

На правах рукописи

СОКОЛОВ Александр Павлович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ КОМПОЗИТОВ С МНОГОУРОВНЕВОЙ  
ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

Специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела



**АВТОРЕФЕРАТ**

Диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Димитриенко Юрий Иванович

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор,  
Попов Борис Глебович

кандидат физико-математических наук,  
Плюснин Андрей Владимирович

Ведущая организация: ОАО «Центральный НИИ  
Специального машиностроения»

Защита диссертации состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 года  
в \_\_\_\_ час. \_\_\_\_ мин. на заседании диссертационного совета  
Д 212.141.15 при Московском государственном техническом универси-  
тете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул.,  
д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского го-  
сударственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат технических наук, доцент



Аттетков А.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В настоящее время композиционные материалы (КМ) находят применение в различных отраслях промышленности: из них изготавливают особо важные элементы конструкций авиакосмической техники, используют в автомобилестроении, при производстве спортивной техники и во многих других областях.

Реальные КМ обладают сложной внутренней структурой, которая характеризуется наличием нескольких внутренних иерархически вложенных друг в друга уровней. Такие структуры называют многоуровневыми иерархическими структурами (МИС). Учет реальной многоуровневой структуры систем очень важен: он позволяет более точно прогнозировать эффективные характеристики, а также открывает возможность «конструирования» новых сложных систем с наперед заданными свойствами. Попытки учета многоуровневой структуры и ее влияния на макроскопические свойства КМ предпринимались достаточно давно. Практически все классические работы, к числу которых следует отнести работы Алфутова Н.А., Зиновьева П.А., Попова Б.Г., Димитриенко Ю.И., Победри Б.Е., Бахвалова Н.С., Болотина В.В., Ванина Г.А., Кристенсена Р., Васильева В.В., Малмейстера А.К., Тамужа В.П., Тетерса Г.А., Санчес-Паленсии Э., Сараева Л.А., Шермергора Т.Д., Сарбаева Б.С., Сендецки Дж., Тарнопольского Ю.М., Жигуна И.Г., Полякова В.А. и многих других, предлагают способы учета многоуровневой структуры КМ, однако, большинство этих методов основано на инженерных подходах, где эффективные характеристики различных уровней, например, учитываются по правилу смесей или подобным им аналитическим формулам. Эти методы просты в использовании, но их точность часто оказывается невысокой. В настоящее время существует более точный метод, предложенный Бахваловым Н.С. и Победрей Б.Е., - так называемый метод асимптотического осреднения (МАО), который позволяет свести проблему расчета макроскопических свойств КМ, исходя из микроскопических свойств составляющих их компонентов, к решению специальных математических задач «на ячейке периодичности». Однако, этот метод хорошо разработан только для КМ обладающих так называемой одноуровневой структурой. Задачей настоящей работы являлась дальнейшая разработка МАО Бахвалова Н.С. и Победри Б.Е. для случая многоуровневых иерархических структур.

**Объектом настоящего исследования** являются эффективные упругие характеристики КМ с многоуровневой иерархической периодической внутренней структурой армирования (далее, для таких КМ будем использовать сокращение МКМ). Рассматривались три типа модельных МКМ, ячейки периодичности которых представлены на рис. (1),(2),(3).

Исследовались следующие эффективные характеристики: тензоры модулей упругости, технические постоянные (коэффициенты Пуассона, модули Юнга и модули сдвига); а также тензоры концентраций напряжений.

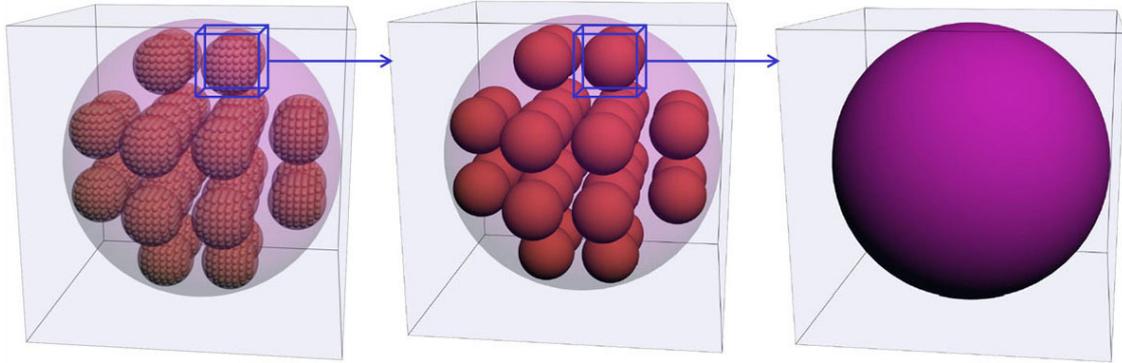


Рис. 1. Ячейки периодичности 3-х структурных уровней дисперсно-армированного КМ

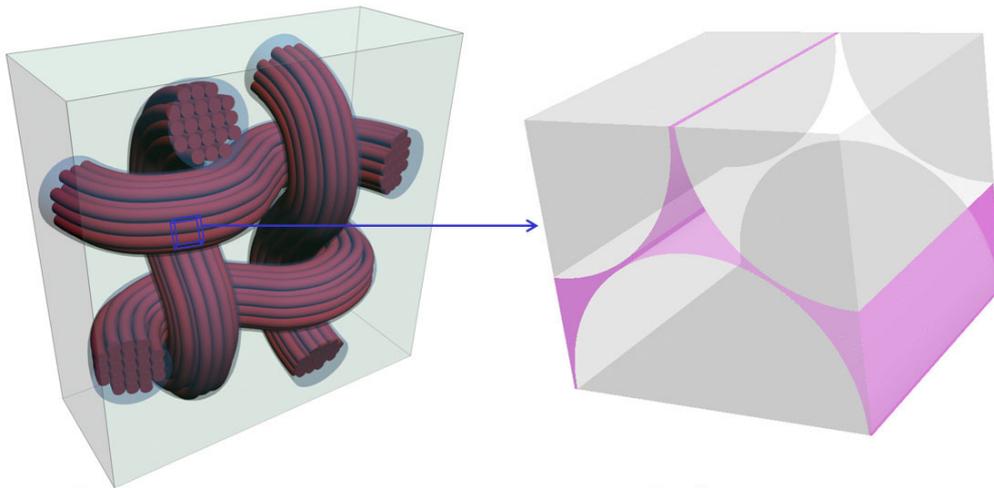


Рис. 2. Ячейки периодичности 2-х структурных уровней тканевого КМ

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является разработка: 1) математической модели пространственно-армированных упругих МКМ, 2) конечно-элементного метода расчета эффективных упругих характеристик МКМ, 3) программного комплекса, для определения характеристик МКМ.

**Методы исследования.** Для решения задач, поставленных в диссертационной работе, использованы следующие методы исследования: метод асимптотического осреднения Бахвалова Н.С. и Победри Б.Е., методы, основанные на теоретических оценках Фойгта-Рейсса, Хашина-Штрикмана и экспериментальных данных для проведения сравнения получаемых результатов.

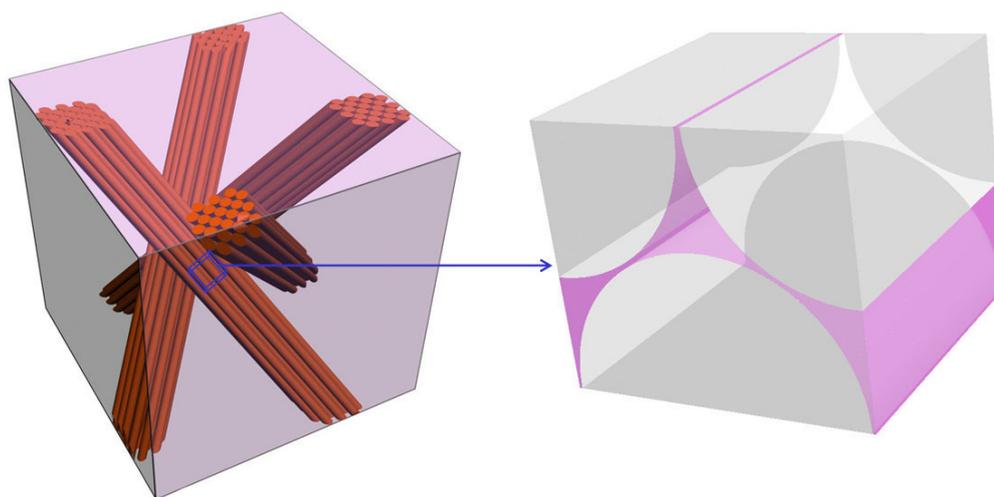


Рис. 3. Ячейки периодичности 2-х структурных уровней 4D армированного КМ

**Достоверность и обоснованность результатов**, полученных в работе, обусловлена применением теоретически обоснованного математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, полученными ранее другими авторами в частных случаях.

**Научная новизна** работы заключается: 1) в адаптации и обобщении метода асимптотического осреднения на случай многоуровневых КМ на основе модели МИС с целью проведения конечно-элементного расчета эффективных характеристик КМ; 2) в разработке конечно-элементного метода решения задач контактной теории упругости на ячейках периодичности различного структурного уровня; 3) в разработке универсального автоматизированного ПК для проведения расчетов по определению упругих эффективных характеристик МКМ; 4) в проведении численных экспериментов по определению эффективных характеристик КМ и сравнении получаемых результатов с теоретическими и экспериментальными данными.

**Практическая ценность предлагаемого метода** заключается в том, что он вносит определенный вклад в общую теорию асимптотического осреднения периодических структур. Разработанный программный комплекс позволяет проводить вычисления эффективных характеристик КМ в автоматизированном режиме для широкого класса пространственных структур армирования, он может быть адаптирован также для решения задач синтеза новых материалов.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. метод расчета характеристик МКМ: микронапряжений/микрдеформации в волокнах, компонент тензора концентраций напряжений, а также эффективных модулей упругости, основанный на применении метода асимптотического осреднения многоуровневых иерархических структур;
2. программный комплекс, который позволяет осуществлять необходимые расчеты в автоматизированном режиме и представлять получаемые результаты расчета полей микронапряжений, микрдеформации и тензоров концентрации напряжений средствами трехмерной графики.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на: Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии» (Реутов, 2004); Международной научной конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева (Москва, 2006); Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Москва, 2006); 4-ой Международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности» (Санкт-Петербург, 2007); XIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2007» (Москва, 2007); 3-ей Международной научной конференции «РКТ-2007» (Москва, 2007); 2-ой научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей (Москва, 2008); XV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2008» (Москва, 2008).

**Публикации.** Основные научные результаты диссертации отражены в **12**-ти работах, в том числе в 2-х статьях перечня, рекомендованного ВАК РФ [11, 12], 9-ти тезисах докладов [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] и 1-ой статье [10].

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности под руководством научного руководителя.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, 4-х частей, заключения, выводов и списка литературы. Полный объем составляет **110** страниц. Библиография включает **97** наименований.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность,

представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В **первой части** диссертационной работы рассмотрена математическая модель МИС, представлены методы осреднения таких структур и поиска эффективных характеристик. Задача включает в себя нахождение: компонент эффективного тензора модулей упругости  $C_{ijkl}$ ; эффективных модулей упругости  $E_i$ ; эффективных коэффициентов Пуассона  $\nu_{ij}$ ; эффективных модулей сдвига  $G_{ij}$  и полей компонент тензора концентраций напряжений  $B_{ijkl}$ .

Вводится понятие МИС, как геометрической структуры с произвольным числом уровней  $N$ , в которой каждый низший,  $n$ -й, уровень вложен в высший,  $(n - 1)$ -й, уровень. Сама МИС занимает объем  $V$  в  $\mathbf{R}^3$  и предполагается состоящей из ячеек периодичности первого уровня  $V_1^\xi$  (рис.(4)).

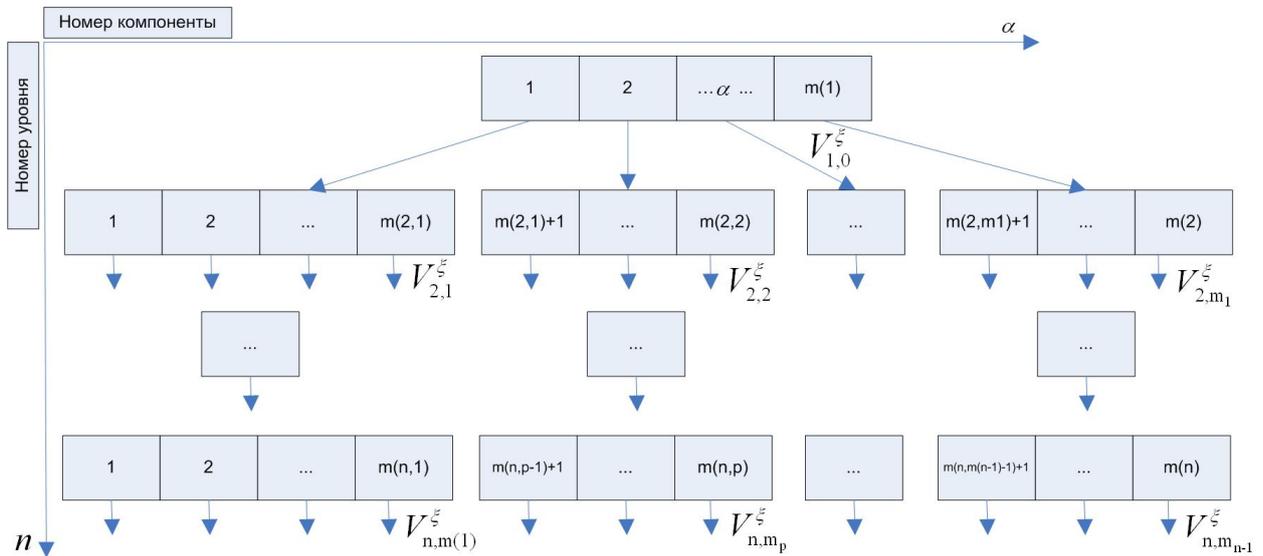


Рис. 4. Схема МИС.

Предложен способ описания МИС с помощью только двухиндексного набора чисел  $m_{n,\alpha}$ .

Обозначим характерный размер всей области  $V$ , через  $L$ , а характерные размеры ячеек  $V_{n\alpha}^\xi$   $n$ -го уровня через  $l_n$ , предполагая, что в рамках одного уровня все ячейки имеют одинаковый характерный размер. Предполагается выполненным следующее условие:  $l_N \ll l_{N-1} \ll \dots \ll l_n \ll \dots \ll l_1 \ll L = l_0 = 1$ .

Введем  $N$  малых параметров  $\kappa_n$ :  $\kappa_n = \frac{l_n}{l_{n-1}} \ll 1$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Обозначим через  $\mathbf{x} = x^i e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — радиус-вектор,  $x^i$  — декартовы координаты точки из области  $V$ , введем безразмерные координаты  $\bar{x}^i = x^i/L$ , которые будем называть глобальными, и локальные координаты  $\xi_n = \xi_{n-1}/\kappa_n = \xi_n^i e_i$ ,  $n = 1, \dots, N$  ( $\xi_0 \equiv \mathbf{x}$ ). Согласно общей идее

метода осреднения  $\xi_n^i$  принимают значения на отрезке  $[-0.5, 0.5]$ , когда  $x^i$  изменяются в ячейках  $V_{n\alpha}^\xi$ .

Рассмотрим, для описанной выше МИС, постановку задачи линейной теории упругости в рамках теории малых деформаций с учетом дополнительных условий идеального контакта между компонентами и без учета массовых сил.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \vec{\mathbf{0}}, \mathbf{x} \in V, \\ \boldsymbol{\sigma} = C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{x} \in V \cup \Sigma, \\ 2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T, \mathbf{x} \in V, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h} \Big|_{\mathbf{x} \in \Sigma_\sigma} = S_e, \\ \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{x} \in \Sigma_u} = \mathbf{u}_e, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформации (малой);  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений;  $\mathbf{h}$  – вектор внешней нормали к поверхности  $\Sigma$  области  $V$ ;  $S_e$  – заданный вектор усилий на части поверхности  $\Sigma_\sigma$ ;  $\mathbf{u}_e$  – заданный вектор перемещений на части  $\Sigma_u$  поверхности. Первое уравнение (1) – уравнение равновесия, второе – определяющие соотношения и третье – соотношения Коши. Тензор модулей упругости  $C$  в системе (1) зависит от координат  $\xi_n$  периодическим образом. Решение задачи (1) относительно вектора перемещений, для каждого структурного уровня ищется в виде асимптотических разложений при  $n = 0$  (номер уровня) по соответствующему малому параметру. Аналогично, начиная с первого уровня, строят решение вновь получаемых постановок на высших уровнях. В общем случае решение представляется в виде разложений по малому параметру  $\kappa_n$ :  $\mathbf{u}_{(n-1),\alpha}^{(1)} = \mathbf{u}_{n\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) + \kappa_n u_{n\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_N) + \kappa_n^2 u_{n\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_N) + \dots$ , где  $\xi_{n-1} \in V_{n-1,\alpha}$ ,  $\xi_n \in V_{n\beta}$ ,  $m_{n,\alpha-1} \leq \beta$ ,  $\alpha \leq m_{n,\alpha}$ .

Для определения функций  $\mathbf{u}_{n\beta}^{(1)}$  получаем локальные задачи на ячейке периодичности  $V_n^\xi$ , которые будем называть задачами  $L_{n\beta}$ :

$$\begin{cases} \nabla_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n\beta}^{(0)} = 0, & \xi_n \in V_{n\beta}, & m_{n,\alpha-1} \leq \beta, \alpha \leq m_{n,\alpha} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n\beta}^{(0)} = C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n\beta}^{(0)}, \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{n\beta}^{(0)} = 2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n\alpha} + \nabla_n \otimes \mathbf{u}_{n\beta}^{(1)} + \nabla_n \otimes \mathbf{u}_{n\beta}^{(1)T}, \\ \left[ \boldsymbol{\sigma}_{n\beta}^{(0)} \right] \cdot \mathbf{h} = 0, & \left[ \mathbf{u}_{n\beta}^{(1)} \right] = 0, & \xi_n \in \Sigma_{n\alpha\beta}, \\ \langle \mathbf{u}_{n\beta}^{(1)} \rangle_{n\alpha} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для определения функций  $\mathbf{u}_{n\beta}^{(0)}$  получаем осредненные задачи, которые будем называть задачами  $A_{n-1,\alpha}$ , где  $n = 1, \dots, N$  (вид постановки представлен в основном тексте диссертации).

В результате получается рекуррентная последовательность задач:  $L_{N\beta} \rightarrow A_{N-1,\alpha_{N-1}} \rightarrow A_{N-2,\alpha_{N-2}} \rightarrow \dots \rightarrow A_{n,\alpha_n} \rightarrow \dots \rightarrow A_{1,\alpha_1} \rightarrow A_0$ . Первыми решаются локальные задачи  $L_{N\beta}$ , для самого низшего  $N$ -го уровня МИС, для всех  $\beta = 1, \dots, m_N$  и определяются функции  $\mathbf{u}_{N\beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_N)$ , зависящие от «входных данных задачи» – функций  $\bar{\varepsilon}_{N\alpha}$ .

Для нахождения функций  $\mathbf{u}_{N\alpha}^{(0)}(x, \xi_1, \dots, \xi_N)$  решаем задачу  $A_{N-1,\alpha}$ . Входными данными этой задачи являются функции  $\bar{\varepsilon}_{N-1,\alpha}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{N-2})$ . Далее последовательно решаем соответствующие локальные и осредненные задачи и, дойдя до нулевого уровня, решаем задачу  $A_0$ , решение которой зависит только от глобальных переменных.

Введем дополнительные естественные обозначения задач:  $\{n\beta\}$  и  $(p, q)$ , соответствующие индексы которых не использовались в тензорных операциях.

Используя осредненные определяющие соотношения из задач  $A_{n,\alpha}$ , найдем нужные эффективные характеристики:  $\bar{C}_{ijpq\{n\alpha\}} = \frac{\langle \sigma_{ij(pq)\{n\beta\}}^{(0)} \rangle}{\bar{\varepsilon}_{pq\{n\alpha\}}} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)\{n\beta\}}}{\bar{\varepsilon}_{pq\{n\alpha\}}}$ , где  $n$  – номер структурного уровня,  $\alpha$  – номер однородной компоненты в рамках одной ячейки периодичности  $V_{n\alpha}^\xi$ ,  $\xi$  – локальные координаты,  $\beta$  – номер параметров с низшего структурного уровня (см. рисунки (1), (2), (3)),  $N_{n\alpha}$  – количество компонент в ячейке периодичности  $V_{n\alpha}^\xi$ ,  $\bar{\sigma}_{ij(pq)\{n\alpha\}}(\bar{x}) = \left\langle \sigma_{ij(pq)\{n\beta\}}^{(0)}(\bar{x}, \xi) \right\rangle = \sum_{\mu=1}^{N_{n\alpha}} \int_{V_{n\beta}^\xi} \sigma_{ij(pq)\{n\beta\}}^\mu(\bar{x}, \xi) dV_\xi$ .

После расчета тензора модулей упругости  $\bar{C}_{ijpq\{n\alpha\}}$ , вычислим тензор эффективных упругих податливостей  $\Pi_{ijpq\{n\alpha\}} = (\bar{C}_{ijpq\{n\alpha\}})^{-1}$  и по его компонентам найдем необходимые технические константы:  $E_{i\{n\alpha\}} = \frac{1}{\Pi_{iiii\{n\alpha\}}}$  – модули Юнга;  $\nu_{ij\{n\alpha\}} = -\frac{P_{iijj\{n\alpha\}}}{\Pi_{iiii\{n\alpha\}}}$  – коэффициенты Пуассона;  $G_{ij\{n\alpha\}} = \bar{C}_{ijij\{n\alpha\}}$  – модули сдвига; где по  $i, j$  нет суммирования.

Указанные вычисления проводятся для каждого структурного уровня  $n$ , для каждой соответствующей ячейки периодичности  $V_{n\alpha}^\xi$ . Полученные осредненные характеристики являются исходными данными для соответствующих локальных задач  $(n-1)$ -ого структурного уровня.

Вместе с эффективными характеристиками будем находить компоненты тензора концентраций микронапряжений:  $B_{ijmn\{n\beta\}}(\xi) = \sum_{p,q} \frac{\sigma_{ij(pq)\{n\beta\}}^\alpha(\xi)}{\bar{\varepsilon}_{pq\{n\beta\}}} \bar{\Pi}_{pqmn\{n\alpha\}}$ .

**Вторая часть** диссертационной работы посвящена разработке метода решения локальной задачи  $L_{n\beta}$  с помощью МАО. Приводятся основы разработанного конечно-элементного метода решения этой задачи.

Решение задачи  $L_{n\beta}$  основано на сведении ее к задачам на 1/8-ой ячейки периодичности.

Запишем локальные задачи  $L_{n\beta}$  в декартовой системе координат, с учетом дополнительных обозначений структурного уровня:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij\{n\beta\}}^{(0)}(\bar{x}, \xi)}{\partial \xi_j} = 0; \\ \sigma_{ij\{n\beta\}}^{(0)}(\bar{x}, \xi) = C_{ijkl}^{(0)}(\bar{x}, \xi) \varepsilon_{kl\{n\beta\}}^{(0)}(\bar{x}, \xi); \\ \varepsilon_{kl\{n\beta\}}^{(0)}(\bar{x}, \xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{l\{n\beta\}}^{(1)}(\bar{x}, \xi)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_{k\{n\beta\}}^{(1)}(\bar{x}, \xi)}{\partial \xi_l} \right) + \bar{\varepsilon}_{kl\{n\alpha\}}(\bar{x}); \\ \llbracket u_{i\{n\beta\}}^{(1)} \rrbracket = 0; \\ \left[ u_{i\{n\beta\}}^{(1)}(\bar{x}, \xi) \right] \Big|_{(\bar{x}, \xi) \in \Sigma_{\alpha\beta}} = 0; \\ \left[ \sigma_{ij\{n\beta\}}^{(0)}(\bar{x}, \xi) h^j(\bar{x}, \xi) \right] \Big|_{(\bar{x}, \xi) \in \Sigma_{\alpha\beta}} = 0; \\ \langle u_{i\{n\beta\}}^{(1)}(\bar{x}, \xi) \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\bar{\varepsilon}_{kl\{n\alpha\}}(\bar{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{k\{n\alpha\}}^{(0)}(\bar{x})}{\partial \bar{x}_l} + \frac{\partial u_{l\{n\alpha\}}^{(0)}(\bar{x})}{\partial \bar{x}_k} \right)$  – осредненные деформации нулевого приближения.

Условие нормировки в локальной задаче представляет собой интегральное соотношение, являющееся уравнением Фредгольма 1-го рода. Это соотношение, как известно, определяет некорректно поставленную задачу, поэтому локальная задача в указанном виде была дополнительно преобразована. Учитывая линейность задачи, решение на полной ячейке периодичности ищется в виде сумм по 6-ти функциям:  $u_{i\{n\beta\}}^{(1)}(\bar{x}, \xi) = \sum_{p,q=1}^3 v_{i(pq)}^\beta(\bar{x}, \xi)$ . Осуществив подстановку, при фиксированном наборе индексов  $(p, q)$ , получим преобразованную постановку локальной задачи, решение которой, в свою очередь, будем искать в виде:  $v_{i(pq)}^\beta(\bar{x}, \xi) = -\bar{\varepsilon}_{pq}(\bar{x})(\delta_{ip}\xi_q + \delta_{iq}\xi_p) + U_{i(pq)}^\beta(\xi)$ , где  $\bar{\varepsilon}_{pq} \equiv \bar{\varepsilon}_{pq\{n\alpha\}}$ ,  $U_{i(pq)}^\beta(\xi)$  -- некоторые функции, называемые псевдоперемещениями.

Задача относительно псевдоперемещений в отличие от задачи (3) содержит лишь «поверхностные входные данные», но при этом по-прежнему содержит интегральное условие нормировки и краевые условия периодического типа. Однако, в случае, если композит симметричен при преобразованиях ортотропии (везде далее это предполагалось), то задача (3) на полной ячейке периодичности может быть сведена к задаче на 1/8 ячейки периодичности, которая свободна от указанных недостатков и может быть решена с помощью стандартной процедуры метода конечных элементов. В результате получим следующую постановку на 1/8 ячейки периодичности  $\check{V}_{n\alpha}^\xi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{(\beta)}(\xi) \Big|_{\xi \in \tilde{V}_\xi} = 0; \\ \sigma_{ij(pq)}^\beta(\xi) = C_{ijkl}^{(\beta)}(\xi) \varepsilon_{kl(pq)}^\beta(\xi); \xi \in (\tilde{V}_\xi \cup \dot{\Sigma}_s \cup \Sigma_s); \\ \varepsilon_{ij(pq)}^\beta(\xi) = \frac{1}{2} \left( U_{i(pq)/j}^\beta(\xi) + U_{j(pq)/i}^\beta(\xi) \right); \xi \in \tilde{V}_\xi; \\ U_{i(pq)}^\beta = U_{i(pq)}^N; \xi \in \Sigma_{\xi\alpha N}; \\ (\sigma_{ij(pq)}^\beta - \sigma_{ij(pq)}^N) h_j = 0, \xi \in \Sigma_{\xi\alpha N}; \beta = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (4)$$

Для этой задачи необходимы дополнительные условия на торцевых поверхностях:

При  $p = q$ , на  $\Sigma'_i$ ,  $i \neq j \neq k \neq i$ :      При  $p \neq q$ , на  $\Sigma'_j$ ,  $i, j = \{p, q\}$ :      При  $p \neq q$ , на  $\Sigma'_k$ ,  $i \neq j \neq k \neq i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i(pq)}^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, \\ U_{j(pq)/i}^\alpha = 0, \\ U_{k(pq)/i}^\alpha = 0. \end{array} \right. \quad (5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{i(pq)}^\alpha = \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, \\ U_{j(pq)/j}^\alpha = 0, \\ U_{k(pq)}^\alpha = 0. \end{array} \right. \quad (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{i(pq)/k}^\alpha = 0, \\ U_{j(pq)/k}^\alpha = 0, \\ U_{k(pq)}^\alpha = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Задача (4) со всеми указанными краевыми условиями, при фиксированных  $(p, q)$ , рассматриваемая на 1/8-ой ячейки периодичности, была обозначена  $\tilde{L}_{pq}$  и решалась с помощью стандартной процедура МКЭ. Решение в остальных подобластях получалось с использованием свойств симметрии.

**Третья часть** диссертации посвящена разработке программного комплекса. Описана архитектура программного комплекса, основные использованные алгоритмы. Приводятся блок-схемы работы и спроектированная модель базы данных.

Разработанный программный комплекс имеет модульную архитектуру, что позволило разделить решение основной задачи на независимые подзадачи: 1) формирование геометрической структуры ячейки периодичности КМ; 2) формирование конечно-элементной сетки; 3) определение и сохранение постановки задачи  $\tilde{L}_{pq}$ : общих данных, задание геометрии расчетной области, построение КЭ сетки, задание граничных условий, определение свойств материалов; 4) автоматизированное решение задачи линейной теории упругости  $\tilde{L}_{pq}$  в области ячейки периодичности при помощи метода конечных элементов; 5) автоматизированный расчет серии задач  $\tilde{L}_{pq}$ ; 6) автоматизированный расчет эффективных характеристик и тензоров концентраций напряжений, для одного уровня МИС; 7) построение «вилкок» Фойгта-Рейсса и Хашина-Штрикмана с целью проверки получаемых эффективных характеристик; 8) автоматизированное сглаживание получаемых результатов задач  $\tilde{L}_{pq}$  9) отображение результатов,

сохраненных в стандартном формате.

В **четвертой части** представлены постановки тестовых задач и задач сравнения, приведены численные результаты расчетов и сделаны соответствующие выводы. Все расчеты проводились с использованием разработанного программного комплекса GCAD. Ниже представлены некоторые промежуточные результаты решения задач  $\tilde{L}_{pq}$  (см. рис. (5), (6)).

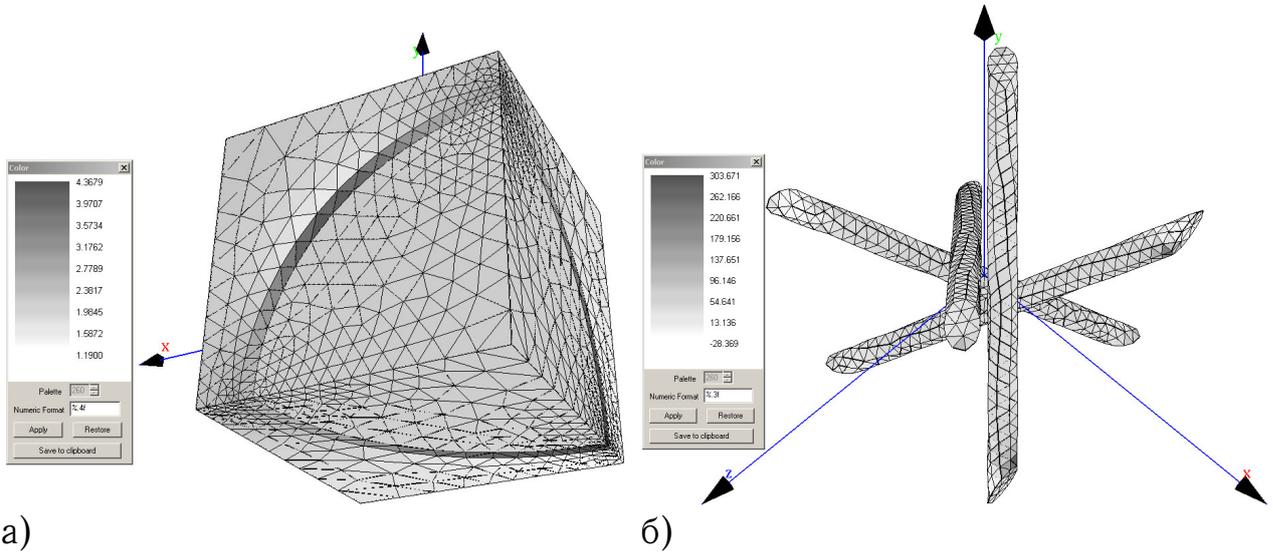


Рис. 5. Результаты решения задач  $\tilde{L}_{pq}$ : а) Дисперсно-армированный МКМ. 1-ый уровень. Тензор концентраций напряжений  $B_{1212}$ ; б) 4D армированный МКМ. Напряжения в волокне  $\sigma_{11}$  [МПа]. Задача  $\tilde{L}_{11}$ .

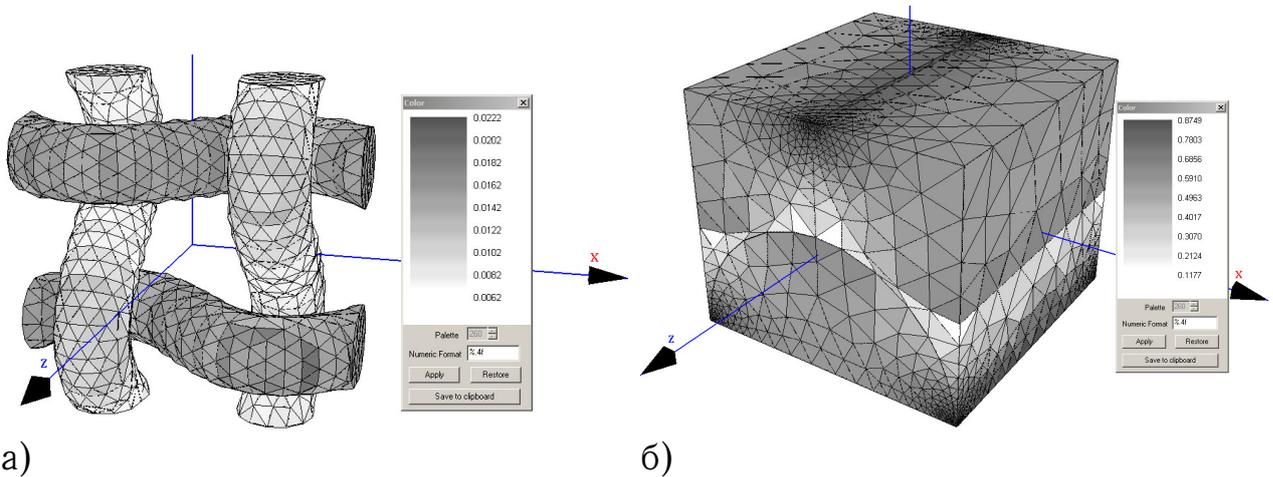


Рис. 6. Результаты решения задач  $\tilde{L}_{pq}$ , для тканевого МКМ с композитным волокном: а) ячейка периодичности 1-ого уровня. Напряжения  $\sigma_{13}$  [ГПа]. Задача  $\tilde{L}_{13}$ ; б) ячейка периодичности 2-ого уровня. Напряжения  $\sigma_{11}$  [ГПа]. Задача  $\tilde{L}_{11}$ .

Для сравнения получаемых эффективных характеристик с приближенным подходом Фойгта-Рейсса была взята модель тканевого КМ. В

расчетах использовались характеристики фенольной матрицы и углеродных волокон. Полученные зависимости для упругих модулей представлены на рис.(7).

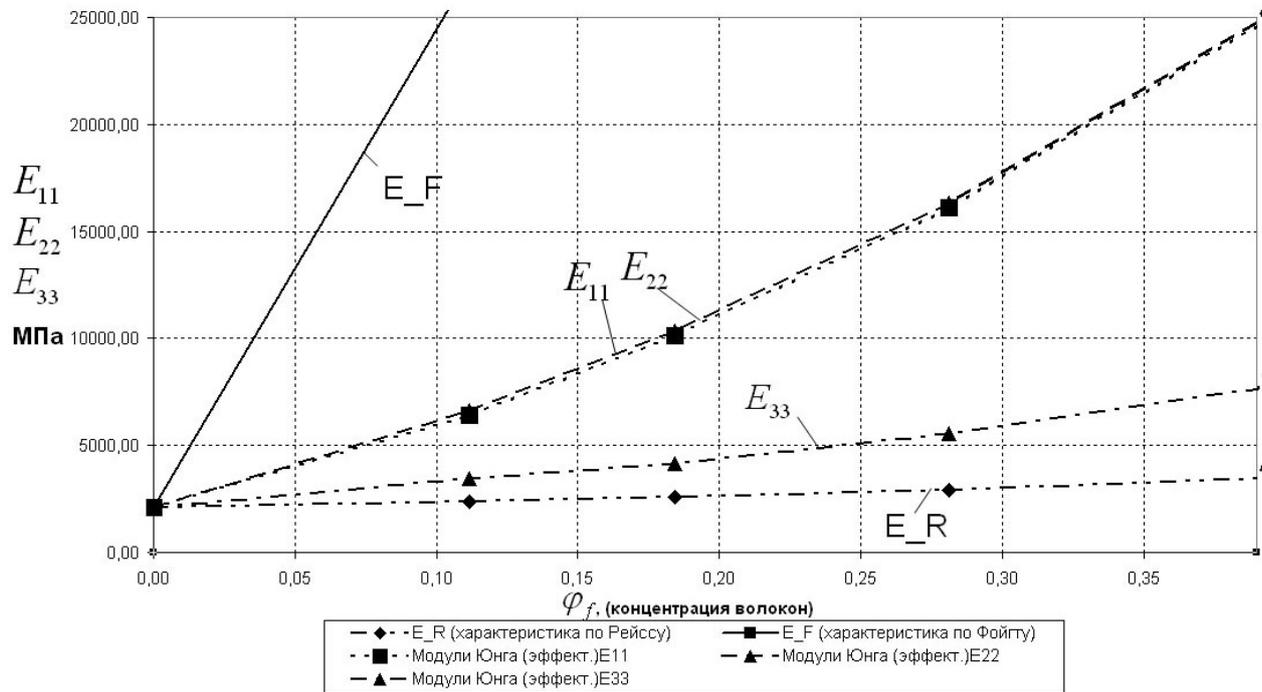


Рис. 7. Модули упругости для тканевого КМ, вычисленные с помощью разработанного метода, и соответствующая им вилка Фойгта-Рейса.

Дополнительно проводилось сравнение результатов решений задач  $\tilde{L}_{pq}$  с решениями, получаемыми при помощи программного комплекса Ansys, для случая 3D армированных структур. Проведенные расчеты показали высокую точность разработанного «решателя» МКЭ. В том числе проводилось сравнение с экспериментальными данными, опубликованными в открытой печати, для случая 3D армированных структур.

Были проведены расчеты 3-х указанных выше типов МКМ. На основании полученных результатов были сделаны выводы: 1) дисперсно-армированный КМ (рис. (1)) обладает изотропными свойствами, что обусловлено особенностями его геометрической структуры; 2) результаты, полученные для тканевого КМ, полностью соответствуют экспериментально получаемым характеристикам, их упругие характеристики и тензоры концентраций напряжений обладают свойством ортотропии.

Полученные эффективные характеристики, компоненты тензоров концентраций напряжений и промежуточные результаты исследуемых МИС приводятся в основном тексте диссертационной работы в полном объеме.

**В заключение** сделаны общие выводы по полученным результатам.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана математическая модель пространственно-армированных упругих КМ с периодической многоуровневой иерархической структурой армирования.
2. Предложен универсальный независящий от геометрии конечно-элементный метод расчета эффективных характеристик МКМ.
3. Разработан программный комплекс, который позволяет решать локальные задачи теории упругости на ячейке периодичности, вычислять эффективные характеристики и тензоры концентраций напряжений в автоматизированном режиме.
4. Проведено численное сравнение получаемых результатов: 1) с экспериментом; 2) с теоретическими оценками; 3) с аналитическими решениями, для простейших случаев структур КМ.
5. Результаты проведенных сравнений с экспериментальными данными и теоретическими оценками показали высокую точность разработанного численного метода. Предлагаемый метод может быть рекомендован для прогнозирования свойств проектируемых КМ, а также для решения задачи синтеза материала с заданными свойствами.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

- [1] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Кашкаров А.И. Разработка конечно-элементного метода решения задач расчета эффективных характеристик композиционных материалов на многопроцессорных вычислительных системах // *Аэрокосмические технологии*. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – С. 113-114.
- [2] Соколов А.П. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик пространственно-армированных композитов // *Студенческий научный вестник (М.)*. – 2005. – Т.2. – С. 225-227.
- [3] Соколов А.П. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов со сложными структурами армирования // *Технологии Microsoft в теории и практике программирования, труды всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых*. – М., 2006. – С. 68-69.

- [4] Соколов А.П. Разработка программного комплекса моделирования композиционных материалов со сложными структурами армирования. Разработка обеспечивающей работу комплекса базы данных // Технологии Microsoft в теории и практике программирования, труды всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – М., 2006. – С. 43-44.
- [5] Конечно-элементное моделирование эффективных физико-механических характеристик пространственно-армированных композитов / Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов, А.А. Макашов и др. // Ракетно-космическая техника. Фундаментальные и прикладные проблемы механики: материалы Международной конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева – М., 2006. – С. 48.
- [6] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Ничеговский Е.С. Конечно-элементное моделирование в механике композиционных материалов // Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования, образование: Сборник трудов / Под ред. А.П. Кудинова, Г.Г. Матвиенко – Санкт-Петербург: Политехнический Университет, 2007. – Т.11. – С. 131-133.
- [7] Соколов А.П., Макашов А.А., Ничеговский Е.С. Конечно-элементное моделирование в механике композиционных материалов // Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2007». Секция Физика – М., 2007. – Т.2 – С. 137-138.
- [8] Соколов А.П. Моделирование эффективных тензоров концентраций напряжений композиционных материалов с периодической структурой армирования//Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов 2-ой научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. – М., 2008. – С. 108–112.
- [9] Соколов А.П. Моделирование эффективных тензоров концентраций напряжений композиционных материалов с периодической структурой армирования // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2008» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев. Секция Физика [Электронный ресурс] – М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486 +; Windows 95; дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader. [Адрес ресурса в сети интернет: [http://www.lomonosov-msu.ru/2008/.](http://www.lomonosov-msu.ru/2008/)]

- [10] Соколов А.П. Разработка численного метода расчета эффективный упругих характеристик композиционных материалов // GGD Прикладная геометрия, Инженерная графика, Компьютерный дизайн. – 2007. – №2(8). – С. 3–14.
- [11] **Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2008. – №2. – С. 56–67.**
- [12] **Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // Информационные технологии. – 2008. – №8. – С. 31–38.**