

На правах рукописи

Троицкий Артём Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА
ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ
РОТОРОВ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете
имени Н.Э. Баумана

Научный руководитель: д.т.н., проф. Темис Ю.М.

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., проф. Бондарь В.С.
д.ф.-м.н., проф. Галанин М.П.

Ведущая организация: НТЦ им. А. Люльки
ОАО НПО «Сатурн»

Защита диссертации состоится «____» _____ 2006 года
в ____ часов ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15
при Московском государственном техническом университете имени Н.Э.
Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью
организации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская
ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э.
Баумана.

Автореферат разослан «____» _____ 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящий момент оптимальное проектирование занимает одну из ключевых позиций при создании современных конкурентоспособных конструкций. Современные популярные алгоритмы математического программирования, применяемые в оптимальном проектировании, требуют расчета производных функций цели и ограничений по параметрам проектирования. В связи с этим актуальной задачей является разработка методик точного и эффективного вычисления производных свойств системы по параметрам проектирования. Расчет этих производных называется анализом системы на чувствительность.

Задача уменьшения веса двигателя тесно связана с уменьшением веса вращающихся дисков. Анализ чувствительности позволяет осуществлять весовую оптимизацию дисков без упрощающих предположений о распределении напряжений в оптимальном диске с высокой скоростью численного счета.

В результате попыток отказаться от использования конструкторской параметризации появилась топологическая оптимизация. Этот подход позволяет получить эскиз детали, оптимальной по выбранному критерию без привлечения конструкторской параметризации. Топологическая оптимизация характеризуется высокой размерностью вектора параметров проектирования, что вынуждает применять полуаналитические методики расчета производных по параметрам проектирования. Топологическая оптимизация осесимметричных конструкций является недостаточно исследованным направлением и представляет интерес для решения задач, связанных с разработкой новых схем роторов.

Теория оболочек может быть использована для приближенной оценки работоспособности роторов, являющихся важной частью турбомашин. При использовании модели оболочек время счета на несколько порядков меньше, чем при расчете ротора по двумерной модели с использованием осесимметричных конечных элементов. Модель ротора на основе оболочек вращения значительно проще построить, что делает оболочные модели перспективными для предварительной оптимизации роторных конструкций. В настоящее время существует ограниченное число работ, посвященных оптимизации тонкостенных вращающихся осесимметричных конструкций, поэтому применение анализа чувствительности в задачах оптимального проектирования роторов, рассчитываемых по модели оболочек вращения, является актуальной задачей.

Цель работы. Целью диссертационной работы является разработка и применение эффективных алгоритмов анализа чувствительности для оптимизации конструкций роторов.

Научная новизна.

1. Разработана методика оптимизации дисков турбомашин с применением полуаналитического анализа чувствительности, с ограничениями на коэффициенты запаса по пределу прочности, величину разрушающей частоты вращения и момент инерции.
2. Разработан алгоритм топологической оптимизации осесимметричных вращающихся деталей с учетом неосесимметричного изгиба.
3. Разработана методика оптимизации осесимметричных оболочечных систем с привлечением кольцевых элементов и полуаналитическим анализом чувствительности без использования численного дифференцирования.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные в работе, позволяют создавать программные комплексы для эффективной предварительной оптимизации конструкций роторов.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Алгоритм полуаналитического анализа чувствительности в бесконечномерном пространстве состояний, примененный к решению задачи оптимального проектирования вращающегося диска с учетом конструктивных и прочностных ограничений.
2. Методика решения задач топологической оптимизации осесимметричных конструкций с учетом неосесимметричного изгиба.
3. Алгоритм дискретного анализа чувствительности для осесимметричных оболочек и колец, моделируемых на основе метода конечных элементов.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на VI-й международной конференции «Научно – технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения», СПбГПУ, СПб, 2005; на II-й международной научно-технической конференции «Авиадвигатели XXI века», ЦИАМ им Баранова, Москва, 2006; на научно – технической конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева «Фундаментальные и прикладные проблемы механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2006.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты работы опубликованы в трех статьях [1, 5, 6] и трех тезисах докладов на конференциях [2, 3, 4].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включён лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Рекомендации к внедрению. Методы, алгоритмы и программы рекомендуются к внедрению и использованию в ЦИАМ им. П.И. Баранова,

ОКБ авиадвигателестроительной и аэрокосмической отраслей; проектных организациях и предприятиях, занимающихся разработкой турбомашин. Теоретические материалы диссертации рекомендуется включить в учебные курсы САПР и методы оптимизации на специальности «Прикладная математика» в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 163 страницах, содержит 14 таблиц и 63 иллюстрации. Библиография включает 108 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе представлен обзор методов анализа чувствительности и алгоритмов оптимизации, применяемых в задачах оптимизации конструкций. Рассмотрена обобщенная математическая постановка задачи оптимального проектирования

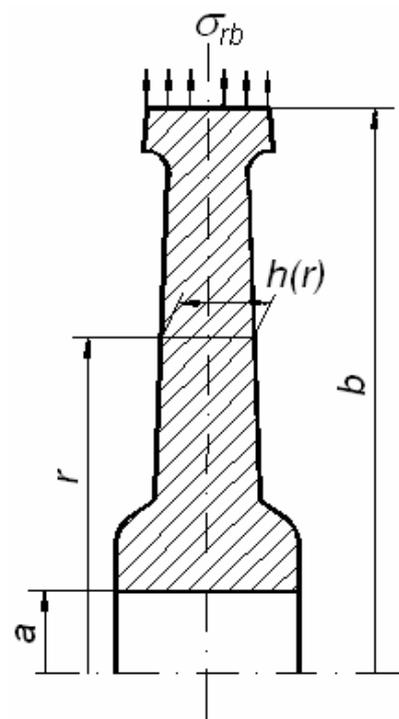
$$\begin{aligned} f(\vec{h}, \vec{y}(\vec{h})) &\rightarrow \min, \\ h_i^{\min} &\leq h_i \leq h_i^{\max}, & i = 1, 2, \dots, n; \\ g_j(\vec{h}, \vec{y}(\vec{h})) &= 0, & j = 1, 2, \dots, m_e; \\ g_l(\vec{h}, \vec{y}(\vec{h})) &\leq 0, & l = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{h} – параметры проектирования, $\vec{y}(\vec{h})$ – переменные состояния (отклики) системы. Приводится классификация параметров проектирования и рассматриваются различные подходы, применяемые для вычисления производных откликов системы по управляющим параметрам.

Анализируются алгоритмы оптимизации, и уделяется особое внимание: методу линеаризации (SLP), методу последовательного квадратичного программирования (SQP) и методам выпуклой аппроксимации (SCP).

Во второй главе исследуются задачи оптимизации дисков с применением полуаналитического анализа чувствительности в бесконечномерном пространстве состояний.

Рассматривается модель неравномерно нагретого по радиусу диска, симметричного относительно срединной



поверхности с приложенной осесимметричной нагрузкой $q(r)$. В работах И.В. Демьянушко и И.А. Биргера оптимизация дисков осуществлялась с использованием только методов формального поиска, что приводило к большому времени счета. Следует отметить, что решения задач оптимизации, полученные методами формального поиска, могут быть неоптимальными. В работах И.В. Лурье, В.Б. Гринева и А.П. Филиппова применялся принцип максимума к оптимизации вращающихся дисков, но данный подход проблематично расширить на широкий класс задач оптимизации конструкций с учетом конструктивных ограничений. В.П. Малков, А.Г. Угодчиков предлагали проектировать равнопрочные диски. Однако в задачах с учетом неравномерного нагрева и различных конструктивных ограничений равнопрочный проект невозможен и, следовательно, не является оптимальным. Полуаналитический анализ чувствительности позволяет разработать алгоритм оптимизации без упрощающих предположений о распределении напряжений в оптимальной конструкции и существенно ослабить зависимость времени расчета градиентов функций цели и ограничений по параметрам проектирования от размерности n вектора \vec{h} .

Уравнение равновесия диска приводится к краевой задаче для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[J] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & \frac{d}{dr} - b_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \eta_1,$$

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \eta_2,$$

где $a_1 = -\mu/r$, $b_1 = (1 - \mu^2)/Er$, $c_1 = \alpha(1 + \mu)\Delta T$, $a_2 = Eh/\mu$, $b_2 = \mu/r$, $c_2 = (-E\alpha\Delta T - qr)h$, $\Delta T(r) = T(r) - T_0$, $T(r)$ - температура в расчетной точке диска, T_0 - температура в отсчетной конфигурации, E - модуль Юнга, μ - коэффициент Пуассона, α - коэффициент температурного расширения, $q(r)$ - зависимость величины радиальной нагрузки от радиуса, $h(r)$ - зависимость толщины диска от радиуса. В уравнении (2) введены переменные состояния $y_1 = u$, $y_2 = \sigma_r hr$. Ставится задача весовой оптимизации вращающегося диска при наличии конструктивных ограничений и ограничений на максимальную величину интенсивности напряжений

$$F(h) = \int_a^b 2\pi \rho r h dr \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$h(r) \in [h_{\min}, h_{\max}],$$

$$\sigma_i(r) \leq [\sigma], \quad \forall r \in [a, b].$$

Функцией управления является $h(r)$. Локальное ограничение на величину интенсивности напряжений для каждой точки диска $\sigma_i(r) \leq [\sigma]$ сводится к одному интегральному ограничению

$$F_1[h] = \int_a^b \left[\left(\frac{\sigma_i(r)}{\sigma} \right)^2 - 1 \right]_+^2 dr = \int_a^b \Phi_1(y_1, y_2, h, r) dr = 0, \quad (4)$$

где введено обозначение $[f]_+ = \max\{0, f\}$ для любой функции f .

Для перехода от управляющей функции к вектору параметров проектирования вводится аппроксимация $\tilde{h}(r) = \sum_{k=1}^N B_k(r) h_k$, где $\vec{h} = (h_1, \dots, h_N)^T$ - вектор параметров проектирования, $B_k(r)$ - набор некоторых функций. Для функции $e(\vec{h}) = F_1[\tilde{h}]$ показано, что если вариацию функционала F_1

представить в виде $\delta F_1[\delta h] = \int_a^b w_1(r) \delta h(r) dr$, то $\frac{\partial e}{\partial h_k} = \int_a^b w_1(r) B_k(r) dr$.

Установлено, что вариацию функционала (4) можно записать следующим образом

$$\delta F_1[\delta h] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial h} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial h} \psi_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \right\} \delta h(r) dr = \int_a^b w_1(r) \delta h(r) dr, \quad (5)$$

$$w_1(r) = \frac{\partial f_1}{\partial h} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial h} \psi_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial h},$$

где $w_1(r)$ - градиент функционала F_1 , $\vec{\psi}$ - сопряженная функция, являющаяся решением сопряженной краевой задачи

$$J^* \vec{\psi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vec{y}}, \quad J^* = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dr} - a_1 & -a_2 \\ -b_1 & -\frac{d}{dr} - b_2 \end{bmatrix}, \quad (\vec{\psi}^T, \delta \vec{y}) \Big|_a^b = 0. \quad (6)$$

Приведены соотношения, необходимые для применения метода проекции градиента к задаче оптимизации вращающегося диска (3) с использованием выражения для $w_1(r)$ и рассмотрено расширение алгоритма на случай наличия нескольких интегральных ограничений.

Выведено выражение для градиента функционала F_1 при использовании вместо краевой задачи (2) вариационного уравнения равновесия диска

$$\int_a^b h(r) (\sigma_r \bar{\epsilon}_r + \sigma_\vartheta \bar{\epsilon}_\vartheta) r dr = N_b \bar{u}(b) b - N_a \bar{u}(a) a + \int_a^b h(r) q(r) \bar{u}(r) r dr, \quad (7)$$

где $u(r)$ – радиальные перемещения, $\varepsilon_r = \varepsilon_r(u) = du/dr$, $\varepsilon_\vartheta = \varepsilon_\vartheta(u) = u/r$, $\bar{u}(r)$ – виртуальные перемещения, $\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r(\bar{u}) = d\bar{u}/dr$ и $\bar{\varepsilon}_\vartheta = \varepsilon_\vartheta(\bar{u}) = \bar{u}/r$ – приращения деформаций на виртуальных перемещениях. В этом случае откликами являются радиальное перемещение u и производная $u_r = du/dr$.

Функционал F_1 принимает вид $F_1[h] = \int_a^b \Psi_1(u, du/dr, h, r) dr$. Вводится сопряженная функция $\lambda(r)$ как решение сопряженного вариационного уравнения

$$\int_a^b h(r) (\sigma_r(\lambda) \varepsilon_r(\bar{\lambda}) + \sigma_\vartheta(\lambda) \varepsilon_\vartheta(\bar{\lambda})) r dr = \int_a^b \left\{ \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} \bar{\lambda} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_r} \frac{d\bar{\lambda}}{dr} \right\} dr. \quad (8)$$

Градиент интегрального функционала F_1 , выраженный через решения вариационного уравнения $u(r)$ и сопряженного вариационного уравнения $\lambda(r)$, имеет вид

$$w_1(r) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial h} - r \sigma_r(u) \varepsilon_r(\lambda) - r \sigma_\vartheta(u) \varepsilon_\vartheta(\lambda) + r q \lambda. \quad (9)$$

Предлагаемый алгоритм оптимизации сравнивается с алгоритмом оптимизации без применения полуаналитического анализа чувствительности. Показано, что полуаналитический анализ чувствительности позволяет существенно уменьшить время расчета градиентов и тем самым в несколько раз сократить время получения оптимальной конструкции. В качестве алгоритмов оптимизации используются метод проекции градиента и метод последовательного квадратичного программирования (SQP).

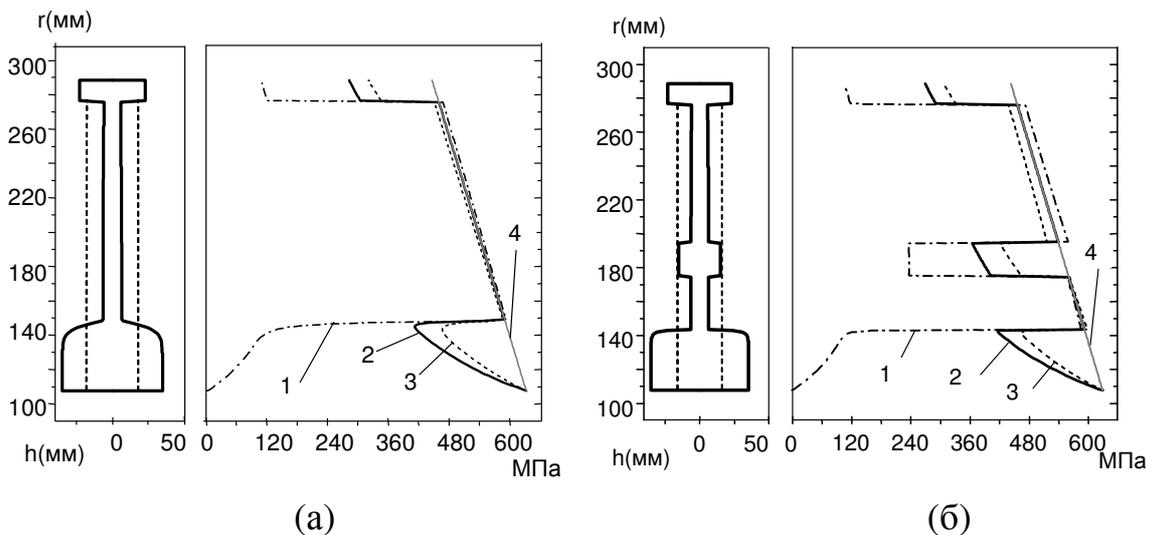


Рис. 1. Результат оптимизации диска методом проекции градиента (сплошная линия), начальное приближение (пунктирная линия) и распределение напряжений в оптимальной конструкции (1- σ_r , 2- σ_i , 3- σ_ϑ , 4- $[\sigma]$)

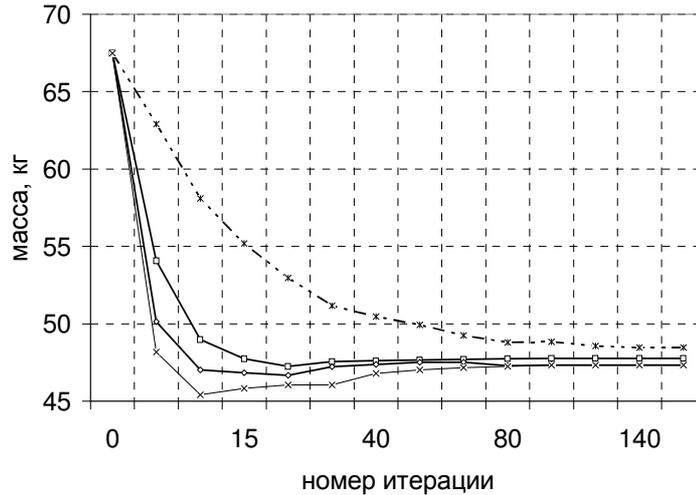


Рис. 2. Зависимость массы проекта от итерации при использовании методов SQP (пунктирная линия) и проекции градиента (сплошная линия) с различными значениями начального шага

Разработанная методика позволяет учесть пластические деформации в конструкции диска при использовании метода переменных параметров упругости.

Представлены результаты оптимизации диска при наличии ограничения на максимальную толщину ступицы (рис. 1а) с учетом неравномерного нагрева. Рассмотрена задача с дополнительным конструктивным ограничением в виде кольца (рис. 1б). График на рис. 2 показывает более высокую скорость сходимости метода проекции градиента в данной задаче по сравнению с методом SQP.

Рассматривается учет ограничений на величину предельной частоты вращения диска при разрушении по меридиональному сечению и по окружному направлению по моделям, предложенным в работе И.В. Демьянушко и И.А. Биргера. Для этого задается ограничение на величину коэффициента запаса по предельной частоте вращения при разрушении диска

по меридиональному сечению в виде $\frac{n_1^*}{n} \geq k_{b1}$, где n_1^* - разрушающая частота

вращения при первом механизме потери несущей способности, n - рабочая частота вращения, k_{b1} - коэффициент запаса. Также устанавливается ограничение на величину коэффициента запаса при разрушении диска по

окружному направлению $\frac{n_2^*(r)}{n} \geq k_{b2}$ для всех $r \in [a, b]$, n_2^* - разрушающая

частота вращения при втором механизме потери несущей способности, k_{b2} - соответствующий коэффициент запаса. Эти условия приводят к двум интегральным ограничениям

$$F_{b1}[h] = k_{b1}^2 - \left(\frac{n_1^*}{n}\right)^2 \leq 0, \quad n_1^* = n \sqrt{\frac{\int_a^b \sigma_B(r)h(r)dr}{\rho\omega^2 J + N_b b}}, \quad J = \int_a^b r^2 h dr, \quad (10)$$

и

$$F_{b2}[h] = \int_a^b ([G_{b2}(h, r)]_+)^2 dr = 0, \quad (11)$$

$$G_{b2}(r) = 1 - \frac{1}{k_{b2}^2} \frac{\int_a^b \sigma_B(\xi)h(\xi)d\xi + \sigma_B(r)h(r)r}{\rho\omega^2 \int_r^b \xi^2 h(\xi)d\xi + N_b b}, \quad (12)$$

где ω - угловая скорость вращения, σ_B - предел прочности материала диска, ρ - плотность материала диска, $N_b = \sigma_{rb}h_b$ - величина нагрузки, приложенной к ободу. Для того, что бы избавиться от интегралов в функции $G_{b2}(r)$, вводятся две дополнительные переменные состояния x_1 и x_2 , являющиеся решениями следующей системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dr} &= z_1(h) = \sigma_B(r)h(r), \\ \frac{dx_2}{dr} &= z_2(h) = r^2 h(r), \\ x_1(b) &= x_2(b) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда

$$G(x_1, x_2, h, r) = 1 - \frac{1}{k_{b2}^2} \cdot \frac{-x_1 + \sigma_B r h}{-\rho\omega^2 \cdot x_2 + N_b b}, \quad (14)$$

$$F_{b2}[h] = \int_a^b \Phi_{b2}(x_1, x_2, h, r) dr. \quad (15)$$

Функционал F_{b1} представляется в виде

$$\begin{aligned} F_{b1}[h] &= \tilde{F}(F_\sigma[h], F_J[h]), \\ F_\sigma[h] &= \int_a^b \sigma_B(r)h(r)dr, \quad F_J[h] = \int_a^b r^2 h(r)dr. \end{aligned} \quad (16)$$

Градиент функционала F_{b1} вычисляется по формуле дифференцирования сложной функции

$$w_{b1}(r) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial F_\sigma} w_\sigma(r) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial F_J} w_J(r), \quad (17)$$

где $w_\sigma(r) = \sigma_B(r)$, $w_J(r) = r^2$ - градиенты функционалов $F_\sigma[h]$ и $F_J[h]$. Для вычисления градиента функционала F_{b2} вводится сопряженная система

$$\frac{dp_1}{dr} = -\frac{\partial \Phi_{b2}}{\partial x_1}, \quad \frac{dp_2}{dr} = -\frac{\partial \Phi_{b2}}{\partial x_2}, \quad (18)$$

$$p_1(a) = p_2(a) = 0.$$

Градиент $w_{b2}(r)$ функционала F_{b2} рассчитывается с использованием сопряженных переменных p_1, p_2

$$w_{b2} = \frac{\partial \Phi_{b2}}{\partial h} + p_1 \frac{\partial z_1}{\partial h} + p_2 \frac{\partial z_2}{\partial h} = \frac{\partial \Phi_{b2}}{\partial h} + p_1 \sigma_B + p_2 r^2. \quad (19)$$

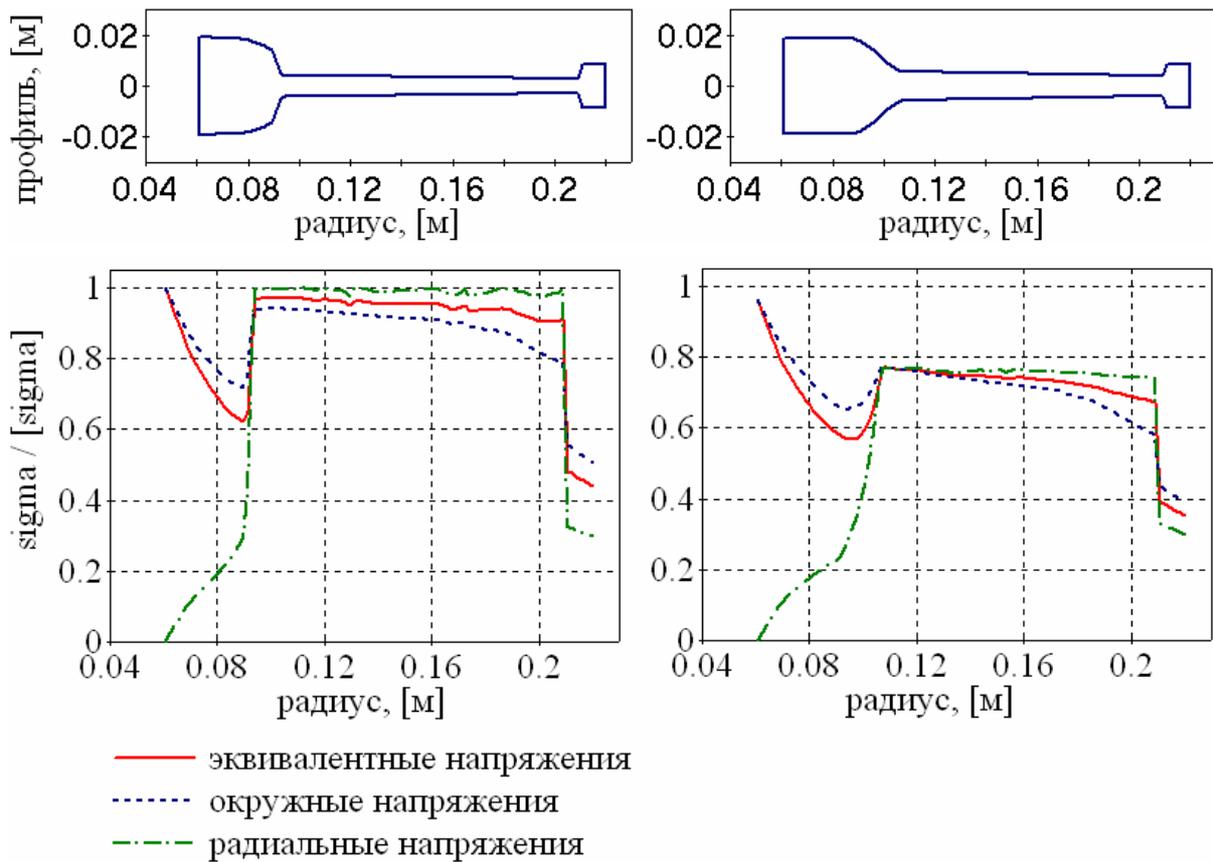


Рис. 3. Результат оптимального проектирования диска с ограничениями по величине коэффициентов запаса k_{Mr} , $k_{M\varphi}$ (а) и k_{b1} , k_{b2} (б)

Исследуется задача оптимизации неравномерно нагретого диска при наличии всех четырех прочностных ограничений. Представлены результаты

оптимизации при учете только ограничений на величину напряжений (рис. 3а) и только на величину разрушающей частоты вращения (рис. 3б). Выявлено, что в зависимости от заданных значений различных коэффициентов запаса, некоторые ограничения являются неактивными и не влияют на форму оптимальной конструкции.

Рассматривается методика оптимизация вращающихся дисков при наличии дополнительного ограничения на величину момента инерции конструкции J_0 . Приводится результат оптимизации (рис. 4) и исследование зависимости массы и формы оптимальной конструкции от величины заданного момента инерции.

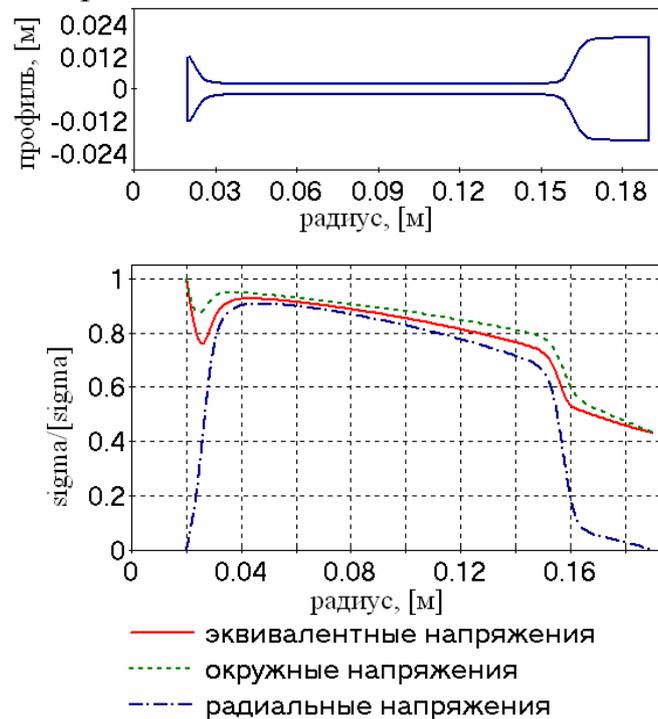


Рис. 4. Результат оптимизации маховика при $J_0 = 0.18 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

В третьей главе рассматриваются задачи топологической оптимизации вращающихся осесимметричных конструкций с учетом неосесимметричного изгиба. Одним из наиболее удобных для практической реализации методов топологической оптимизации является метод распределения материала, развитый в работах О. Sigmund, М.Р. Bendsoe, N. Olhoff.

Целевой функцией, подлежащей минимизации, является энергия деформаций механической системы. За параметры проектирования принимаются условные плотности конечных элементов d_e . Задача топологической оптимизации формулируется в виде

$$W(\vec{d}) = \vec{u}^T K \vec{u} \rightarrow \min, \tag{20}$$

$$\sum_{e=1}^n r_e d_e V_e \leq fV_0, \quad 0.001 = \varepsilon \leq d_e \leq 1,$$

где r_e - характеристический радиус конечного элемента, K - матрица жесткости, V_e - объем конечного элемента, $f = \frac{V_{mat}}{V_0}$ - коэффициент заполнения материалом исследуемой области и V_0 - ее объем. На основании теорем вложения Соболева показывается, что при уменьшении энергии деформаций увеличивается жесткость системы. Производная целевой функции по параметрам проектирования записывается следующим образом

$$\frac{\partial W}{\partial d_e} = 2A_e - pd_e^{p-1}W_e, \quad (21)$$

где A_e - суммарная работа объемных сил на конечном элементе, W_e - энергия деформаций конечного элемента.

Рассматривается методика приближенного учета неосесимметричных изгибных напряжений в осесимметричной расчетной модели. Вводится понятие энергии деформаций неосесимметричного изгиба $W_{изг}$. Показывается, что при наличии изгибающего момента M , в качестве функции цели можно взять суммарную энергию деформаций

$$W = \bar{u}^T K \bar{u} + W_{изг}, \quad (22)$$

$$W_{изг} = \sum_e k_{изг,e} / r_e^3, \quad k_{изг,e} - \text{коэффициент,}$$

характеризующий величину приложенного изгибающего момента и размеры конечного элемента, r_e - характеристический радиус конечного элемента.

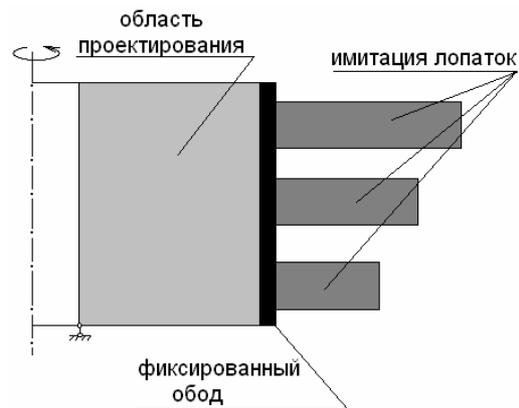


Рис. 5. Расчетная модель

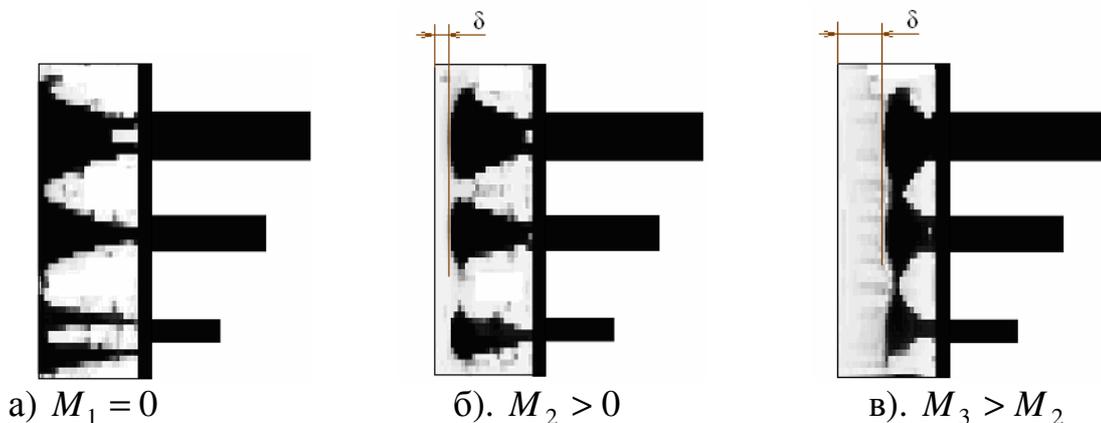


Рис. 6. Зависимость оптимального проекта от величины изгибающего момента M

На рис. 6 приводятся результаты оптимального проектирования ротора (рис. 5), а также исследование влияния величины изгибающего момента M на форму оптимального проекта. Показано, что учет изгибающего момента требует увеличения изгибной жесткости, что приводит к увеличению минимального радиуса конструкции.

В четвертой главе рассмотрены задачи оптимального проектирования осесимметричных конструкций, рассчитываемых по модели оболочек вращения при осесимметричном нагружении.

Рассмотрим задачу оптимизации осесимметричных конструкций, моделируемых при помощи оболочечных конечных элементов. Откликами системы являются вектор узловых значений перемещений \vec{u} и вектор силовых факторов. Для эффективного решения задачи оптимизации требуется разработать методику расчета производных \vec{u} и силовых факторов по параметрам проектирования h_k . Анализ чувствительности перемещений можно осуществить на основе соотношения

$$K \frac{\partial \vec{u}}{\partial h_k} = \vec{p}_k = \frac{\partial \vec{F}}{\partial h_k} - \frac{\partial K}{\partial h_k} \vec{u}, \quad (23)$$

где \vec{p}_k - вектор фиктивных нагрузок для параметра проектирования h_k . Для расчёта вектора фиктивных нагрузок \vec{p}_k требуется продифференцировать матрицу жёсткости K и вектор нагрузок \vec{F} по параметру проектирования h_k . Рассмотрим алгоритм вычисления производной матрицы жесткости и вектора нагрузок по произвольному управляющему параметру h_k . Дифференцируя

выражение для глобальной матрицы жесткости $K = \sum_{e=1}^{N_e} S_e^T K_e S_e$, где N_e - количество конечных элементов, K_e - матрица жесткости конечного элемента, S_e - прямоугольная матрица перевода матрицы жесткости элемента в глобальную матрицу жесткости системы, получаем

$$\frac{\partial K}{\partial h_k} = \frac{\partial}{\partial h_k} \sum_{e=1}^{N_e} S_e^T K_e S_e = \sum_{e=1}^{N_e} S_e^T \frac{\partial K_e}{\partial h_k} S_e. \quad (24)$$

В силу выражения (24) производная глобальной матрицы жесткости может быть построена на основании производных матриц жесткости конечных элементов.

Вследствие одинаковой структуры левой части системы линейных уравнений (23), вычисление производных перемещений по всем параметрам проектирования можно существенно ускорить применением прямых методов обращения линейных систем и хранением факторизованной глобальной матрицы жесткости. Для аналитического вычисления производных матриц жесткости конечных элементов $\partial K_e / \partial h_k$ и вектора нагрузок конечных

элементов $\partial \bar{F}_e / \partial h_k$ вводится понятие атрибутов конечных элементов, представленных вектором $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T$. Атрибутами конечных элементов являются параметры, характеризующие свойства конечных элементов и конечно-элементной сетки, что позволяет осуществить аналитическое дифференцирование матрицы жесткости и вектора нагрузок по атрибутам. Приводится методика построения производных по параметрам проектирования из производных по атрибутам на основе формулы дифференцирования сложной функции $\frac{\partial K}{\partial h_i} = \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial h_i} \frac{\partial K}{\partial a_k}$. Вычисление коэффициентов $\partial a_k / \partial h_i$ осуществляется на основе стратегии активных конечных элементов, то есть набора только тех конечных элементов $A(h_i)$, атрибуты которых зависят от рассматриваемого параметра проектирования h_i . Излагается обобщение дискретного алгоритма анализа чувствительности на произвольные отклики, линейно зависящие от вектора узловых перемещений.

Рассматривается модель кольцевого конечного элемента, позволяющая приближенно учесть сложные формы ободов дисков в оболочечной модели ротора. Форма поперечного сечения кольца считается неизменной. Перемещение сечения кольца рассматривается как перемещение абсолютно жесткого тела, т.е. кольцо имеет три степени свободы: поворот относительно нейтральной точки кольца C на угол φ и смещение по радиальному и осевому направлениям на величины u_C и v_C соответственно. Предполагается, что напряженно – деформированное состояние является одноосным и принимается допущение, что кольцевые волокна, деформируясь в окружном направлении, не оказывают силового воздействия одно на другое. На основании гипотез модели осесимметричного кольца выводится выражение для матрицы жесткости кольцевого конечного элемента

$$K_e = 2\pi E \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 & \frac{z - z_C}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{z - z_C}{r} & 0 & \frac{(z - z_C)^2}{r} \end{pmatrix} dr dz, \quad (25)$$

где Ω – сечение кольца, z_C - положением нейтральной оси кольца. Интеграл по сечению кольца сводится к интегралу по контуру сечения кольца на основании формулы Грина. Данная операция позволяет применить для дифференцирования матрицы жесткости кольцевого конечного элемента метод автоматического дифференцирования. Приводится сравнительный анализ результатов расчета различных конструкций дисков по двумерной и оболочечной моделям, показывающий применимость модели осесимметричных оболочек к задачам оптимального проектирования дисков.

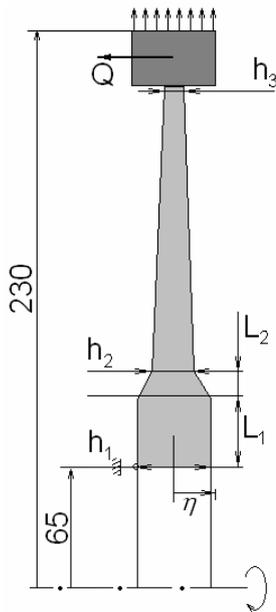


Рис. 7. Параметризованная модель диска

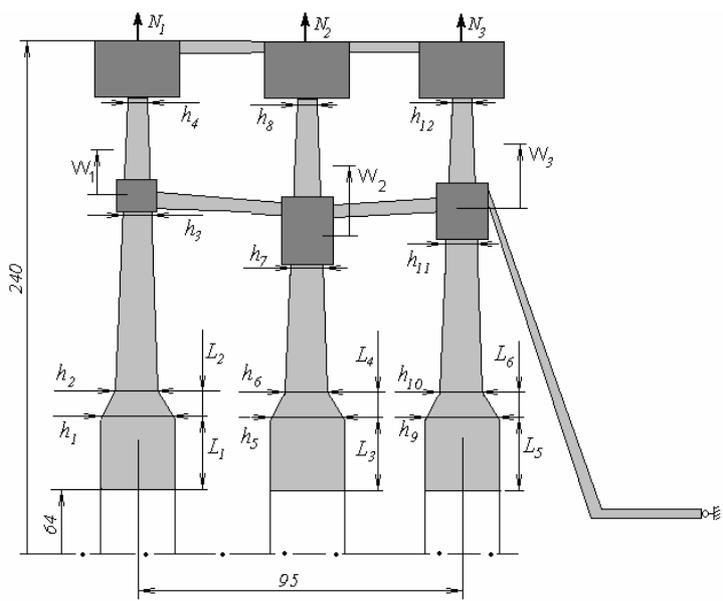


Рис. 8. Параметризованная модель ротора

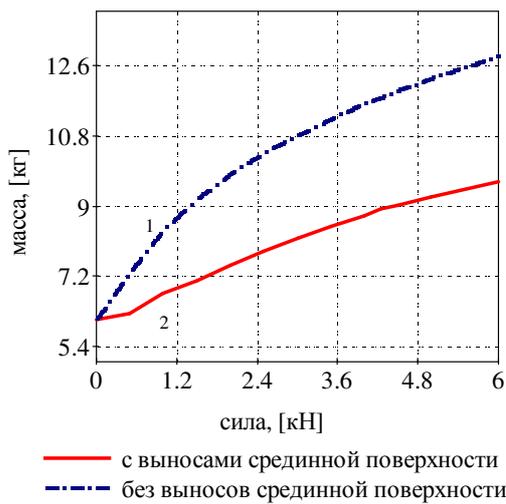


Рис. 9. Зависимость массы оптимального диска от значения поперечной силы Q

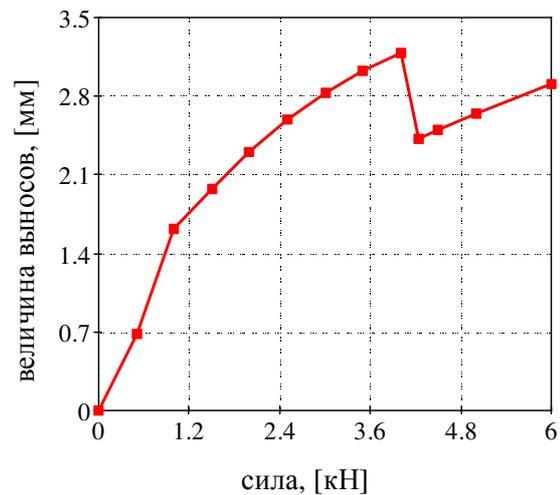


Рис. 10. Зависимость величины выносов срединной поверхности оптимального диска от значения поперечной силы Q

Исследуется серия задач оптимизации осесимметричных конструкций. Функцией цели является масса проекта, задаются ограничения на величину максимального эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma]$ и на максимальное радиальное перемещение в конструкции $u \leq [u]$, а также конструктивные ограничения. В качестве первого примера рассматривается задача оптимизации вращающегося диска (рис. 7). Для минимизации действия изгибных напряжений применяются выносы срединной поверхности диска η .

Зависимость массы оптимального проекта и выносов срединной поверхности η от величины поперечной силы Q представлена на рис. 9 и рис. 10.

Основной целью главы является оптимизация сложных оболочечных конструкций. В работе представлена задача оптимального проектирования ротора, состоящего из трех дисков и соединительных оболочек (рис. 8). Обода дисков и места соединения оболочек моделируются при помощи кольцевых конечных элементов, учитывается неравномерный нагрев конструкции и перепад давления по полостям.

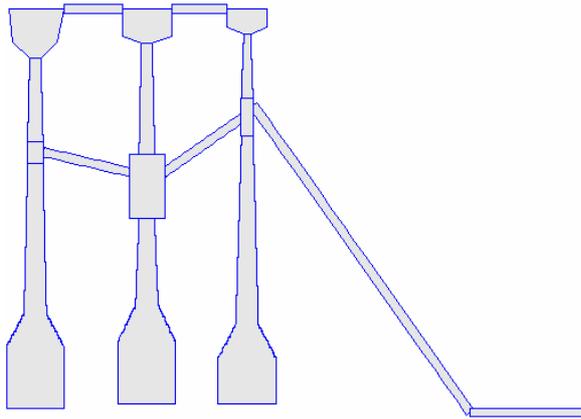


Рис. 11. Исходная конструкция ротора

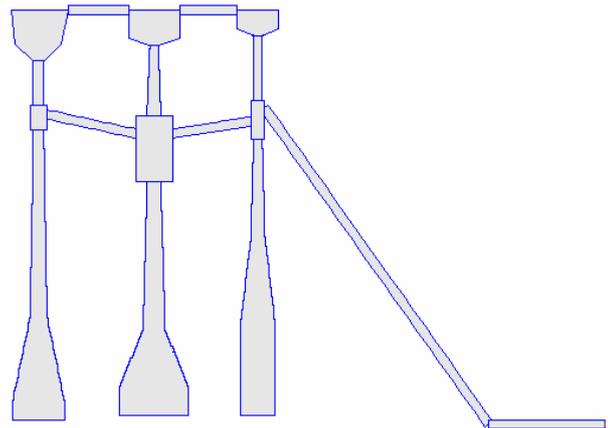


Рис. 12. Оптимизированная конструкция ротора

На основании решения серии задач оптимизации роторов показано, что наибольшее уменьшение массы достигается при изменении формы дисков и одновременном варьировании положений соединительных оболочек. Приведен расчет конструкции с использованием двумерной осесимметричной модели ротора, подтверждающий применимость оболочечных моделей для предварительной оптимизации роторов. На рис. 11 представлена схема исходной конфигурации конструкции ротора, а на рис. 12 – схема оптимизированного ротора. В результате оптимизации масса конструкции снижена на 7.8% от исходной массы.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработан алгоритм полуаналитического анализа чувствительности в бесконечномерном пространстве состояний для оптимизации формы неравномерно нагретых вращающихся дисков с учетом ограничений на величину максимальных напряжений, несущую способность, а также геометрические свойства конструкции. Алгоритм полуаналитического анализа чувствительности позволил вычислить градиент функционала за два этапа расчета при любом количестве параметров проектирования.

2. Показано, что в зависимости от заданных значений различных коэффициентов запаса некоторые ограничения являются неактивными и не влияют на форму оптимальной конструкции.
3. Разработана методика оптимизации маховиков с заданным моментом инерции.
4. Метод топологической оптимизации разработан для решения задач в осесимметричной постановке с учетом неосесимметричного изгиба.
5. Дискретный метод анализа чувствительности применен для оптимизации конструкций, моделируемых набором осесимметричных оболочек и колец на базе метода конечных элементов. Разработан программный комплекс оптимального проектирования конструкций роторов. Анализ чувствительности позволил ослабить зависимость времени счета от количества параметров проектирования.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Темис Ю.М., Троицкий А.В. Проектирование оптимального диска турбины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. - 2004. - № 2. - С. 23 - 37.
2. Темис Ю.М., Троицкий А.В. Топологическая оптимизация осесимметричных конструкций // Научно – технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: тезисы VI-й международной конференции. - Санкт-Петербург: СПбГПУ, 2005. - С. 394 - 400.
3. Троицкий А.В. Применение метода полуаналитического анализа чувствительности в оптимальном проектировании осесимметричных конструкций // Авиадвигатели XXI века: тезисы докладов II-й международной научно-технической конференции. - Москва: ЦИАМ им П.И. Баранова, 2006. Т. 3. - С. 396.
4. Троицкий А.В. Применение метода полуаналитического анализа чувствительности в оптимальном проектировании осесимметричных конструкций // Фундаментальные и прикладные проблемы механики: материалы научно – технической конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева, - М: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - С. 37.
5. Троицкий А.В. Анализ чувствительности и оптимальное проектирование вращающихся дисков // Естественные и технические науки. - М: Спутник плюс. - 2006. - № 3. - С. 195 - 198.
6. Троицкий А.В. Проектирование конструкций максимальной жесткости методами топологической оптимизации // Естественные и технические науки. - М: Спутник плюс. - 2006. - № 3. - С. 199 - 202.