

На правах рукописи

МАРЧЕВСКИЙ Илья Константинович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ
ЕГО УСТОЙЧИВОСТИ В ПОТОКЕ ПО ЛЯПУНОВУ**

- 05.13.18 — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ
01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена в Московском государственном техническом
университете имени Н.Э. Баумана

- Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Ванько Вячеслав Иванович
- Научный консультант: кандидат физико-математических наук,
доцент Щеглов Георгий Александрович
- Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Феоктистов Владимир Васильевич
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Дынникова Галина Яковлевна
- Ведущая организация: Институт машиноведения им. А.А. Бла-
гонравова РАН

Защита состоится «14» октября 2008 года в 15 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «10» сентября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент

А.В. Аттетков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. При проектировании строительных конструкций, подверженных ветровым нагрузкам, прямолинейных участков трубопроводов, находящихся в поперечном потоке жидкости или газа, трубчатых элементов систем охлаждения и теплообменников энергетических установок, отдельных проводов и расщепленных фаз линий электропередачи важно обеспечить устойчивость равновесия указанных элементов конструкций в потоке. Во многих случаях рассматриваемые элементы конструкций имеют значительное удлинение, поэтому возможно рассмотрение двумерной задачи об устойчивости положения равновесия профиля исследуемой конструкции в плоскопараллельном потоке. Известны случаи, когда недостаточно полное исследование данного вопроса приводило к выходу конструкций из строя.

В настоящее время анализ устойчивости профиля в потоке сводится, как правило, к проверке условия Глауэрта–Ден-Гартога, которое внесено в нормы проектирования и подтверждено в многочисленных экспериментальных исследованиях. Следует отметить, что указанное условие получено для систем с одной степенью свободы и имеет характер необходимого условия аэродинамической неустойчивости — явления, при котором наблюдается резкий рост амплитуды колебаний профиля в потоке. Актуальной задачей является получение необходимых и достаточных условий (критериев) устойчивости по Ляпунову положений равновесия в потоке для профиля с двумя и тремя степенями свободы.

Для исследования устойчивости широкого класса профилей необходимо иметь эффективный способ определения аэродинамических характеристик. Они могут быть получены путем проведения экспериментов по продувке профилей в аэродинамических трубах, а также путем численного моделирования обтекания. Проведение экспериментов сопряжено со значительными затратами, поэтому использование методов вычислительной гидродинамики (CFD) повышает эффективность процесса проектирования конструкций. Однако расчеты с использованием известных пакетов программ CFD часто требуют привлечения значительных вычислительных ресурсов. Поэтому актуальной задачей является создание программного комплекса, позволяющего моделировать обтекание профиля потоком и определять его аэродинамические характеристики с приемлемой точностью и сравнительно низкими затратами машинного времени.

Совместное использование разработанного программного комплекса и аналитически полученных условий устойчивости позволяет совершенствовать методики исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке, что делает настоящую работу актуальной.

Цель и задачи исследования. Цель работы состоит в получении условий устойчивости по Ляпунову положений равновесия профиля в потоке и определении неустойчивых положений равновесия профиля в потоке путем совместного использования аналитических условий устойчивости и численного метода определения аэродинамических характеристик профиля. Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач.

1. Построение математической модели движения профиля с тремя степенями свободы. На профиль наложены идеально упругие или вязкоупругие связи с линейной диссипацией.

2. Исследование устойчивости по Ляпунову и получение условий устойчивости положений равновесия профиля в потоке.

3. Разработка и программная реализация модификации метода вихревых элементов для численного моделирования обтекания профилей и определения аэродинамических нагрузок.

4. Построение и верификация численно-аналитического метода исследования устойчивости по Ляпунову положений равновесия профиля в потоке.

Методы исследования. Для решения задач, поставленных в диссертационной работе, использованы следующие методы исследования: анализ устойчивости по Ляпунову положений равновесия динамической системы по первому приближению; вихревых элементов и подход Прандтля для моделирования обтекания профиля.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена строгостью используемого математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, полученными ранее другими авторами в частных случаях.

Научная новизна. В диссертации получены новые критерии устойчивости по Ляпунову положений равновесия плохообтекаемого профиля в потоке с одной, двумя и тремя степенями свободы с идеально упругими и вязкоупругими связями с линейной диссипацией.

Разработана новая модификация метода вихревых элементов, основанная на использовании подхода Прандтля, позволяющая моделировать обтекание профилей и определять стационарные и нестационарные аэродинамические нагрузки при минимальных требованиях к вычислительным ресурсам.

На базе полученных результатов разработан численно-аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия профиля, основанный на численном определении стационарных аэродинамических коэффициентов профиля и нахождении неустойчивых положений равновесия при помощи аналитически выведенных условий неустойчивости.

Практическая и теоретическая ценность полученных в диссертации критериев устойчивости и построенного численно-аналитического метода исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке состоит в возможности проведения эффективного анализа на этапе эскизного проектирования конструкции и организации экспериментов. Рассмотренный метод численного моделирования обтекания позволяет с достаточной точностью определять аэродинамические нагрузки и выполнять расчеты со сравнительно небольшими временными затратами.

На защиту выносятся следующие положения:

- модель движения профиля с тремя степенями свободы в потоке среды;
- условия устойчивости положений равновесия профиля по Ляпунову при наличии идеально упругих либо вязкоупругих связей с линейной диссипацией, обобщающие известные в литературе результаты;
- достаточные условия неустойчивости положений равновесия профиля, инвариантные относительно механических и геометрических характеристик профиля;
- модификация метода вихревых элементов, использующая подход Прандтля для численного моделирования обтекания профиля, и ее программная реализация;
- метод исследования устойчивости положений равновесия профиля по Ляпунову, основанный на численном определении стационарных аэродинамических коэффициентов профиля и нахождении неустойчивых положений равновесия при помощи аналитически выведенных условий неустойчивости.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XII и XIII Международных симпозиумах “Метод дискретных особенностей в задачах математической физики” (г. Херсон, 2005 и 2007), VII и VIII Крымских Международных математических школах “Метод функций Ляпунова и его приложения” (г. Алушта, 2004 и 2006), VII и VIII Международных конференциях по математическому моделированию (г. Феодосия, 2005 и 2006), III и IV Всероссийских конференциях “Необратимые процессы в природе и технике” (г. Москва, 2005 и 2007), научной конференции “Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы” (г. Москва, 2005), XIV Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2005), Международной конференции “Dynamical System Modelling and Stability Investigation. Modelling & Stability” (г. Киев, 2005), IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (г. Нижний Новгород, 2006), XVI школе-семинаре “Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках” под рук. акад. РАН А.И. Леонтьева (г. Санкт-Петербург, 2007),

Всероссийском семинаре “Динамика конструкций гидроупругих систем. Численные методы” (г. Москва, 2008) и др.

Результаты исследований неоднократно докладывались и обсуждались на научных семинарах: Научный семинар “Актуальные проблемы геометрии и механики” им. проф. В.В. Трофимова под рук. проф. Д.В. Георгиевского, М.В. Шамолина, С.А. Агафонова (МГУ им. М.В. Ломоносова), Семинар по механике сплошной среды им. Л.А. Галина под рук. проф. В.М. Александрова, В.Н. Кукуджанова, А.В. Манжирова (Институт проблем механики РАН), Семинар по аэромеханике под рук. акад. РАН Г.Г. Черного (Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова), Международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар им. С.М. Белоцерковского под рук. проф. М.И. Ништа, А.И. Желанникова, В.В. Вышинского (ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского), Московский ежемесячный семинар молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН) и др.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 6 научных статьях [1,4,5,6,11,12] и 6 тезисах докладов [2,3,7,8,9,10].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, общих выводов, списка литературы и приложения. Диссертация изложена на 119 страницах, содержит 39 иллюстраций. Библиография включает 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор литературы по теме исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава посвящена исследованию уравнений движения профиля в потоке жидкости или газа и получению необходимых и достаточных условий устойчивости положений равновесия профиля.

В диссертации рассмотрена модель движения профиля с тремя степенями свободы, расчетная схема которой приведена на рис. 1.

Набегающий поток считается горизонтальным и имеет постоянную скорость V_∞ . Положение точки закрепления про-

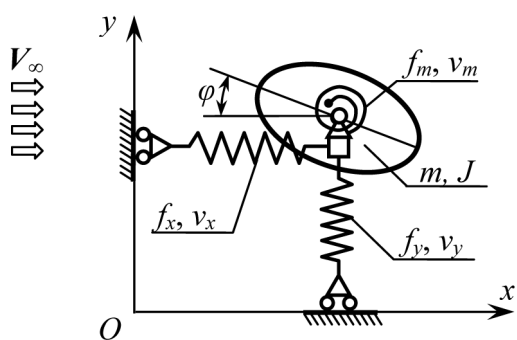


Рис. 1

филя определяется координатами x, y , а поворот вокруг точки закрепления — углом φ ; m и J — масса и момент инерции профиля; f_x, f_y, f_m и ν_x, ν_y, ν_m — упругие и вязкие характеристики связей соответственно.

В предположении о стационарности аэродинамических коэффициентов получена система дифференциальных уравнений 6-го порядка, описывающая движение профиля в потоке, которая имеет вид:

$$m\ddot{x} + \nu_x\dot{x} + f_x x = \frac{1}{2}\rho S \sqrt{(V_\infty - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \left(C_{xa}(\alpha) (V_\infty - \dot{x}) + C_{ya}(\alpha) \dot{y} \right),$$

$$m\ddot{y} + \nu_y\dot{y} + f_y y = \frac{1}{2}\rho S \sqrt{(V_\infty - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \left(C_{xa}(\alpha) (-\dot{y}) + C_{ya}(\alpha) (V_\infty - \dot{x}) \right),$$

$$J\ddot{\varphi} + \nu_m\dot{\varphi} + f_m\varphi = \frac{1}{2}C_{ma}(\alpha)\rho S^2 \left((V_\infty - \dot{x})^2 + \dot{y}^2 \right).$$

Здесь $\alpha = \varphi - \arctg \frac{\dot{y}}{V_\infty - \dot{x}}$ — угол атаки, вычисляемый с учетом движения профиля, ρ — плотность среды, S — характерный размер (хорда) профиля.

Доказано, что при любой скорости набегающего потока V_∞ существует положение равновесия профиля (x_0, y_0, φ_0) , и поставлена задача об исследовании устойчивости равновесия по Ляпунову.

Для решения задачи используется метод исследования устойчивости положений равновесия по первому приближению. Зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов профиля от угла атаки считаем дифференцируемыми; это позволяет линеаризовать уравнения движения в окрестности положений равновесия. Линеаризованная система дифференциальных уравнений возмущенного движения после приведения к безразмерным переменным имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \omega_x^2\xi &= \varepsilon \cdot \left(-(C_{xa} + \mu_x) \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{1}{2}(C_{ya} - C'_{xa}) \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{1}{2}C'_{xa}\gamma \right), \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \omega_y^2\eta &= \varepsilon \cdot \left(-C_{ya} \frac{d\xi}{d\tau} - \frac{1}{2}(C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y) \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{1}{2}C'_{ya}\gamma \right), \\ \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + \omega_m^2\gamma &= \varepsilon \cdot \left(-\frac{C_{ma}}{\sigma} \frac{d\xi}{d\tau} - \frac{1}{2\sigma}C'_{ma} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{1}{2\sigma}C'_{ma}\gamma - \mu_m \frac{d\gamma}{d\tau} \right), \end{aligned}$$

Здесь $\xi = \frac{x - x_0}{S}$, $\eta = \frac{y - y_0}{S}$, $\gamma = \varphi - \varphi_0$ — безразмерные координаты профиля; $\tau = \frac{tV}{S}$ — безразмерное время; $\omega_x, \omega_y, \omega_m$ — безразмерные частоты, определяемые жесткостями связей; μ_x, μ_y, μ_m — безразмерные вязкости связей; σ — параметр, определяемый формой и положением точки закрепления профиля.

Безразмерный параметр $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{S}{b}$ является малым, $\varepsilon \ll 1$, если профиль является *тяжелым плохообтекаемым*, т.е. если плотность материала профиля ρ_0 много больше плотности набегающего потока ρ , а два

его характерных размера близки. Например, для типичного сталеалюминиевого провода воздушной линии электропередачи $\varepsilon = 10^{-3} \dots 10^{-4}$. Далее исследуется устойчивость именно таких профилей, что позволяет в окончательных результатах учитывать лишь слагаемые, содержащие младшие степени ε .

Исследование устойчивости положений равновесия основано на анализе знаков действительных частей корней характеристического уравнения системы при помощи теоремы Гурвица. Отдельно рассматриваются случаи идеально упругих связей (т.е. при $\mu_x = \mu_y = \mu_m = 0$) и вязкоупругих связей (при $\varepsilon \ll \mu_x, \mu_y, \mu_m \ll \frac{1}{\varepsilon}$).

Помимо общего случая системы с тремя степенями свободы рассмотрены также частные случаи, соответствующие движению системы, изображенной на рис. 1, с меньшим числом степеней свободы.

При наличии у системы “горизонтальной” и “вертикальной” степеней свободы проводится отдельное исследование для систем с одинаковыми и различными частотами (т.е. при $\omega_x = \omega_y$ и при $\omega_x \neq \omega_y$).

В результате для всех случаев получены необходимые и достаточные условия (критерии) устойчивости положений равновесия профиля в потоке, которые представлены в таблице 1.

Таблица 1

Обобщенные координаты		Критерии устойчивости	
		Для идеально упругих связей	Для вязкоупругих связей
Движение с 1 степенью свободы			
x		Положение равновесия всегда асимптотически устойчиво	
y		$G > 0$	$G_\mu > 0$
φ		$F > 0$	$F > 0$
Движение с 2 степенями свободы			
$x - \varphi$		$\begin{cases} P_x > 0 \\ F > 0 \end{cases}$	$F > 0$
$y - \varphi$		$\begin{cases} G > 0 \\ P_y > 0 \\ F > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} G_\mu > 0 \\ F > 0 \end{cases}$
$x - y$	$\omega_x = \omega_y$	$\begin{cases} M > 0 \\ W > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_\mu > 0 \\ W_\mu > 0 \end{cases}$
	$\omega_x \neq \omega_y$	$G > 0$	$G_\mu > 0$
Движение с 3 степенями свободы			
$x - y - \varphi$	$\omega_x = \omega_y$	$\begin{cases} M > 0 \\ P > 0 \\ W > 0 \\ F > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_\mu > 0 \\ W_\mu > 0 \\ F > 0 \end{cases}$
	$\omega_x \neq \omega_y$	$\begin{cases} G > 0 \\ P > 0 \\ F > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} G_\mu > 0 \\ F > 0 \end{cases}$

В таблице 1 приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 G &= C_{xa} + C'_{ya}, \quad G_\mu = G + 2\mu_y, \quad M = G + 2C_{xa}, \quad M_\mu = G_\mu + 2(C_{xa} + \mu_x), \\
 W &= C_{xa}(C_{xa} + C'_{ya}) + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa}), \\
 W_\mu &= (C_{xa} + \mu_x)(C_{xa} + C'_{ya} + 2\mu_y) + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa}), \\
 P_x &= \frac{C'_{xa}C_{ma}}{\omega_x^2 - \omega_m^2}, \quad P_y = \frac{C'_{ya}C_{ma}}{\omega_y^2 - \omega_m^2}, \quad P = P_y + 2P_x, \quad F = \frac{2f_m}{\rho S^2} - V_\infty^2 C'_{ma}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого случая движения профиля с 1, 2 и 3 степенями свободы получены неравенство или система неравенств, при выполнении которых положение равновесия профиля является устойчивым по Ляпунову. В то же время, если хотя бы одно неравенство меняет смысл на противоположный, положение равновесия становится неустойчивым.

Во всех случаях при наличии у системы “вращательной” степени свободы для устойчивости по Ляпунову положения равновесия необходимо выполнение условия $F > 0$, или

$$V_\infty^2 C'_{ma} < \frac{2f_m}{\rho S^2}.$$

Соответственно, положение равновесия станет неустойчивым при условии

$$C'_{ma} > 0 \quad \text{и} \quad V_\infty > \sqrt{\frac{2f_m}{\rho S^2 C'_{ma}}} = V_{\text{кр}},$$

где $V_{\text{кр}}$ обозначает критическую скорость набегающую потока, выше которой положение равновесия теряет устойчивость. Полученное выражение для $V_{\text{кр}}$ аналогично известной в литературе формуле, определяющей критическую скорость флаттера.

В случае идеально упругих связей из полученных результатов следуют достаточные условия неустойчивости $G < 0$, $M < 0$, $W < 0$, которые зависят лишь от безразмерных стационарных аэродинамических коэффициентов профиля C_{xa} и C_{ya} и инвариантны по отношению к выбору точки закрепления профиля, его массе и моменту инерции, жесткостям связей. Следовательно, изменение этих параметров конструкции не влияет на характер устойчивости положения равновесия профиля.

Полученные критерии являются обобщениями известных результатов: для системы с одной “вертикальной” степенью свободы условие $G < 0$ (условие Глауэрта–Ден-Гартога) является необходимым и достаточным условием неустойчивости при идеально упругих связях, а условие $W < 0$ (условие В.И. Ванько) является достаточным условием неустойчивости для системы с тремя степенями свободы при одинаковых жесткостях связей.

При наличии вязкоупругих связей с линейной диссипацией все полученные условия устойчивости (за исключением обсуждавшегося выше условия $F > 0$) зависят только от коэффициентов C_{xa} и C_{ya} и коэффициентов демпфирования μ_x и μ_y .

Во второй главе диссертации обсуждаются вопросы математического моделирования обтекания профиля и определения аэродинамических нагрузок, действующих на профиль.

Рассматривается двумерная задача о моделировании обтекания жесткого неподвижного профиля потоком вязкой несжимаемой среды с постоянной плотностью $\rho = \text{const}$. Область течения S является безграничной и возмущается только профилем. Движение среды описывается уравнениями неразрывности и Навье-Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{V}.$$

Здесь \mathbf{V} — скорость, p — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, ∇ — оператор Гамильтона. Граничные условия имеют вид:

— граничное условие “на бесконечности”

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{V}_\infty \quad \text{и} \quad p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p_\infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty;$$

— граничное условие “на профиле” (условие прилипания)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in K,$$

где K — контур обтекаемого профиля.

Использование модели несжимаемой среды оправдано, поскольку рассматриваются течения, характеризуемые числами Маха $M < 0,4$, при этом сжимаемость проявляется слабо и практически не влияет на аэродинамические нагрузки, действующие на профиль.

При решении задачи вихревыми методами исследуется эволюция поля завихренности $\Omega = \text{rot} \mathbf{V}$, которая описывается уравнением

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \text{rot}((\mathbf{V} + \mathbf{W}) \times \Omega),$$

где $\mathbf{W} = \nu \frac{\text{rot} \Omega \times \Omega}{|\Omega|^2}$ — диффузная скорость, вызванная влиянием вязкости. Известен аналог теоремы Томсона для вязкой жидкости: циркуляция поля скоростей, вычисляемая по контуру, каждая точка которого движется со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{W}$, сохраняется. Это означает, что в области течения S не происходит генерации “новой” завихренности, а имеющаяся движется со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{W}$. Генерация завихренности происходит только на контуре K обтекаемого профиля.

По известному полю завихренности Ω с использованием закона Био-Савара находится поле скоростей среды V :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\Omega(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi = \mathbf{V}_\infty + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi.$$

Здесь Ω — проекция вектора Ω на нормаль к плоскости течения.

Аналог интеграла Коши-Лагранжа, полученный в работах Г.Я. Дынниковой, позволяет определить давление в области течения по формуле

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - I_\Omega + I_\gamma = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2},$$

где I_Ω — слагаемое, учитывающее движение имеющейся завихренности, I_γ — слагаемое, связанное с генерацией завихренности на контуре.

Аэродинамические нагрузки, действующие на профиль, определяются путем интегрирования давления по контуру.

При моделировании обтекания вихревыми методами уравнение неразрывности и граничное условие “на бесконечности” выполняются автоматически. Граничное условие “на профиле” сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестного распределения поверхностной завихренности $\gamma(\mathbf{r})$ на контуре (при $\mathbf{r} \in K$)

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \oint_K \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left(\mathbf{V}_\infty - \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi \right),$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — вектор единичной нормали к контуру K . Для выделения единственного решения задается суммарная величина генерируемой на профиле завихренности, которая находится по теореме Томсона: $\oint_K \gamma dl = - \iint_S \Omega dS$.

В расчетах непрерывное распределение завихренности моделируется при помощи N вихревых элементов — вихревых нитей, перпендикулярных плоскости течения, расположенных в точках с радиус-векторами \mathbf{r}_i и имеющих интенсивности Γ_i , $i = 1, \dots, N$. При вычислении скоростей по формуле Био-Савара они рассматриваются как круглые вихри Рэнкина с достаточно малым радиусом ε , что позволяет избежать неограниченного роста скоростей вблизи центров вихрей.

Генерируемая завихренность моделируется дискретными вихревыми элементами (вихревыми нитями), интенсивности которых определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих интегральное уравнение и условие выделения единственного решения. Описание и обоснование метода решения интегрального уравнения имеется в работах И.К. Лифанова.

В диссертации рассматривается обтекание профилей средой с малой вязкостью (воздух, вода), поэтому в данной диссертации используется классический подход Прандтля, в соответствии с которым вся область течения разделяется на тонкую пристеночную область (пограничный слой), где существенно влияние вязкости, и область внешнего течения, где среда считается идеальной. При такой модификации метода вихревых элементов моделируется генерация завихренности на контуре, а в дальнейшем вихревые элементы считаются движущимися в идеальной жидкости по траекториям жидких частиц.

Это позволяет не вычислять диффузную скорость \mathbf{W} , что существенно снижает общую трудоемкость задачи и требования к вычислительным ресурсам.

Следовательно, движение вихревых элементов описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \Gamma_j, \quad \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_i^0, \quad i = 1, \dots, N,$$

которая решается численно явным методом Эйлера.

Таким образом, алгоритм решения задачи методом вихревых элементов на каждом временном шаге состоит из следующих операций.

1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения вихревых элементов.
2. Решение интегрального уравнения, описывающего генерацию завихренности на контуре.
3. Расчет давления на контуре.

Разработан программный комплекс MDV2D, реализующий данный алгоритм. Структурная схема программного комплекса представлена на рис. 2, назначение основных блоков описано в таблице 2.

Для верификации метода вихревых элементов проведена серия тестовых расчетов:

- обтекание кругового профиля — определялись стационарные аэродинамические коэффициенты и частота схода вихрей;
- обтекание полукруглого профиля — определялись зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки;
- обтекание профиля крыла ЦАГИ РИ-18 — определялись зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки;
- обтекание профиля крыла ЦАГИ В-12 — определялось распределение давления по поверхности профиля при угле атаки 5° .

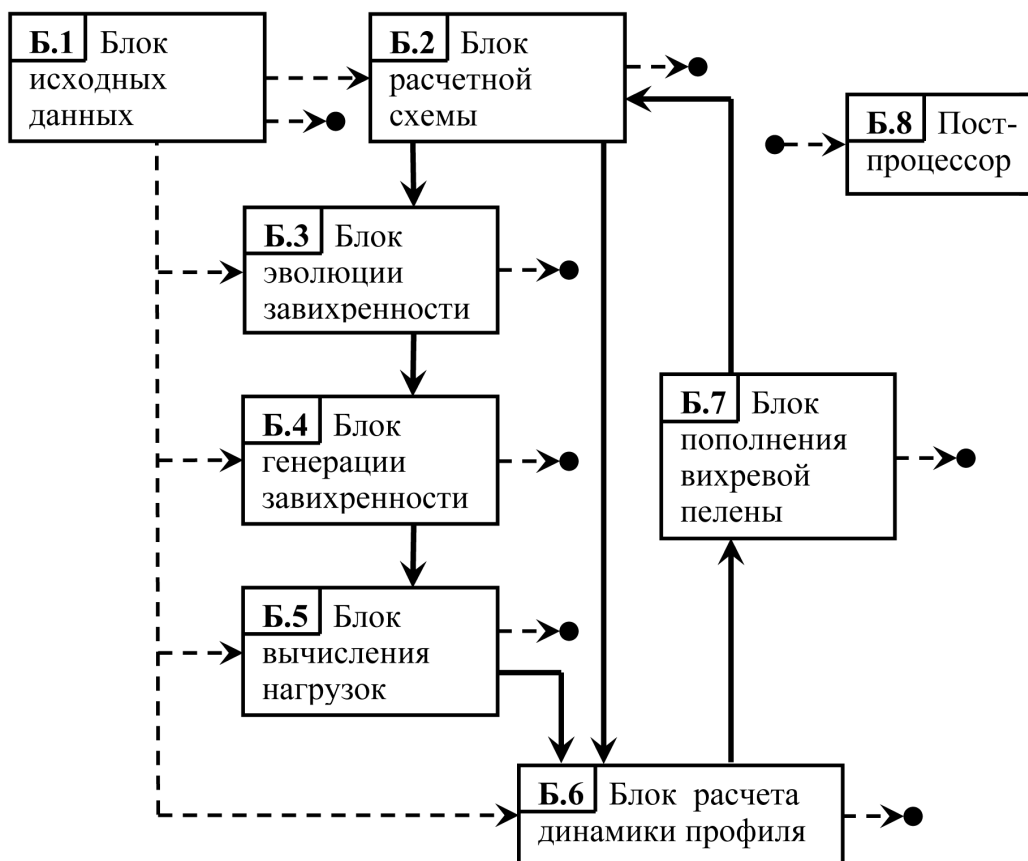


Рис. 2

Таблица 2

	Блок	Основное назначение
1.	Блок исходных данных	Содержит информацию для всех этапов расчета
2.	Блок расчетной схемы	Построение расчетной схемы на профиле
3.	Блок эволюции завихренности	Интегрирование уравнений движения вихревых элементов, объединение близкорасположенных вихревых элементов в один
4.	Блок генерации завихренности	Определение интенсивностей генерируемых вихревых элементов путем решения СЛАУ
5.	Блок вычисления нагрузок	Расчет давления, определение главного вектора и главного момента аэродинамических сил, действующих на профиль
6.	Блок динамики профиля	Расчет движения профиля по заданному заранее закону либо под действием аэродинамических сил и сил реакции связей (для возможности прямого численного моделирования в связанных задачах аэроупругости).
7.	Блок пополнения вихревой пелены	Пополнение вихревой пелены сгенерированными на текущем шаге вихревыми элементами
8.	Постпроцессор	Сохранение и обработка промежуточных результатов расчета, визуализация, индикация параметров расчета.

На рис. 3 приведена структура вихревого следа, образующегося за круговым профилем, и построены линии тока; точками отмечены положения отдельных вихревых элементов. На рис. 4 представлены полученные зависимости нестационарных аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы от времени.

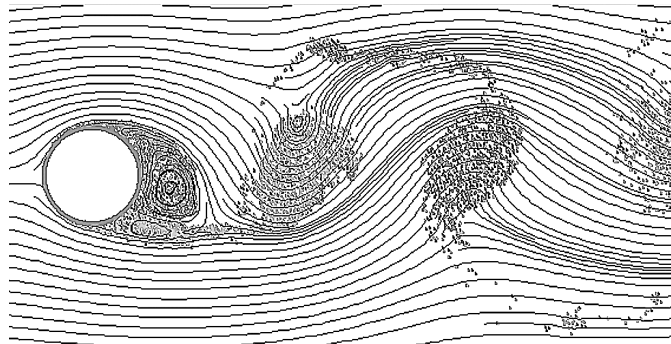


Рис. 3

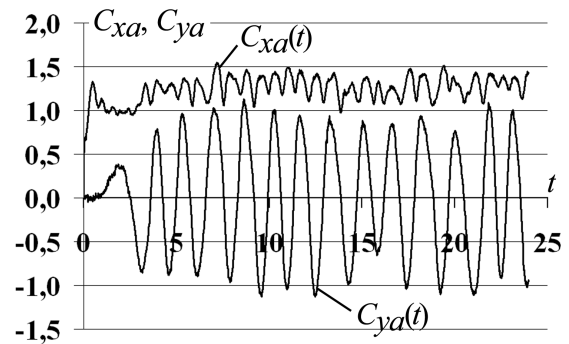


Рис. 4

Из экспериментов известно, что для кругового профиля стационарный коэффициент лобового сопротивления $C_{xa} \approx 1,2$, стационарный коэффициент подъемной силы $C_{y\alpha} \approx 0$.

На рис. 5 и 6 представлены результаты вычисления стационарных аэродинамических коэффициентов для крылового профиля ЦАГИ РП-18 в сравнении с экспериментальными данными.

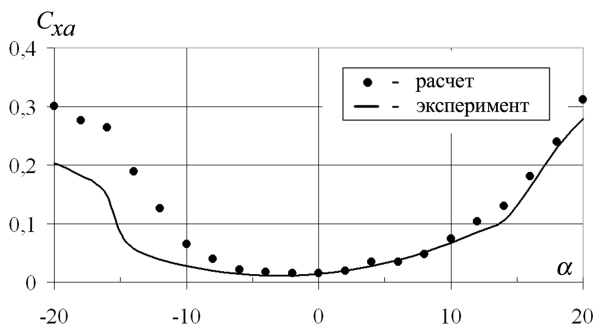


Рис. 5

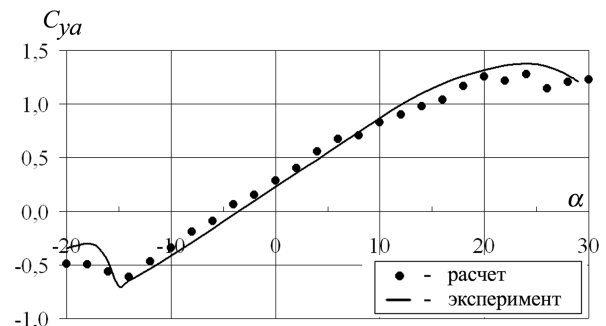


Рис. 6

В остальных случаях также наблюдается хорошее качественное и удовлетворительное количественное согласие результатов.

Таким образом, модификация метода вихревых элементов, основанная на использовании подход Прандтля, может использоваться в качестве приближенного инженерного метода для исследования поведения конструкций, находящихся в дозвуковом потоке жидкости или газа. Главное преимущество такой модификации состоит в сравнительно низких требованиях к производительности ЭВМ, на которых выполняются расчеты, и, следовательно, возможности проведения большого количества расчетов при малых временных затратах.

В третьей главе на базе выведенных условий устойчивости и разработанной модификации метода вихревых элементов предложен следующий метод исследования устойчивости по Ляпунову положений равновесия профиля в потоке.

Для определения углов атаки профиля, соответствующих неустойчивым положениям профиля в потоке, используются инвариантные относительно механических и геометрических параметров профиля достаточные условия неустойчивости $G(\alpha) < 0$ и $W(\alpha) < 0$, зависящие только от стационарных аэродинамических коэффициентов профиля и их производных по углу атаки.

Предложенный численно-аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке предполагает последовательное выполнение следующих этапов:

1. С использованием метода вихревых элементов моделируется обтекание и определяются стационарные аэродинамические коэффициенты профиля для различных углов атаки.
2. По найденным значениям строятся гладкие зависимости $C_{xa}(\alpha)$, $C_{ya}(\alpha)$ стационарных коэффициентов от угла атаки. Для аппроксимации используются полиномы Чебышева первого рода, коэффициенты в линейных комбинациях находятся методом наименьших квадратов.
3. Вычисляются производные аэродинамических коэффициентов $C'_{xa}(\alpha)$, $C'_{ya}(\alpha)$ по углу атаки и находятся значения функций $G(\alpha)$ и $W(\alpha)$. В соответствии с результатами главы 1, положения равновесия профиля будут неустойчивыми при углах атаки, для которых выполняются условия $G(\alpha) < 0$, $W(\alpha) < 0$.

Для проверки работоспособности данного численно-аналитического метода и оценки его адекватности и эффективности проведен ряд тестовых расчетов, в которых исследовалась устойчивость положений равновесия профилей, имеющих форму ромба и квадрата. Для них в литературе известны результаты эксперимента по исследованию устойчивости, проведенного в Лаборатории промышленной аэродинамики ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского. В эксперименте упругозакрепленный профиль мог совершать колебания поперек потока, и для различных углов атаки измерялась амплитуда колебаний профиля.

Графики функций $G(\alpha)$ и $W(\alpha)$ и области неустойчивости, полученные в результате применения разработанного численно-аналитического метода, представлены на рис. 7 и 8 для профилей в форме ромба и квадрата соответственно. На них же указаны экспериментально определенные зависимости безразмерных амплитуд колебаний профилей от углов атаки.

Полученные в результате применения численно-аналитического метода исследования устойчивости интервалы углов атаки, соответствующих неустойчивым положениям профиля, хорошо согласуются с интервалами углов атаки, при которых в эксперименте возбуждались колебания профилей с большой амплитудой (что является проявлением неустойчивости).

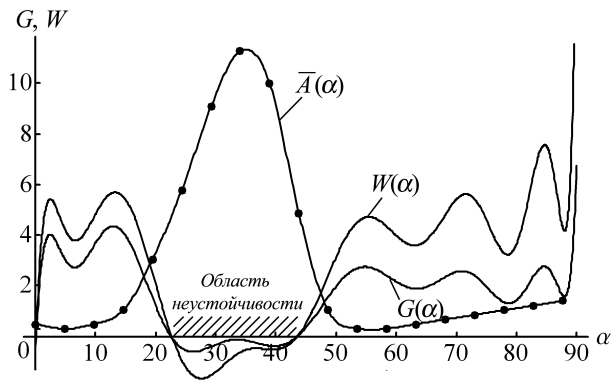


Рис. 7

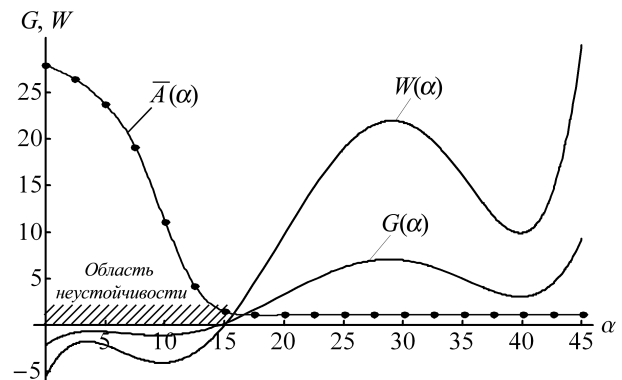


Рис. 8

В диссертации проведено исследование устойчивости профиля, имеющего характерную форму обледенелого провода ЛЭП, рис. 9.

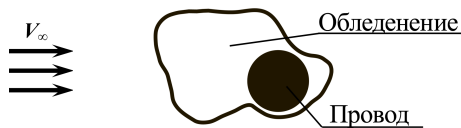


Рис. 9

Полученные зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки представлены на рис. 10, а графики построенных зависимостей $G(\alpha)$ и $W(\alpha)$ при $\alpha \in (-10^\circ; 20^\circ)$ приведены на рис. 11. При остальных значениях α функции $G(\alpha)$ и $W(\alpha)$ принимают положительные значения.

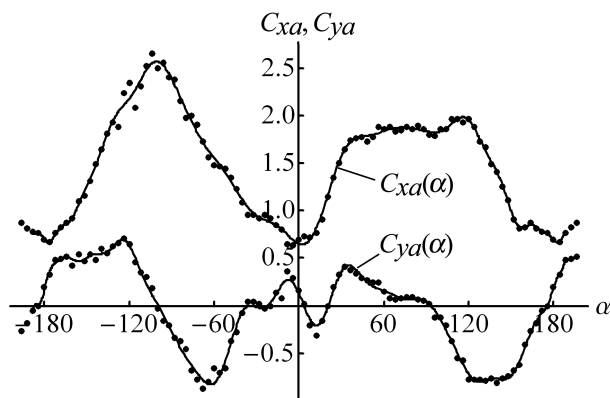


Рис. 10

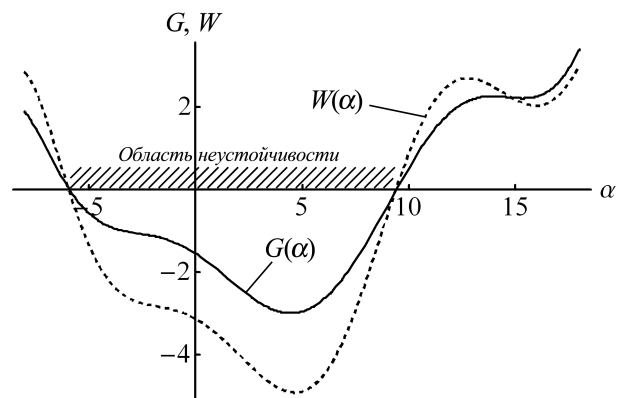


Рис. 11

Положения равновесия, соответствующие углам атаки профиля $-6^\circ < \alpha < 9^\circ$, будут являться неустойчивыми; нулевой угол атаки, соответствующий естественному равновесному положению провода ЛЭП, лежит внутри области неустойчивости. Полученный результат согласуется с известным из экспериментальных исследований фактом о том, что для обледенелых проводов характерно явление галопирования (пляски).

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. В предположении о стационарности аэродинамических нагрузок, действующих на профиль, помещенный в поток и имеющий 1, 2 или 3 степени свободы, выведены необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову положений равновесия профиля при наличии идеально упругих и вязкоупругих связей.

2. Для моделирования обтекания профиля и вычисления стационарных аэродинамических коэффициентов разработана модификация метода вихревых элементов и создан комплекс программ, ее реализующий.

Модификация состоит в использовании подхода Прандтля. Предложенный метод позволяет снизить требования к вычислительным ресурсам и существенно уменьшить затраты машинного времени на проведение расчетов.

3. Разработан численно-аналитический метод исследования устойчивости по Ляпунову положений равновесия профиля в потоке.

Рассмотрены примеры определения интервалов углов атаки, соответствующих неустойчивым положениям равновесия различных профилей.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Ванько В.И., Щеглов Г.А., Марчевский И.К. Аэродинамическая неустойчивость системы профилей // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сборник трудов. — М.: Логос, 2005. — С. 423-436.
2. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Исследование устойчивости обледенелого провода ЛЭП в плоскопараллельном потоке // Образование через науку: Тез. докл. Международной конференции. — М., 2005. — С. 575-576.
3. Ванько В.И., Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Неустойчивость по Ляпунову равновесия плохообтекаемых профилей в потоке идеальной жидкости // Dynamical System Modelling and Stability Investigation. Modelling & Stability: Thesis of conference reports. — Kyiv, 2005. — P. 253.
4. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Об одном подходе к моделированию обтекания профилей идеальной жидкостью методом дискретных вихрей // Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики: Праці XII Міжнародного симпозіуму. — Харків-Херсон, 2005. — С. 222-225.

5. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Об одном подходе к расчету аэродинамических характеристик профиля в идеальной жидкости методом дискретных вихрей // Вісник Харківського національного університету. Серія М. — 2005. — № 661, вып.4. — С. 182-191.
6. Ванько В.И., Марчевский И.К., Щеглов Г.А. О неустойчивости положения равновесия произвольного профиля в потоке идеальной жидкости // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности: Сб. науч. трудов. — СПб., 2005. — С. 15-19.
7. Ванько В.И., Марчевский И.К. Механика проводов воздушных линий электропередачи // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. — Нижний Новгород, 2006. — Т.3. — С. 53-54.
8. Ванько В.И., Марчевский И.К. Колебания и аэродинамическая неустойчивость проводов расщепленной фазы высоковольтных линий электропередачи // Метод функций Ляпунова и его приложения: Тез. докл. VIII Крымской Международной математической школы. — Алушта, 2006. — С. 39.
9. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Вычисление гидродинамических нагрузок, действующих на колеблющийся профиль, методом вихревых элементов // Необратимые процессы в природе и технике: Труды IV Всероссийской конференции. — М., 2007. — С. 288-290.
10. Марчевский И.К. Об устойчивости по Ляпунову положения равновесия профиля в потоке // ПОЛІТ: Матеріали VII Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених. — Киев, 2007. — С. 91.
11. Марчевский И.К. Исследование устойчивости положений равновесия труб теплообменника при их наружном поперечном обтекании теплоносителем // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. — Т.2. — М., 2007. — С. 162-165.
12. **Марчевский И.К. Об условиях устойчивости положения равновесия профиля в потоке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. — 2007. — № 4. — С. 29-36.**

Подписано к печати 4.09.08. Заказ № 484
Объем 1,0 печ.л. Тираж 100 экз.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5
263-62-01