На правах рукописи

ЗАХАРОВ Андрей Алексеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ МЕТОДОМ ЛЕНТОЧНЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

Специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Димитриенко Юрий Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Шахов Евгений Михайлович

кандидат физико-математических наук, доцент
Пархоменко Валерий Павлович

Ведущая организация: ОАО «ВПК «НПО машиностроения»

Защита диссертации состоится «___» октября 2009 года в ____ час. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «___» _______ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент — Аттетков А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы. В настоящее время для численного моделирования в газовой динамике применяются как коммерческие расчетные пакеты, так и собственные разработки компаний, занимающихся проектированием изделий, а также разработки университетов и научно–исследовательских институтов. Основная причина, почему коммерческие пакеты не вытеснили собственные разработки компаний, по–видимому, заключается в том, что универсальные методы вычислений, заложенные в коммерческие продукты, не гарантируют точности вычислений при решении сложных задач, которые не тестировались разработчиками. Постоянно возрастающая сложность задач требует постоянного совершенствования вычислительных алгоритмов. Узкоспециализированные программы позволяют добиваться превосходства над более универсальными пакетами как в вычислительном аспекте (быстродействие и требуемые ресурсы компьютера), так и с точки зрения удобства использования программ.

В последнее время активно развиваются методы адаптивных сеток, в которых важнейший элемент всех численных методов — разностная сетка — или выбирается согласованно с границами расчетной области задачи (геометрически–адаптивные сетки), или изменяется в ходе решения в зависимости от изменений параметров газового потока (динамически–адаптивные сетки). Преимущество адаптивных сеток заключается в согласованности линий сетки с линиями тока и, соответственно, с характером течения. Хорошо известны работы по методам построения адаптивных сеток и численному моделированию с их помощью: Годунова С.К., Забродина А.В., Крайко А.Н., Прокопова Г.П., Воскресенского Г.П., Бабенко К.И., Белоцерковского О.М., Гильманова А.Н., Тишкина В.Ф., Лисейкина В.Д., Иваненко С.А., Бураго Н.Г., Айсмана П.К., Эриксона Л.Э., Томпсона Дж.Ф., Смита Р.Е. и многих других.

Существующие научные работы, в которых используются методы адаптивных сеток, в основном посвящены либо методам генерации таких сеток, без рассмотрения алгоритмов компьютерного задания расчетной области и рассмотрения работы с такими сетками при численном решении задач газовой динамики в сложных многомерных областях, либо описанию решений конкретных задач газовой динамики, без детализации процесса построения расчетной сетки, предполагая ее уже построенной. Важной и нерешенной проблемой остается проблема создания алгоритмов разбиения областей со сложной границей на криволинейные блоки.

Примером сложных многомерных областей с криволинейными границами являются области течения газа в каналах сверхзвуковых воздухозаборников (СВЗ). Одной из важных характеристик работы СВЗ является дроссельная характеристика. Задачи построения дроссельной характеристики и выявления неустановившихся режимов (помпажа) являются достаточно трудоемкими, и их решение с помощью существующих методов численного расчёта течений газа в каналах СВЗ может приводить к большим погрешностям расчёта, а в отдельных случаях вовсе оказывается невозможным.

Таким образом, актуальность темы определяется необходимостью моделирования нестационарных течений газа в сложных многомерных областях с использованием методов адаптивных сеток как для режимов с наличием установления, так и режимов без установления.

Цели работы и задачи исследования:

1) разработка математической модели комбинированного (внутреннего и внешнего) нестационарного течения газа в областях сложной формы с криволинейными границами;

2) разработка метода ленточных адаптивных сеток (ЛАС) для расчёта многомерных нестационарных газодинамических процессов в областях сложной криволинейной формы типа областей каналов СВЗ;

3) разработка программного комплекса (ПК) на основе алгоритма метода ЛАС;

4) проведение численного моделирования течений газа в СВЗ, определение параметров течения и характеристик СВЗ при различных режимах дросселирования, сравнение осесимметричных и трехмерных течений.

Методы исследования. В диссертации применяются методы вычислительной гидро– и газодинамики, вычислительной геометрии, методы адаптивных сеток, численные и сеточные методы, методы тензорного исчисления, методы компьютерного моделирования и визуализации.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в работе, обусловлена корректностью постановки задачи, применением математически обоснованных методов ее решения, апробацией при решении тестовых задач, сравнением результатов расчетов с результатами, полученными другими методами, и экспериментальными данными.

Научная новизна:

1) предложена математическая модель нестационарных газодинамических процессов, которая позволяет исследовать установившиеся и неустановившиеся режимы течения газа в областях сложной формы с криволинейными границами;

2) предложен метод ЛАС для решения многомерных задач динамики идеального газа в областях сложной криволинейной формы типа областей каналов СВЗ, включающий в себя компьютерное построение области решения и генерацию трехмерной адаптивной сетки;

3) осуществлена реализация метода ЛАС и разработан программный комплекс, предназначенный для генерации ЛАС, решения задач динамики идеального газа в сложных областях и компьютерной визуализации результатов решения;

4) проведено численное моделирование процессов течения газа в СВЗ, показавшее, что разработанный метод и ПК позволяют как определять распределения параметров течения в каналах сложной формы с многократным отражением косых скачков уплотнения от твердых стенок, так и проводить расчет дроссельной характеристики СВЗ.

Практическая ценность. Разработан программный комплекс, предназначенный для моделирования нестационарных газодинамических потоков в СВЗ и исследования дроссельного эксперимента. Получены результаты численного моделирования течений газа в канале СВЗ при различных режимах дросселирования, построена дроссельная характеристика СВЗ, проведено моделирование течения газа в канале СВЗ с учетом геометрии пилонов канала, исследовано влияние геометрии пилонов на выходные значения газодинамических параметров.

На защиту выносятся следующие положения:

- математическая модель многомерных нестационарных газодинамических процессов в областях сложной формы с криволинейными границами;
- метод генерации ЛАС, позволяющий осуществлять компьютерное задание геометрии сложных криволинейных областей типа каналов СВЗ на основе методов интерполяции сплайнами и генерировать адаптивные сетки для таких областей;
- метод решения задач динамики идеального газа в каналах СВЗ на основе ЛАС.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на: общеуниверситетской научно–технической конференции «Студенческая научная весна» (Москва, 2005, 2006 и 2007), научно–технической конференции «Аэрокосмические технологии» (Москва–Реутов, 2005 и 2009), 2-ой международной научной конференции «РКТ–2006» (Москва, 2006), конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования. Центральный регион» (Москва, 2006), XIV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2007» (Москва, 2007), 3-ей международной научной конференции «РКТ–2007» (Москва, 2007), 2-ой и 3-ей научно–методической конференции аспирантов и молодых исследователей «Актуальные проблемы фундаментальных наук» (Москва, 2008 и 2009), семинаре кафедры «Математического моделирования» МЭИ (Москва, 2009).

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, в том числе в 3-х статьях перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК РФ [1, 2, 3], 5 тезисах докладов [4, 5, 6, 7, 8] и 1-м учебном пособии [9].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности под руководством научного руководителя.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, 4-х глав, заключения, выводов и списка литературы. Полный объем составляет **127** страниц. Библиография включает **105** наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В **первой главе** диссертационной работы приведена концептуальная постановка задачи моделирования газодинамических процессов в СВЗ, представлена разработанная математическая модель течения газа в областях сложной формы с криволинейными границами, получены дивергентный и недивергентный виды записи системы уравнений газовой динамики в криволинейной неортогональной (адаптивной) системе координат; изложен способ приведения этих видов систем к безразмерной форме, а также даны постановки начальных и граничных условий для различных типов границ в векторном и координатном видах.

Рассмотрим 3 типа координат: x^i — декартовы; $X^j = X^j(x^i)$ — криволинейные (адаптивные); $X'^k = X'^k(x^i)$ — ортогональные криволинейные (физические). Как правило, изначально задача газовой динамики ставится в физических координатах, и в этих же координатах требуется получить ее решение.

Введем обозначения: $Q^i{}_j = \partial x^i/\partial X^j$, $P^j{}_i = \partial X^j/\partial x^i$, $Q'^i{}_k = \partial x^i/\partial X'^k$, $P'^k{}_i = \partial X'^k/\partial x^i$, $\hat{Q}^k{}_j = \partial X'^k/\partial X^j = P'^k{}_l Q^l{}_j$, $\hat{P}^j{}_k = \partial X^j/\partial X'^k = P^j{}_l Q'^l{}_k$ — якобиевы матрицы преобразований, $\mathbf{e}_i$ — базис декартовой системы координат, $\mathbf{r}_j = Q^i{}_j \mathbf{e}_i$, $\mathbf{r}^j = P^j{}_i \mathbf{e}^i$, $\mathbf{r}'_k = Q'^i{}_k \mathbf{e}_i$, $\mathbf{r}'^k = P'^k{}_i \mathbf{e}^i$ — локальные базисы, $g_{jl} = \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_l = Q^m{}_j Q^n{}_l \delta_{mn}$, $g^{jl} = \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}^l = P^j{}_m P^l{}_n \delta^{mn}$, $g'_{kl} = \mathbf{r}'_k \cdot \mathbf{r}'_l = Q'^m{}_k Q'^n{}_l \delta_{mn}$, $g'^{kl} = \mathbf{r}'^k \cdot \mathbf{r}'^l = P'^k{}_m P'^l{}_n \delta^{mn}$ — метрические матрицы, $H_\gamma = \sqrt{g'_{\gamma\gamma}} = \sqrt{\mathbf{r}'_\gamma \cdot \mathbf{r}'_\gamma}$ — параметры Ламе, $g = \det(g_{ij})$, $g' = \det(g'_{ij}) = (H_1 H_2 H_3)^2$ — определители метрических матриц, $\nabla = \mathbf{r}^j\, \partial/\partial X^j$ — набла–оператор в криволинейных координатах X^j, $\hat{\mathbf{r}}_\gamma = \mathbf{r}'_\gamma / H_\gamma$ — физический базис, $\hat{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha}$ — символы Кристоффеля физического базиса:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_\beta}{\partial X'^\alpha} = \hat{\Gamma}^i_{\beta\alpha}\hat{\mathbf{r}}_i, \quad \hat{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial X'^\beta}\delta_{\alpha\gamma} - \frac{1}{H_\gamma}\frac{\partial H_\beta}{\partial X'^\gamma}\delta_{\alpha\beta}.$$

Здесь и далее предполагается, что по совпадающим нижним и верхним латинским индексам идет суммирование, а по греческим индексам суммирования нет. Индексы пробегают значения $1, 2, 3$.

Введем также обозначения для физических параметров задачи: ρ — плотность газа, t — время, $\mathbf{v} = \bar{v}^i \mathbf{e}_i = v^j \mathbf{r}_j = \hat{v}^k \hat{\mathbf{r}}_k$ — вектор скорости, p — давление: $p = \rho B \theta$, $B = R_0/\mu$ — удельная газовая постоянная, $R_0 = 8.3144$ Дж/(моль $\cdot$ К) — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярная масса газа, $\mathbf{E}$ — метрический тензор, ε — плотность полной энергии газа: $\varepsilon = c_V\theta + |\mathbf{v}|^2/2$, $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, c_V — удельная теплоёмкость при постоянном объеме, θ — температура газа.

Система уравнений динамики идеального сжимаемого нетеплопроводного газа, состоящая из уравнения неразрывности, уравнений движения и уравнения энергии и записанная в векторной форме, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0,\\ \frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + p\mathbf{E}) = \mathbf{0},\\ \frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot((\rho\varepsilon + p)\,\mathbf{v}) = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Дивергентный вид системы уравнений (1) в адаптивных криволинейных координатах получается на основании записи основных дифференциальных операторов, участвующих в (1), непосредственно адаптивных координатах X^j. Если ввести координатные столбцы (комплексы): $\mathbf{U}' = [\sqrt{g}\rho, \sqrt{g}\rho\bar{v}^1, \sqrt{g}\rho\bar{v}^2, \sqrt{g}\rho\bar{v}^3, \sqrt{g}\rho\varepsilon]$; $\mathbf{V}'^j = [\sqrt{g}\rho\bar{v}^i P^j{}_i, \sqrt{g}(\rho\bar{v}^1\bar{v}^i + p\delta^{1i}P^j{}_i), \sqrt{g}(\rho\bar{v}^2\bar{v}^i + p\delta^{2i}P^j{}_i), \sqrt{g}(\rho\bar{v}^3\bar{v}^i + p\delta^{3i}P^j{}_i), \sqrt{g}\bar{v}^i P^j{}_i(\rho\varepsilon + p)]$, то дивергентный вид системы уравнений (1) может быть записан следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}'^j}{\partial X^j} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Недивергентный вид системы уравнений (1) в адаптивных координатах получается из записи (1) в физических координатах X'^k и переходом к дифференцированию по адаптивным координатам при помощи матрицы $\hat{P}$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \hat{P}^\beta{}_\alpha \frac{\partial \mathbf{V}^\alpha}{\partial X^\beta} + \mathbf{W} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где $\mathbf{U} = [\sqrt{g'}\rho, \sqrt{g'}\rho\hat{v}^1, \sqrt{g'}\rho\hat{v}^2, \sqrt{g'}\rho\hat{v}^3, \sqrt{g'}\rho\varepsilon]$; $\mathbf{V}^\alpha = [\sqrt{g'}\rho\hat{v}^\alpha/H_\alpha, \sqrt{g'}\hat{R}^{\alpha 1}/H_\alpha, \sqrt{g'}\hat{R}^{\alpha 2}/H_\alpha, \sqrt{g'}\hat{R}^{\alpha 3}/H_\alpha, \sqrt{g'}\hat{v}^\alpha(\rho\varepsilon + p)/H_\alpha]$;
$\hat{R}^{\alpha\beta} = \rho\hat{v}^\alpha\hat{v}^\beta + p\delta^{\alpha\beta}$; $\mathbf{W} = [0, \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{3}\sqrt{g'}\hat{R}^{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^1_{\beta\alpha}/H_\alpha, \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{3}\sqrt{g'}\hat{R}^{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^2_{\beta\alpha}/H_\alpha, \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{3}\sqrt{g'}\hat{R}^{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^3_{\beta\alpha}/H_\alpha, 0]$.

Система (1) дополняется следующими граничными условиями:

1) на границе, являющейся жесткой стенкой, задается условие непротекания: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$, где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности;

2) на входной сверхзвуковой границе ставятся условия: $\rho = \rho_{\text{н}}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{н}}$, $p = p_{\text{н}}$, где $\rho_{\text{н}}$, $\mathbf{v}_{\text{н}}$, $p_{\text{н}}$ — известные параметры набегающего потока;

3) на выходной сверхзвуковой границе граничные условия не задаются, а на дозвуковой задается одно условие, например, для давления: $p = p_g$, где p_g — заданное выходное давление. При моделировании дроссельного эксперимента в СВЗ предполагается, что в начальный момент времени дроссельная заслонка полностью закрыта (граница жесткой стенки). После открытия дроссельной заслонки в канале СВЗ устанавливается режим дросселирования, задаваемый противодавлением (давлением в выходном сечении) p_g;

4) на границе, которая представляет собой плоскость симметрии расчетной области V и задачи (1), ставятся условия: $\partial\rho/\partial n = 0$; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$; $\partial v_{\tau_I}/\partial n = 0$, $I = 1,2$; $\partial p/\partial n$=0, где: $\partial/\partial n = \mathbf{n}\cdot\nabla$; $v_{\tau_I} = \mathbf{v}\cdot\tau_I$, τ_I — касательные векторы ($\tau_I\cdot\mathbf{n} = 0$).

Начальные условия к системе (1) имеют вид: $\rho(0,\mathbf{x}) = \rho_s(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_s(\mathbf{x})$, $p(0,\mathbf{x}) = p_s(\mathbf{x})$, где $\rho_s(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_s(\mathbf{x})$, $p_s(\mathbf{x})$ — известные начальные параметры потока, $\mathbf{x}$ — радиус–вектор точки области V.

Система уравнений (2), (3) приводится к безразмерному виду при помощи характерных значений функций: x_0, X^j_0, X'^k_0, v_0, $t_0 = x_0/v_0$, ρ_0, θ_0, $p_0 = \rho_0 v_0^2$, $e_0 = v_0^2$, $c_{V0} = v_0^2/\theta_0$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена разработке метода ЛАС для областей сложной формы с криволинейными границами типа областей каналов СВЗ. Изложен способ генерации ЛАС для областей сложной формы. Представлен способ модификации конечно–разностной схемы типа Мак–Кормака, численной аппроксимации граничных и начальных условий для адаптивных сеток.

Рассмотрим криволинейный блок V_k, представляющий собой замкнутую область в $\mathbb{R}^3$, ограниченную шестью гладкими поверхностями a, b, c, d, e, f (рис. 1), заданными в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} &x^i = x^i_a(X^1, X^2),\ \ x^i = x^i_b(X^1, X^3),\ \ x^i = x^i_c(X^1, X^2),\\ &x^i = x^i_d(X^1, X^3),\ \ x^i = x^i_e(X^2, X^3),\ \ x^i = x^i_f(X^2, X^3). \end{aligned} \tag{4}$$

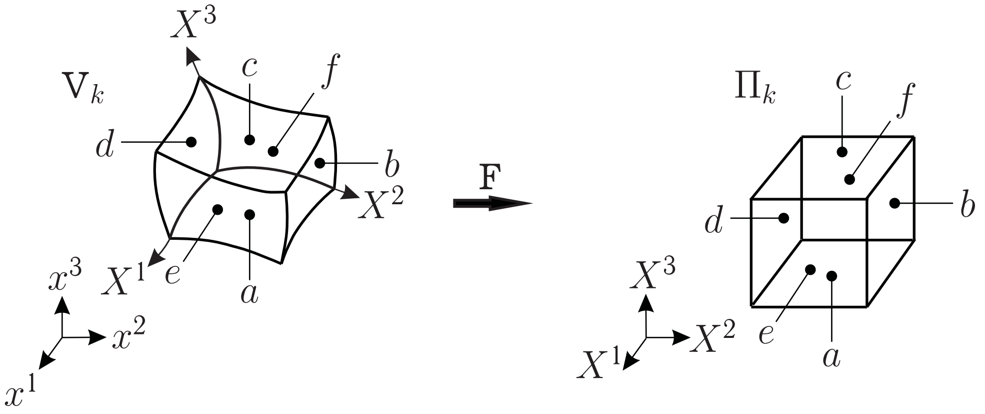


Рис. 1. Преобразование криволинейного блока V_k в параллелепипед Π_k

Для компьютерного построения функций (4) применяется интерполяция бисплайнами. В работе рассматривается построение линейных и кубических бисплайнов. Бисплайн строится по заданным $(N+1)(M+1)$ опорным точкам граничной поверхности криволинейного блока, для которых известны их декартовы x^i_{JK} и адаптивные (параметрические) координаты: X^α_J, X^β_K, X^γ, где $J = 0, 1, \ldots, N$, $K = 0, 1, \ldots, M$, X^α, X^β — адаптивные координаты, изменяющиеся вдоль граничной поверхности, а $X^\gamma = \mathrm{const}$ — фиксированная координата, выделяющая конкретную граничную поверхность в блоке.

Рассмотрим адаптивную систему координат X^j, в которой каждая часть границы рассматриваемой области является координатной поверхностью, и найдем преобразование криволинейного блока V_k в координатах x^i в прямоугольный параллелепипед $\Pi_k = [X^{1,k}_{\min}, X^{1,k}_{\max}] \times [X^{2,k}_{\min}, X^{2,k}_{\max}] \times [X^{3,k}_{\min}, X^{3,k}_{\max}]$ в координатах X^j (рис. 1): $x^i = \mathrm{F}^i(X^j)$. В диссертации получен следующий явный вид этих формул, базирующийся на методе трансфинитной интерполяции:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{F}^i(X^1, X^2, X^3) = \mathrm{P}^i(X^1, X^2, X^3) - [1 - \alpha(X^1)][\mathrm{P}^i(X^{1,k}_{\min}, X^2, X^3) - \\
- x^i_f(X^2, X^3)] - \alpha(X^1)[\mathrm{P}^i(X^{1,k}_{\max}, X^2, X^3) - x^i_e(X^2, X^3)], \\
\mathrm{P}^i(X^1, X^2, X^3) = \mathrm{T}^i(X^1, X^2, X^3) - [1 - \alpha(X^2)][\mathrm{T}^i(X^1, X^{2,k}_{\min}, X^3) - \\
- x^i_d(X^1, X^3)] - \alpha(X^2)[\mathrm{T}^i(X^1, X^{2,k}_{\max}, X^3) - x^i_b(X^1, X^3)], \\
\mathrm{T}^i(X^1, X^2, X^3) = (1 - \alpha(X^3)) x^i_a(X^1, X^2) + \alpha(X^3) x^i_c(X^1, X^2), \\
\alpha(X^j) = (X^j - X^{j,k}_{\min})/(X^{j,k}_{\max} - X^{j,k}_{\min}).
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Положим, что прообраз расчетной области V в координатах X^j представляет собой область Π, составленную из совокупности параллелепипедов Π_k, $k = 1, 2, \ldots, K$. Примером такого типа областей являются области течения газа в СВЗ. Поскольку рассматриваются только ограниченные в $\mathbb{R}^3$ области, то существуют числа $X^j_{\min}$, $X^j_{\max}$, представляющие собой габариты области Π. Для области параллелепипеда $\tilde{\Pi} = [X^1_{\min}, X^1_{\max}] \times [X^2_{\min}, X^2_{\max}] \times [X^3_{\min}, X^3_{\max}]$ регулярная разностная сетка $X^1_p X^2_q X^3_s$, $p = 0, 1, \ldots, n$, $q = 0, 1, \ldots, m$, $s = 0, 1, \ldots, l$ вводится тривиальным образом. Узлы, попавшие в параллелепипед $\tilde{\Pi}$, но не принадлежащие области Π, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Отличительной особенностью алгоритма генерации сетки является то, что для узлов разностной сетки вводится единая сквозная нумерация (сетка при этом описывается ленточным образом): X^j_η, где $\eta = 0, 1, \ldots, (n+1)(m+1)(l+1) - 1$. Такой одноиндексный способ перечисления узлов разностной сетки для области, составленной из параллелепипедов, значительно эффективней чем традиционный трехиндексный. При генерации сетки для каждого узла η, находятся номера узлов (F_η, B_η, R_η, L_η, U_η, D_η), являющихся соседями данного узла по всем координатным направлениям (см. рис. 2).

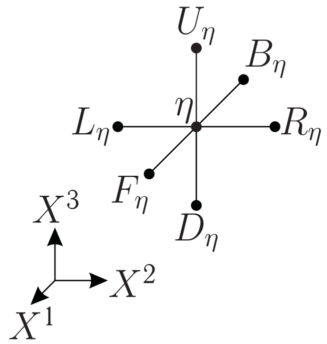


Рис. 2. Узел разностной сетки с шестью соседними узлами

Воспользовавшись преобразованиями (5) для введенной разностной сетки в координатах X^j, можно получить ее образ — адаптивную сетку в координатах x^i, а также вычислить якобиевы матрицы $Q^i{}_j$, $P^j{}_i$. Преобразование (5) относится к типу лагранжевых граничных интерполяций (отсутствуют ограничения на граничные значения производных от функций (4)). Преобразования с ограничениями на производные на границах блоков для многих практически важных случаев геометрических областей оказываются алгоритмически трудно реализуемыми. Поэтому в таких случаях используется недивергентная система (3) с ЛАС, построенной по методу (5).

В качестве разностной схемы для систем уравнений (2) и (3) использовалась разностная схема типа Мак–Кормака, обладающая высокой вычислительной эффективностью и состоящая из четырех шагов. Для системы уравнений (3) с учетом введенных обозначений разностная схема имеет следующий вид:

Шаг 1 (предиктор):

$$\mathbf{U}^{m+1/2}_\eta = \mathbf{U}^m_\eta - \Delta t \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\mathbf{V}^{k,m}_{\eta_{j+}} - \mathbf{V}^{k,m}_\eta}{X^j_{\eta_{j+}} - X^j_\eta} \hat{P}^j{}_{k\,\eta};$$

$$\eta_{j+} = \begin{cases} \mathrm{F}_\eta, & \text{если } j = 1; \\ \mathrm{R}_\eta, & \text{если } j = 2; \\ \mathrm{U}_\eta, & \text{если } j = 3. \end{cases}$$

Шаг 2 (корректор):

$$\tilde{\mathbf{U}}_\eta^{m+1} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}_\eta^{m+1/2} + \mathbf{U}_\eta^m\right] - \frac{\Delta t}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\mathbf{V}_\eta^{k,m+1/2} - \mathbf{V}_{\eta_{j-}}^{k,m+1/2}}{X_\eta^j - X_{\eta_{j-}}^j}\hat{P}^j{}_{k\,\eta};$$

$$\eta_{j-} = \begin{cases} \mathrm{B}_\eta, \text{ если } j = 1; \\ \mathrm{L}_\eta, \text{ если } j = 2; \\ \mathrm{D}_\eta, \text{ если } j = 3. \end{cases}$$

Шаг 3 (учет правой части): $\hat{\mathbf{U}}_\eta^{m+1} = \tilde{\mathbf{U}}_\eta^{m+1} - \Delta t\,\mathbf{W}\left(\tilde{\mathbf{U}}_\eta^{m+1}\right)$.

Шаг 4 (искусственная вязкость): $\mathbf{U}_\eta^{m+1} = \hat{\mathbf{U}}_\eta^{m+1} + \sum\limits_{j=1}^{3}\nu_j\boldsymbol{\Omega}_j\left(\mathbf{U}_\eta^m\right)$, где: $\boldsymbol{\Omega}_j\left(\mathbf{U}_\eta^m\right) = \mathbf{U}_{\eta_{j+}}^m - 2\mathbf{U}_\eta^m + \mathbf{U}_{\eta_{j-}}^m$, ν_j — коэффициенты искусственной вязкости.

Данная разностная схема обеспечивает второй порядок точности аппроксимации. Чтобы сохранить второй порядок точности и при расчёте значений в граничных узлах, вводятся «фиктивные» узлы, принадлежащие границе области $\bar{\mathrm{V}}$, отличающейся от области V дополнительным слоем ячеек сетки, а также целочисленные операторы $\mathsf{A}(\eta)$, $\eta \in \partial\bar{\mathrm{V}} \cup \partial\mathrm{V}$ и $\mathsf{Z}(\eta) = \mathsf{A}^2(\eta)$, $\eta \in \partial\bar{\mathrm{V}}$, где

$$\mathsf{A}(\eta) = \begin{cases} B_\eta,\ \eta \in e; & F_\eta,\ \eta \in f; \\ L_\eta,\ \eta \in b; & R_\eta,\ \eta \in d; \\ D_\eta,\ \eta \in c; & U_\eta,\ \eta \in a. \end{cases}$$

Аппроксимация граничных условий имеет следующий вид:

1) граничные значения для функций на границе непротекания аппроксимируются следующим образом: $\rho_\eta = \rho_{\mathsf{Z}(\eta)}$; $v_{\tau_I\,\eta} = v_{\tau_I\,\mathsf{Z}(\eta)}$, $I = 1,2$; $v_{n\,\eta} = -v_{n\,\mathsf{Z}(\eta)}$; $p_\eta = p_{\mathsf{Z}(\eta)}$;

2) граничные значения для функций на входной сверхзвуковой границе аппроксимируются так: $\rho_\eta = 2\rho_{\text{н}} - \rho_{\mathsf{Z}(\eta)}$; $v_\eta^j = 2v_{\text{н}}^j - v_{\mathsf{Z}(\eta)}^j$; $p_\eta = 2p_{\text{н}} - p_{\mathsf{Z}(\eta)}$;

3) на выходной дозвуковой границе используется следующая аппроксимация: $\rho_\eta = \rho_{\mathsf{Z}(\eta)}$; $v_\eta^j = v_{\mathsf{Z}(\eta)}^j$; $p_\eta = 2p_g - p_{\mathsf{Z}(\eta)}$. А на выходной сверхзвуковой — следующая: $\rho_\eta = \rho_{\mathsf{Z}(\eta)}$; $v_\eta^j = v_{\mathsf{Z}(\eta)}^j$; $p_\eta = p_{\mathsf{Z}(\eta)}$;

4) условия симметрии дают все необходимые соотношения для граничных функций и их разностная аппроксимация имеет вид:

$$n_\eta^1\frac{h_{\mathsf{F}(\mathsf{A}(\eta))} - h_{\mathsf{B}(\mathsf{A}(\eta))}}{X_{\mathsf{F}(\mathsf{A}(\eta))}^1 - X_{\mathsf{B}(\mathsf{A}(\eta))}^1} + n_\eta^2\frac{h_{\mathsf{R}(\mathsf{A}(\eta))} - h_{\mathsf{L}(\mathsf{A}(\eta))}}{X_{\mathsf{R}(\mathsf{A}(\eta))}^2 - X_{\mathsf{L}(\mathsf{A}(\eta))}^2} + n_\eta^3\frac{h_{\mathsf{U}(\mathsf{A}(\eta))} - h_{\mathsf{D}(\mathsf{A}(\eta))}}{X_{\mathsf{U}(\mathsf{A}(\eta))}^3 - X_{\mathsf{D}(\mathsf{A}(\eta))}^3} = 0;$$

$$v_{n\,\eta} = -v_{n\,\mathsf{Z}(\eta)}; \qquad h = \{\rho, v_{\tau_I}, p\};\ I = 1,2.$$

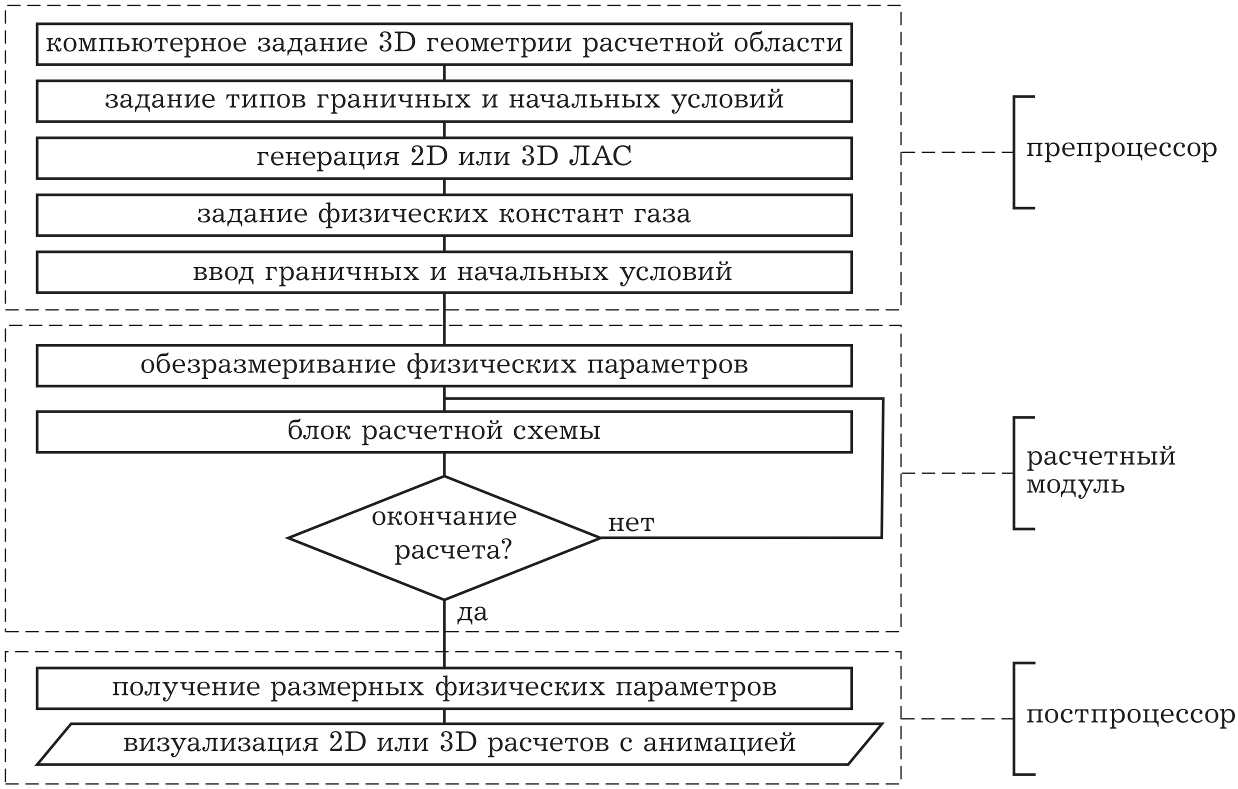


Рис. 3. Блок–схема алгоритма вычислений по методу ЛАС

Третья глава диссертации посвящена описанию работы основных модулей разработанного ПК, реализующего описанные во второй главе методы компьютерной генерации областей и ЛАС. Рассмотрена архитектура ПК, основные использованные алгоритмы. Приводится блок–схема алгоритма вычислений (рис. 3).

ПК позволяет проводить моделирование двумерных плоских, осесимметричных и трехмерных течений газа в декартовых и цилиндрических системах координат. ПК имеет структуру, подобную общим системам обеспечения газодинамических расчетов. Он состоит из модуля трехмерного геометрического моделирования для задания облика конструкций, модуля задания свойств, параметров начальных и граничных условий, генератора адаптивной сетки (препроцессора), расчетного модуля (процессора); имеется поддержка интеграции с программами постпроцессорной обработки данных. Каждый модуль является независимым программным продуктом, реализованным с помощью объектно–ориентированного подхода, и поддерживает возможность создания расширений.

Модуль препроцессора имеет графический интерфейс, позволяющий визуально создавать геометрические образы, выделять границы и области для последующего задания на них граничных и начальных условий, запускать процесс генерации сетки. Графическая среда позволяет создавать заготовку исходной области из блоков (примитивов) и затем модифицировать ее, приближая к форме реальной поверхности расчетной области. Такой способ позволяет избежать этапа разбиения геометрии на криволинейные блоки, поскольку полученные «деформированные» примитивы уже будут представлять собой криволинейные блоки.

С каждым примитивом связан определенный набор характеристик: тип начального условия в области, типы граничных условий, габариты примитива в адаптивных и физических координатах. На основании данных характеристик генератор сетки проводит распределение сеточных линий и заполняет соответствующие параметры в узлах ЛАС.

Расчетный модуль позволяет проводить расчет систем (2) и (3) методом Мак–Кормака на сгенерированной ЛАС. Модуль поддерживает возможность ведения расчета до определенного момента времени, сохранения результатов расчёта через заданные интервалы времени и возобновления расчета с сохраненного состояния. Вывод результатов может производиться целиком для всей расчетной области, а также в отдельных сечениях и точках.

В **четвертой главе** представлены постановки и решения тестовых задач, приведены результаты численного моделирования течений в СВЗ и их описание.

Для апробации разработанного программного комплекса и оценки качества численного метода были проведены расчеты задач распада разрыва, двумерных тестовых задач течения газа в канале со ступенькой и распространения ударной волны в канале клинообразной формы. Сравнение полученных процессов распространения разрывов и волн с аналитическими решениями (рис. 4), а также с решениями, полученными другими численными методами, показало достаточно высокую точность расчётов пространственных распределений и скоростей распространения разрывов, а также взаимодействий набегающих и отражённых ударных волн с твердой поверхностью.

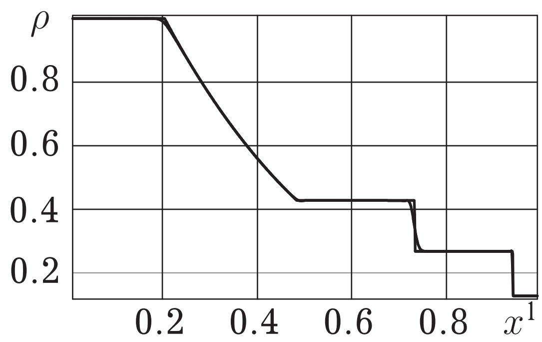
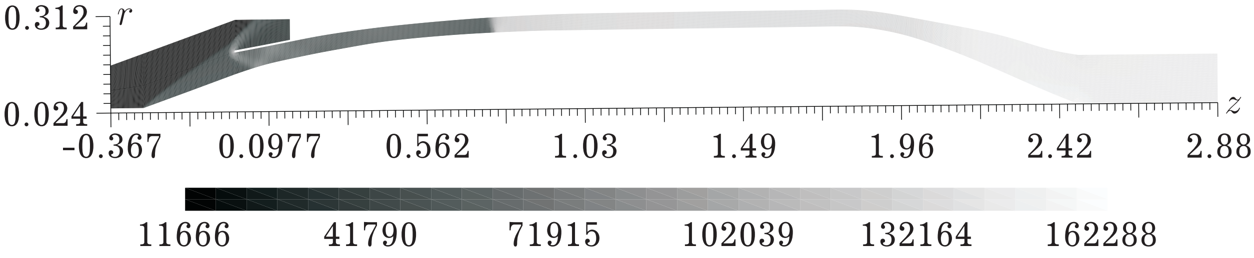
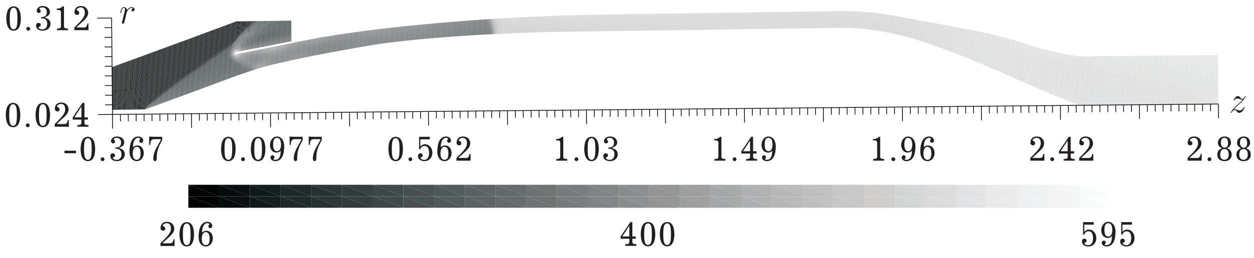


Рис. 4. Распределения плотности для задачи об ударной трубе ($t = 0.25$)

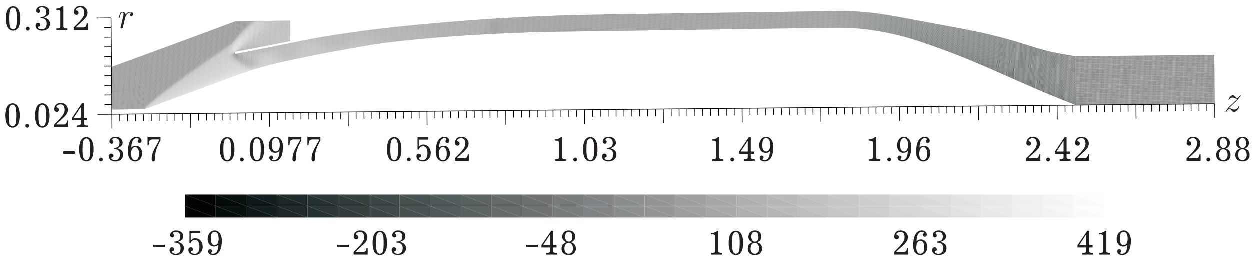
При численном моделировании газодинамических процессов в канале СВЗ ставились задачи построения дроссельной характеристики СВЗ на заданном режиме, исследования торможения потока в системе скачков во входной части канала и оценка влияния геометрии пилонов СВЗ на характер течения. Задачи рассматривались в цилиндрической системе координат: $X'^1 = r$, $X'^2 = \varphi$, $X'^3 = z$.



а) давление p [Па]



б) температура, θ [K]



в) радиальная скорость v_r [м/с]

Рис. 5. Распределения параметров в режиме $p_g/p_{\text{н}} = 12$ ($t = 73.07$ мс)

Дроссельный эксперимент заключался в проведении серии расчетов осесимметричных течений в двумерной (осесимметричной) области V, представляющей собой одно из угловых сечений канала СВЗ, для последовательно увеличивающихся значений противодавления: $p_g/p_{\text{н}} = 9$, 10, 11, 12, 13 и 14 вплоть до выхода на режим, когда прямой скачок выходил из входного сечения канала. Также был рассмотрен режим свободного выхода потока из канала, когда выходное давление p_g не фиксировалось.

Расчеты были выполнены для следующих параметров набегающего потока газа: $\rho_{\text{н}} = 0.195$ кг/м^3, $v_{r\text{н}} = 0$ м/с, $v_{z\text{н}} = 767$ м/с, $p_{\text{н}} = 12112$ Па. Начальные условия в области V имели вид: $\rho_0 = 0.195$ кг/м^3, $v_{r0} = 0$ м/с, $v_{z0} = 0$ м/с, $p_0 = 12112$ Па. Форма границы входа потока выбиралась после предварительных расчетов из условия того, что в область V попадает отошедшая ударная волна. Сетка содержала 51 727 узлов.

Процессы установления параметров и стабилизации положения замыкающего прямого скачка носили колебательный характер, затухание которых происходило тем медленнее, чем больше было заданное противодавление p_g в выходном сечении СВЗ. В режиме свободного выхода потока установление наступало через 26.7 мс, прямой скачок в канале не формировался и поток в выходном сечении оставался сверхзвуковым. В режимах с дросселированием $p_g/p_н = 9{,}10$ прямой скачок устанавливался в области диффузора канала, время установления составляло 33–35 мс; при $p_g/p_н = 11{,}12$ установление прямого скачка происходило в области горла канала (рис. 5) через 70–75 мс. В режиме $p_g/p_н = 13$ прямой скачок устанавливался в начальной части горла канала за время 92.4 мс. Таким образом, времена установления газодинамических параметров в канале для расчетных режимов могут возрастать в несколько раз по сравнению с временами установления режимов с малым дросселированием, а также при отсутствии дросселирования.

При дальнейшем повышении противодавления в выходном сечении канала на режиме $p_g/p_н = 14$ прямой скачок выходил из канала в область внешнего обтекания. Далее течение носило колебательный характер с возрастающей амплитудой колебаний. Выхода на установившийся режим не происходило, наблюдался эффект помпажа.

На дроссельной характеристике (рис. 6) представлено распределение коэффициента восстановления полного давления $\sigma = p_{og}/p_{oн}$ в зависимости от значений коэффициента расхода $f = F_н/F_e$, где $F_н$, F_e — площади поперечного сечения струи на бесконечности перед СВЗ и во входном сечении канала СВЗ соответственно. Сопоставление результатов численного моделирования и экспериментальных данных позволяет говорить о достаточно хорошей точности численного моделирования: относительная погрешность составила не более 2% при сравнении данных по значению коэффициента расхода f.

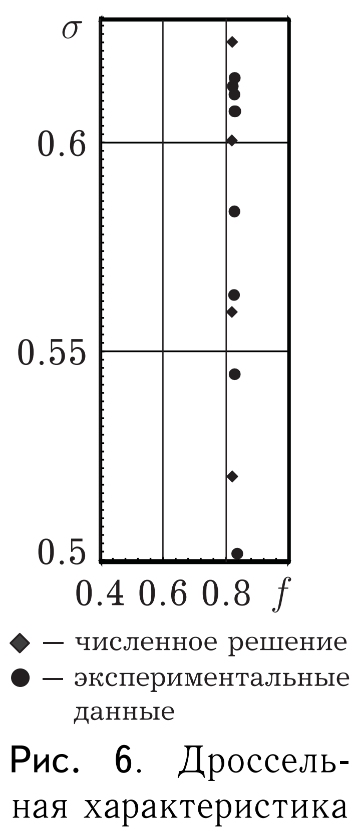


Рис. 6. Дроссельная характеристика

С целью выяснения детальной картины течения на входе в канал СВЗ было проведено моделирование течения газа в областях внешнего обтекания и входа в канал.

На рис. 7 приведены линии равных плотностей, соответствующие установившемуся режиму течения ($t = 6.98$ мс) без дросселирования, они получены на сетке с 41 258 узлами. Полученные результаты показали, что после перехода на более мелкую сетку для области входа в канал происходит существенное уменьшение зоны размазывания скачков и «выявление» новых скачков внутри канала.

В реальных конструкциях СВЗ, из-за наличия пилонов в канале происходит формирование трехмерного неосесимметричного течения.

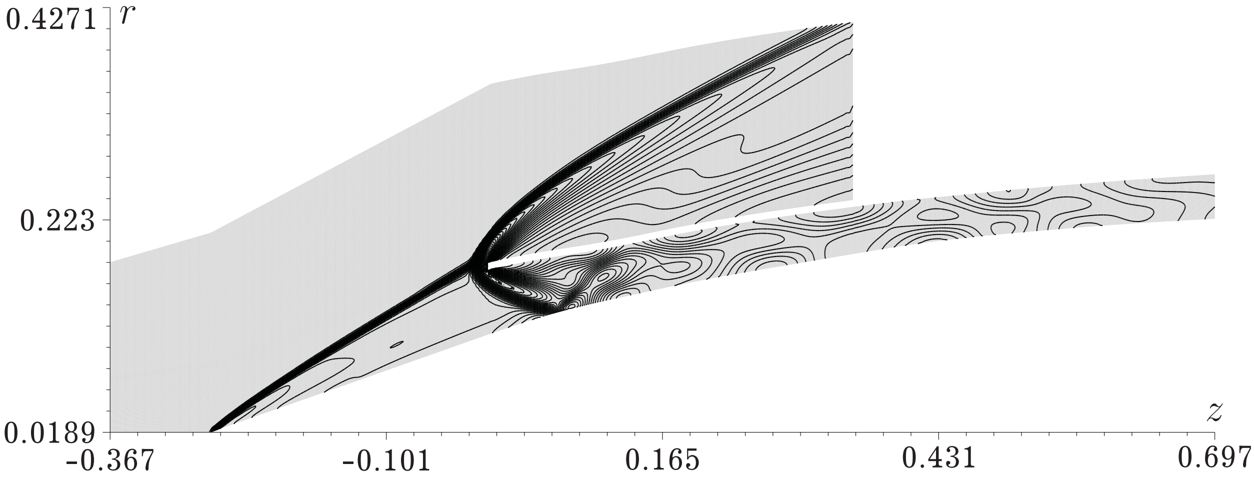
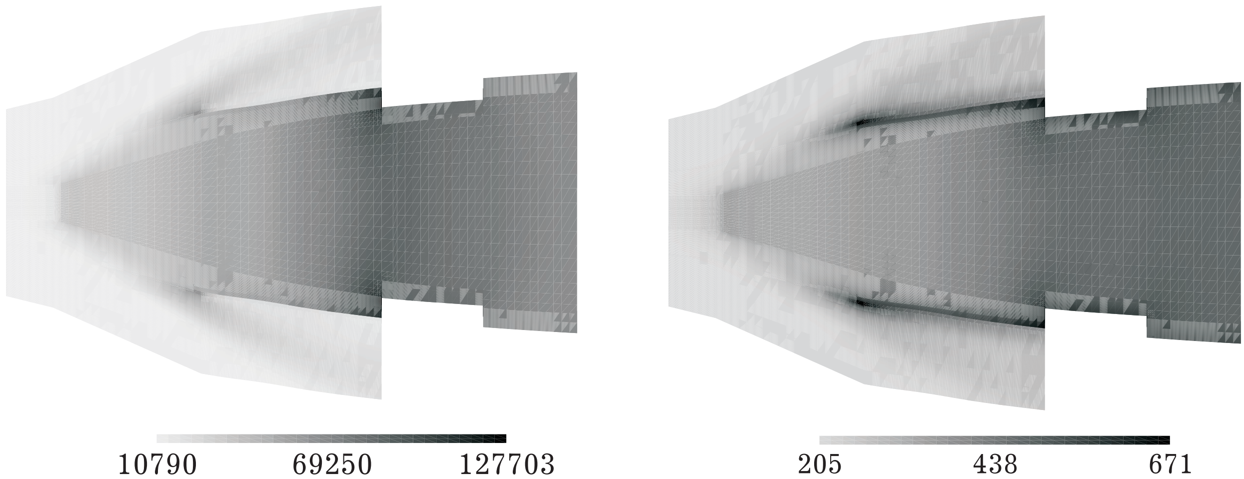


Рис. 7. Изолинии плотности ρ в области входа в канал



а) давление p [Па] б) температура, θ [K]

Рис. 8. Результаты моделирования трехмерного течения ($t = 5.1$ мс)

Для моделирования трехмерных эффектов, как и при исследовании течения во входной части канала, использовалась область усеченной геометрии канала (см. рис. 7).

Предполагалось, что центральное тело СВЗ закреплено с помощью трех пилонов, отстоящих равномерно друг от друга. При численном моделировании рассматривался участок симметрии, образованный лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = 120°$. Сетка содержала 154 327 узлов.

В результате моделирования получено, что при обтекании пилонов образовывались локальные участки повышенных значений плотности и давления (рис. 8,а) во всей области сужения канала; пилоны затормаживали осевое течение, образовывалось небольшое угловое течение. В непосредственной близости у границ пилонов резко возрастала температура (рис. 8,б).

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построена математическая модель комбинированных нестационарных газодинамических процессов в областях сложной формы с криволинейными границами.

2. Разработан метод ЛАС для решения многомерных нестационарных задач динамики идеального газа в областях сложной формы типа каналов сверхзвуковых воздухозаборников.

3. Разработан программный комплекс, реализующий предложенный метод ЛАС, для решения задач газовой динамики в областях сложной криволинейной формы.

4. Проведены тестовые исследования разработанного метода и программного комплекса при решении задач о распаде разрыва, обтекании ступеньки и клина, показавшие хорошее совпадение с известными аналитическими и численными решениями.

5. Проведено двумерное и трехмерное численное моделирование течения газа в сверхзвуковом воздухозаборнике, которое показало, что разработанный метод ЛАС и программный комплекс позволяют получать распределения параметров течения газа в сверхзвуковых воздухозаборниках и определять их дроссельные характеристики. Сравнение с экспериментальными данными показало достаточно хорошую точность расчетных данных на дроссельной характеристике.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. **Численное моделирование трехмерных газодинамических процессов в камерах сгорания РДДТ на основе метода геометрически–адаптивных сеток / Ю.И. Димитриенко, С.Г. Изотова, С.Н. Ануфриев, А.А. Захаров // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2005. №3. С. 45—58.**
2. **Димитриенко Ю.И., Захаров А.А. Разработка метода ленточных адаптивных сеток для решения трехмерных задач течения газов в воздухозаборниках // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. №3. С. 44—56.**
3. **Димитриенко Ю.И., Захаров А.А. Автоматизированная система для моделирования газовых потоков методом ленточных адаптивных сеток // Информационные технологии. 2009. №6. С. 12—16.**

4. Ануфриев С.Н., Дзагания А.Ю., Захаров А.А. Применение технологий Microsoft для численного моделирования многомерных нестационарных газодинамических процессов // Технологии Microsoft в теории и практике программирования: Труды Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. М., 2006. С. 50—52.
5. Метод ленточно-адаптивных сеток для моделирования многомерных нестационарных газодинамических процессов в двигательных системах ракетной техники / Ю.И. Димитриенко, С.Н. Ануфриев, А.А. Захаров, Л.Л. Кукленков // Ракетно-космическая техника. Фундаметальные и прикладные проблемы механики: Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева. М., 2006. С. 75.
6. Моделирование многомерных нестационарных газодинамических процессов методом ленточно-адаптивных сеток / А.А. Захаров, С.Н. Ануфриев, А.И. Левина, А.Ю. Дзагания // Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2007». М., 2007. С. 30.
7. Захаров А.А. Математическое моделирование многомерных газодинамических процессов в канале воздухозаборника СПВРД методом ленточно-адаптивных сеток // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов 2-ой научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. М., 2008. С. 91—95.
8. Захаров А.А. Разработка метода ленточных адаптивных сеток для численного моделирования газовых потоков в сверхзвуковых воздухозаборниках // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов 3-ей научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. М., 2009. С. 18—21.
9. Димитриенко Ю.И., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток в газовой динамике. М.: Изд-во НТЦ Университетский, 2008. 175 с.