляемости системы (8) для случая, когда функция $q(z, \eta)$ имеет вид (9), а функция $Q(z)$ является многочленом нечетной степени.

Теорема 3. Пусть в системе (8) функция $q(z, \eta)$ представима в виде (9), функция $Q(z)$ является многочленом нечетной степени

$$Q(z) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{n-1}: \\ i_1 + \ldots + i_{n-1} \leqslant 2l+1}} a_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}},$$

в котором слагаемые старшей степени имеют вид

$$z_1^{2l+1} + \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{n-1}: \\ i_1 + \ldots + i_{n-1} = 2l+1}} a_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}},$$

причем в этой сумме, за исключением z_1^{2l+1}, присутствуют лишь слагаемые, в которых сумма показателей степеней переменных с четными индексами нечетна:

$$a_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k + 1,$$

Пусть также функция $R(\eta)$ непрерывна, положительна и ограничена в $\mathbb{R}$. Тогда система (8) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

В разделе 1.7 сформулировано и доказано условие управляемости системы (8) для случая, когда функция $q(z, \eta)$ линейна по η.

Теорема 4. Пусть в системе (8) функция $q(z, \eta)$ имеет вид

$$q(z, \eta) = Q(z) + P(z)\eta,$$

функция $Q(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 либо теоремы 3, функция $P(z)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда система (8) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

В разделе 1.8 результаты, полученные в теоремах 2, 3, обобщены на более широкий класс систем и сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть в системе (8) функция $q(z, \eta)$ определена в $\mathbb{R}^n$, локально липшицева по η и удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial q(z, \eta)}{\partial z_j} \in C(\mathbb{R}^n), \qquad j = \overline{1, n-1},$$

$$\underline{Q}(z) \leqslant q(z, \eta) \leqslant \overline{Q}(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n-1}\ \forall \eta \in \mathbb{R},$$

где функции $\underline{Q}(z)$, $\overline{Q}(z)$ удовлетворяют условиям на функцию $Q(z)$ в теореме 2 либо в теореме 3. Тогда система (8) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал $[0, t_*]$.

Во **второй главе** предлагается метод решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида со скалярным управлением и двумерной нулевой динамикой, доказываются достаточные условия управляемости таких систем.

В разделе 2.1 рассматриваются аффинные системы (1) со скалярным управлением, эквивалентные на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярным системам квазиканонического вида с двумерной нулевой динамикой:

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = z_3,\ \ldots,\ \dot{z}_{n-2} = f(z, \eta) + g(z, \eta)u \\ &\dot{\eta}_1 = q_1(z, \eta),\ \dot{\eta}_2 = q_2(z, \eta), \end{aligned} \tag{10}$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$

$f(z,\eta), g(z,\eta) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $g(z,\eta)$ не обращается в нуль в $\mathbb{R}^n$.

Для исследования управляемости системы (10) используется проверка существования решений терминальных задач с помощью теоремы 1. Предложено искать функцию $B(t)$ в семействе многочленов, зависящих от двух параметров. При всех значениях параметров для многочленов выполнено условие (5), а параметры выбираются так, чтобы решение задачи Коши (6) удовлетворяло условию (7) (в (5)–(7) считаем, что $\rho = 2$).

В разделе 2.2 с использованием предложенного способа поиска функции $B(t)$ получено достаточное условие управляемости системы (10).

Теорема 6. Пусть в системе (10) функции $q_i(z,\eta)$, $i = 1, 2$, представимы в виде

$$q_i(z,\eta) = Q_i(z) R_i(\eta_i), \quad i = 1, 2,$$

функции $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ являются многочленами степеней $2l_1 + 1$, $2l_2 + 1$, $l_1 \neq l_2$, слагаемые старшей степени в этих многочленах имеют вид

$$z_1^{2l_1+1} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}=2l_1+1}} a_{i_1,\ldots,i_{n-2}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-2}^{i_{n-2}}, \tag{11}$$

$$z_1^{2l_2+1} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-2}:\\ i_1+\ldots+i_{n-2}=2l_2+1}} b_{i_1,\ldots,i_{n-2}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-2}^{i_{n-2}}, \tag{12}$$

причем в этих суммах, за исключением $z_1^{2l_1+1}$ в первом многочлене и $z_1^{2l_2+1}$ во втором, присутствуют лишь слагаемые, в которых сумма показателей степеней переменных с четными индексами нечетна:

$$a_{i_1,\ldots,i_{n-2}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k_1 + 1, \tag{13}$$

$$b_{i_1,\ldots,i_{n-2}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k_2 + 1. \tag{14}$$

Пусть также функции $R_i(\eta_i)$, $i = 1, 2$, непрерывны, положительны и ограничены в $\mathbb{R}$:

$$\exists M_{Ri} > 0\ \forall \eta_i \in \mathbb{R}: \quad 0 < R_i(\eta_i) \leqslant M_{Ri}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда система (10) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

В разделе 2.3 результаты, полученные в теореме 6, обобщены на более широкий класс систем и сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть в системе (10) функции $q_1(z,\eta)$, $q_2(z,\eta)$ определены в $\mathbb{R}^n$, локально липшицевы по η и удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial q_i(z,\eta)}{\partial z_j} \in C(\mathbb{R}^n), \qquad i=1,2, \quad j=\overline{1,n-2},$$

для всех $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\eta \in \mathbb{R}^2$ выполнены неравенства

$$\underline{Q}_i(z) \leqslant q_i(z,\eta) \leqslant \overline{Q}_i(z), \quad i=1,2,$$

где функции $\underline{Q}_1(z)$, $\overline{Q}_1(z)$ являются многочленами степени $2l_1+1$, функции $\underline{Q}_2(z)$, $\overline{Q}_2(z)$ — многочленами степени $2l_2+1$, $l_1 \neq l_2$, причем слагаемые старшей степени в этих многочленах имеют вид (11), (12) и удовлетворяют условиям (13), (14). Тогда система (10) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0,t_*]$.

В **третьей главе** рассматривается проблема существования решений терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида с векторным управлением, доказываются условия управляемости систем с векторным управлением, с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

В разделе 3.1 изложены результаты по преобразованию аффинных систем с векторным управлением к эквивалентным системам квазиканонического вида с ρ-мерной нулевой динамикой.

В разделе 3.2 получено необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для регулярной системы квазиканонического вида с векторным управлением и ρ-мерной нулевой динамикой.

В разделе 3.3 сформулированы и доказаны достаточные условия управляемости для систем с векторным управлением и одномерной нулевой динамикой, аналогичные условиям теорем 3–5.

В разделе 3.4 рассматривается регулярная система квазиканонического вида с двумерным управлением и двумерной нулевой динамикой:

$$\begin{aligned} &\dot z_1^i = z_2^i,\ \ldots,\ \dot z_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i \\ &\dot z_{r_i}^i = f_i(z,\eta) + g_{i1}(z,\eta)u_1 + g_{i2}(z,\eta)u_2, \quad i=1,2, \\ &\dot\eta_1 = q_1(z^1,z^2,\eta),\ \dot\eta_2 = q_2(z^1,z^2,\eta), \end{aligned} \tag{15}$$

$$z^i = (z_1^i,\ldots,z_{r_i}^i)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{r_i}, \ \ r_1+r_2=n-2, \ \ z=(z^{1^{\mathrm{т}}}, z^{2^{\mathrm{т}}})^{\mathrm{т}}, \ \ \eta=(\eta_1,\eta_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2.$$

Сформулированы и доказаны следующие достаточные условия управляемости таких систем.

Теорема 8. Пусть в системе (15) функции $q_s(z^1, z^2, \eta)$, $s = 1, 2$, определены в $\mathbb{R}^n$, локально липшицевы по η и удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial q_s(z^1, z^2, \eta)}{\partial z_j^i} \in C(\mathbb{R}^n), \qquad i, s = 1, 2, \quad j = \overline{1, r_i},$$

для всех $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\eta \in \mathbb{R}^2$ выполнены неравенства

$$\underline{Q}_s(z^s) \leqslant q_s(z^1, z^2, \eta) \leqslant \overline{Q}_s(z^s), \quad s = 1, 2,$$

где функции $\underline{Q}_s(z^s)$, $\overline{Q}_s(z^s)$ удовлетворяют условиям на функцию $Q(z)$ в теореме 3. Тогда система (15) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

Теорема 9. Пусть в системе (15) функции $q_s(z^1, z^2, \eta)$, $s = 1, 2$, представимы в виде

$$q_s(z^1, z^2, \eta) = Q_s(z^1, z^2) R_s(\eta_s), \quad s = 1, 2,$$

функции $Q_1(z^1, z^2)$, $Q_2(z^1, z^2)$ являются многочленами степени $2l + 1$, слагаемые старшей степени в этих многочленах имеют вид

$$\begin{aligned} &A_{s1}(z_1^1)^{2l+1} + A_{s2}(z_1^2)^{2l+1} + \\ &\quad + \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{r_1+r_2}: \\ i_1 + \ldots + i_{r_1+r_2} = 2l+1}} a^{(s)}_{i_1, \ldots, i_{r_1+r_2}} (z_1^1)^{i_1} \ldots (z_{r_1}^1)^{i_{r_1}} (z_1^2)^{i_{r_1+1}} \ldots (z_{r_2}^2)^{i_{r_1+r_2}}, \end{aligned} \tag{16}$$

$s = 1, 2$, причем в этих суммах, за исключением слагаемых с $(z_1^1)^{2l+1}$ и $(z_1^2)^{2l+1}$, присутствуют лишь члены, в которых сумма показателей степеней переменных с четными нижними индексами нечетна:

$$a^{(s)}_{i_1, \ldots, i_{r_1+r_2}} \neq 0 \Rightarrow i_2 + i_4 + \ldots + i_{r_1+2} + i_{r_1+4} + \ldots = 2k_1 + 1. \tag{17}$$

Пусть также для чисел A_{si} из (16) выполнено неравенство

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{18}$$

а функции $R_s(\eta_s)$, $s = 1, 2$, непрерывны, положительны и ограничены в $\mathbb{R}$. Тогда система (15) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

Теорема 10. Пусть в системе (15) функции $q_s(z^1, z^2, \eta)$, $s = 1, 2$, определены в $\mathbb{R}^n$, локально липшицевы по η,

$$\frac{\partial q_s(z^1, z^2, \eta)}{\partial z^i_j} \in C(\mathbb{R}^n), \qquad i, s = 1, 2, \quad j = \overline{1, r_i},$$

для всех $z \in \mathbb{R}^{n-2}$ и $\eta \in \mathbb{R}^2$ выполнены неравенства

$$\underline{Q}_s(z^1, z^2) \leqslant q_s(z^1, z^2, \eta) \leqslant \overline{Q}_s(z^1, z^2), \quad s = 1, 2,$$

где функции $\underline{Q}_s(z^1, z^2)$, $\overline{Q}_s(z^1, z^2)$, $s = 1, 2$, являются многочленами степени $2l + 1$, в которых слагаемые старшей степени имеют вид (16) и удовлетворяют условию (17). Пусть также выполнено условие (18). Тогда система (15) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_*]$.

В разделе 3.5 приведено обобщение результатов раздела 3.4 на системы с m-мерным управлением, $m > 2$, и двумерной нулевой динамикой. Получены достаточные условия управляемости таких систем, аналогичные условиям теорем 8–10.

В **приложении** на основе исследования аффинной системы с нулевой динамикой решается задача построения периодического движения по лестнице пятизвенного шагающего робота.

В разделе П.1 приведены известные результаты по преобразованию аффинных систем с векторным выходом и векторным управлением к нормальной форме.

Раздел П.2 посвящен описанию модели плоского перемещения по лестнице пятизвенного двуногого робота. Движение робота по лестнице представлено в виде последовательной смены двух фаз:

1) фазы одноопорного движения, характеризующейся тем, что с поверхностью, по которой перемещается робот, соприкасается лишь одна нога, называемая опорной, при этом точка контакта остается неподвижной;

2) фазы перехода робота с одной ноги на другую, во время которой нога, бывшая на предыдущей фазе переносимой, ударяется о поверхность и становится опорной, а нога, бывшая опорной, отрывается от поверхности и становится переносимой.

Под управляющими воздействиями понимаются моменты в шарнирах, соединяющих соседние звенья робота.

На фазе одноопорного движения поведение робота описывается аффинной системой с четырехмерным управлением:

$$\dot{x} = F(x) + G_1(x)u_1 + \ldots + G_4(x)u_4, \tag{19}$$

где $x \in \mathbb{R}^{10}$ – вектор состояния, $u_i \in \mathbb{R}$ – управления, $i = \overline{1,4}$.

Фаза перехода при движении по лестнице наступает, когда переносимая нога достигает поверхности следующей ступени, на которую должен подняться робот. Это условие записано в системе координат с центром в конце опорной ноги и имеет вид

$$x^- \in S, \text{ где } S = \{x: \, Z_1 = l_Z, \, X_1 > X_{\mathrm{Q}}\},$$

где X_{Q} – абсцисса точки Q, соответствующей началу следующей ступени, на которую должен подняться робот; X_1 и Z_1 – абсцисса и ордината конца переносимой ноги, l_Z – высота ступени.

В работе приняты следующие предположения относительно поведения робота на фазе перехода: удар переносимой ноги о поверхность ступени абсолютно неупругий, за время удара положение робота не меняется, скорости всех звеньев робота меняются скачкообразно. С учетом сделанных предположений поведение робота на фазе перехода описывается алгебраическим соотношением, связывающим состояния x^-, x^+ робота в моменты до и после удара:

$$x^+ = \Delta(x^-). \tag{20}$$

Модель движения робота с учетом (19) и (20) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} &= F(x) + G_1(x)u_1 + \ldots + G_4(x)u_4, & x^- \notin S, \\ x^+ &= \Delta(x^-), & x^- \in S. \end{cases} \tag{21}$$

В разделе П.3 на основе исследования уравнений нулевой динамики строится периодическое движение робота по лестнице.

Изучение поведения человека во время ходьбы позволяет выявить некоторые особенности, присущие большинству людей при движении по лестнице. Для количественного описания этих характеристик предложен четырехмерный выход системы (19) $y_1 = h_1(x), \ldots, y_4 = h_4(x)$, построенный так, что желаемому поведению робота соотвествует тождественное равенство выхода нулю.

Найдена замена переменных

$$(z^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \Phi(x), \quad z = (z^{1^{\mathrm{T}}}, \ldots, z^{4^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}, \quad z^i = (z^i_1, z^i_2)^{\mathrm{T}}, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}},$$

преобразующая систему (19) с этим выходом к нормальной форме с двумерной нулевой динамикой:

$$\begin{aligned} &\dot{z}^i_1 = z^i_2, \\ &\dot{z}^i_2 = f_i(z,\eta) + g_{i1}(z,\eta)u_1 + \ldots + g_{i4}(z,\eta)u_4, \quad i = \overline{1,4} \\ &\dot{\eta}_1 = q_1(z,\eta), \, \dot{\eta}_2 = q_2(z,\eta), \\ &y_1 = z^1_1, \, \ldots, \, y_4 = z^4_1. \end{aligned} \tag{22}$$

Управление

$$u = g^{-1}(z,\eta)[v(z) - f(z,\eta)], \tag{23}$$

$$u = (u_1, \ldots, u_4)^{\text{т}}, \quad f(z,\eta) = (f_1(z,\eta), \ldots, f_4(z,\eta))^{\text{т}},$$

$g(z,\eta)$ – невырожденная квадратная матрица с элементами $g_{ij}(z,\eta)$, $i,j = \overline{1,4}$,

$$v(z) = (v_1(z), \ldots, v_4(z))^{\text{т}}, \quad v_i(z) = \frac{1}{\epsilon^2}\psi_i(z_1^i, \epsilon z_2^i), \quad i = \overline{1,4},$$

$$\psi(\zeta_1,\zeta_2) = -\operatorname{sign}(\zeta_2)|\zeta_2|^{\kappa} - \operatorname{sign}(\phi(\zeta_1,\zeta_2)|\phi(\zeta_1,\zeta_2)|^{\frac{\kappa}{2-\kappa}},$$

$$\phi(\zeta_1,\zeta_2) = \zeta_1 + \frac{1}{2-\kappa}\operatorname{sign}(\zeta_2)|\zeta_2|^{2-\kappa}, \quad 0 < \kappa < 1,\ \epsilon > 0,$$

стабилизирует в целом за конечное время нулевое решение $z = 0$ подсистемы, образованной первыми восемью уравнениями этой системы (S.P. Bhat, D.S. Bernstein).

Из множества решений системы (21), замкнутой управлением (23), можно выделить единственное, если задать начальные условия на переменные состояния в некоторый момент времени. В работе решается задача поиска начальных условий в момент перед ударом, которые соответствуют периодическому движению робота. Для этой цели составлены и проанализированы уравнения нулевой динамики. На фазе одноопорного движения уравнения нулевой динамики имеют вид

$$\dot{\eta}_1 = \alpha(\eta_1)\eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = \beta(\eta_1). \tag{24}$$

Условие наступления фазы перехода в переменных η_1, η_2 имеет вид $\eta_1^- = l_X/2$, где l_X – длина ступени. Основное соотношение фазы перехода распадается в два независимых выражения, первое из которых $\eta_1^+ = -l_X/2$ позволяет определить значение переменной η_1 в момент после удара, а второе $\eta_2^+ = \delta\eta_2^-$ задает изменение за время удара переменной η_2. Здесь δ – число, определяемое параметрами задачи.

Для построения периодического решения система (24) преобразована в эквивалентное дифференциальное уравнение первого порядка. Найдено решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\eta_2(-l_X/2) = \delta\eta_2^-$. Из условия периодичности $\eta_2(l_X/2) = \eta_2^-$ получено значение переменной η_2 в момент перед ударом, соответствующее периодическому движению робота:

$$\eta_{2*}^- = \operatorname{sign}(\alpha(l_X/2))\left(\frac{F_\eta(l_X/2)}{1-\delta^2}\right)^{1/2},$$

где

$$F_\eta(\eta_1) = 2 \int\limits_{-l_X/2}^{\eta_1} \frac{\beta(\eta)}{\alpha(\eta)} d\eta.$$

Вектор состояния робота в момент перед ударом, соответствующий периодическому движению, находится по формуле

$$x_*^- = \Phi^{-1}\Big((0,0,0,0,0,0,0,0,l_X/2,\eta_{2*}^-)^{\text{т}} \Big).$$

Предложен способ проверки построенного периодического движения на устойчивость, основанный на исследовании состояний робота в последовательные моменты перед ударом переносимой ноги о поверхность ступени.

В разделе П.4 приведены результаты математического моделирования, подтверждающие работоспособность предложенного алгоритма.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Сформулируем основные выводы и результаты проведенных исследований.

1. Доказаны необходимые и достаточные условия существования решений терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида со скалярным и векторным управлением.

2. Предложен метод решения терминальных задач для регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

3. Доказаны достаточные условия управляемости регулярных систем квазиканонического вида с одномерной и двумерной нулевой динамикой.

4. Результаты математического моделирования показали эффективность предложенного способа решения терминальных задач. Доказанные условия управляемости подтверждают возможности метода решать терминальные задачи для широкого класса систем.

ТРУДЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Фетисов Д.А. Управление плоским перемещением двуногого пятизвенного робота // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – 2003. – Вып. 3. – С. 201 - 216.

2. Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Фетисов Д.А. Управление плоским перемещением двуногого пятизвенного робота по лестнице // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. – 2006. – № 1. – С.38 - 64.

3. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. – 2006. – № 3. – С.12 - 30.

4. Фетисов Д.А. Управление плоским перемещением пятизвенного двуногого робота по лестнице // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов VIII международного семинара. – Москва, 2004. – С. 186 - 187.

5. Фетисов Д.А., Ткачев С.Б. Исследование системы уравнений нулевой динамики для пятизвенного шагающего механизма // Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике: Тезисы докладов 2-й Московской конференции. – Москва, 2004. – С. 102 - 103.

6. Фетисов Д.А. Управляемость регулярных систем квазиканонического вида // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IX международного семинара. – Москва, 2006. – С. 274 - 275.

Подписано к печати . Заказ № .
Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.