На правах рукописи

Горбунов Артур Валерьевич

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Государственном учреждении
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Крищенко А. П.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, в.н.с. Шамолин М. В. кандидат физико-математических наук, с.н.с. Матросов И. В.
Ведущая организация:	Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2009 года в ____ часов ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан «____» ____________ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.т.н., доцент Аттетков А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Устойчивость к возмущениям и противодействие их накоплению являются необходимым условием для стабильного функционирования большинства технических систем. Поэтому в теории управления особую важность получила задача асимптотической стабилизации. Обычно задача асимптотической стабилизации имеет много решений, с чем связана необходимость выбора того из них, которое обеспечивает замкнутой системе лучшие характеристики. Одной из важнейших количественных характеристик асимптотически устойчивого движения является область притяжения. В связи с этим актуальна задача построения области притяжения (А. М. Лётов[1]).

Для аппроксимации области притяжения может использоваться множество, ограниченное некоторой поверхностью уровня функции Ляпунова (Н. Н. Красовский; В. И. Зубов; J. La-Salle; В. Г. Веретенников, В. В. Зайцев и др.). Качество такой оценки зависит от того, насколько удачно выбрана функция Ляпунова и определено значение константы уровня, т. е. возникают две до конца не решённые задачи: поиска подходящей функции Ляпунова и вычисления значения константы уровня. Существует гипотеза (J. J. Rodden; S. G. Margolis, W. G. Vogt и др.), что критическое значение константы уровня является одним из решений некоторой задачи на локальный экстремум с ограничениями. Однако способ выбора такого решения не формализован. Поэтому требуется метод однозначного вычисления критического значения константы уровня.

Многие задачи управления и устойчивости систем с ограниченными ресурсами могут быть переформулированы (А. М. Формальский; P.-O. Gutman, P. Hagander; В. А. Каменецкий) как задачи построения области притяжения для системы с фазовыми ограничениями. Часто для аппроксимации такой области используется аппарат функций Ляпунова (P. M. Julich; В. А. Каменецкий), но остаётся открытым вопрос о полноте такого приближения. Поэтому представляют интерес методы построения области притяжения для системы с фазовыми ограничениями, не использующие функцию Ляпунова.

[1] Лётов А.М. Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления // Дифференциальные уравнения. — 1970. — Т. VI, № 4. — С. 592 – 615.

Важным как с практической, так и с теоретической точки зрения является класс систем, содержащих запаздывание. Также как для не содержащих запаздывание динамических систем, для анализа устойчивости систем с запаздыванием может использоваться прямой метод Ляпунова (Н. Н. Красовский; Б. С. Разумихин и др.), а при аппроксимации области притяжения возникают задачи поиска подходящих функционалов и вычисления значения константы уровня. Основанные на таком подходе методы (В. Д. Горяченко; А. П. Блинов и др.) обычно не предполагают реализации на ЭВМ и приводят к трудностям при использовании для автоматизированного построения области притяжения. Поэтому для систем с запаздыванием представляют интерес методы построения области притяжения, пригодные для автоматизированных приложений.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является развитие классических и разработка новых методов построения областей притяжения для нелинейных динамических систем, в том числе содержащих запаздывание и фазовые ограничения, и апробация этих методов для конкретных технических систем.

Методы исследования. В работе применяются методы теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, топологии, математического программирования, теории многозначных отображений и дифференциальных включений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата и подтверждается при сопоставлении с результатами, полученными другими методами и различными вычислительными экспериментами.

Научная новизна. Предложен метод для вычисления критического значения константы уровня при аппроксимации области притяжения с помощью аппарата функций Ляпунова.

Для системы с фазовыми ограничениями предложена система, не содержащая ограничений, область притяжения которой при достаточно общих предположениях совпадает с областью притяжения исходной системы с фазовыми ограничениями.

Предложен метод для построения области притяжения системы с фазовыми ограничениями, использующий теоретико-множественные операции и операцию выделения линейно связной компоненты множества, в терминах границы допустимой области, области притяжения системы без ограничений на состояние и некоторого отрицательно инвариантного многообразия. Получено выражение для области притяжения линейной системы, замкнутой ограниченным по величине линейным управлением.

Для нелинейных систем с запаздыванием разработан метод аппроксимации области притяжения положительно инвариантным множеством, целиком содержащимся в области притяжения.

Получено достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова - Разумихина для системы с запаздыванием.

Решена задача робастной асимптотической стабилизации с помощью малого управляющего воздействия для положения равновесия двухзвенника с упругим шарниром между звеньями, представляющего механическую систему, не являющуюся полностью робастно управляемой в смысле Е. С. Пятницкого[2]. Построена область притяжения для замкнутой системы.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются развитием математической теории устойчивости движения и могут использоваться при создании автоматизированных систем анализа устойчивости.

Работа является составной частью фундаментальных научных исследований, выполняемых в рамках научных проектов РФФИ (гранты №02-01-00704, №04-01-00391, №05-01-00840, №07-01-00223, №08-01-00203). Полученные результаты использованы при выполнении грантов Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (гранты 00-15-96137, НШ-2094.2003.1, НШ-1676.2008.1), научных программ «Университеты России – фундаментальные исследования» (проекты УР.03.01.018, УР.03.01.141), «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП 2.1.1.2381) и фундаментальных исследований Президиума РАН РФ (проект 19-1.5).

На защиту выносятся следующие положения:

1. Метод вычисления критической константы уровня при аппроксимации области притяжения с использованием аппарата функций Ляпунова.
2. Методы точного построения области притяжения системы с фазовыми ограничениями и множества линейной стабилизации линейной системы, замкнутой ограниченным по величине линейным управлением.

[2]Пятницкий Е.С. Критерии полной робастной управляемости механических систем с ограниченными управлениями // Доклады РАН. — 1997. — Т. 352, № 5. — С. 620 – 623.

3. Метод аппроксимации области притяжения системы с запаздыванием положительно инвариантным множеством, целиком содержащимся в области притяжения.
4. Решение задачи нелокальной робастной асимптотической стабилизации малым управляющим воздействием положения равновесия механической системы, не являющейся полностью робастно управляемой в смысле Е. С. Пятницкого.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на VII Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2002); II Международном конгрессе «Нелинейный динамический анализ (NDA'2)» (Москва, 2002); VIII международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2004); II Московской конференции «Декомпозиционные методы в математическом моделировании» (Москва, 2005); Тихоновских Чтениях (Москва, 2005); V Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (Москва, 2006); IX Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2006); III Международной конференции по проблемам управления (Москва, 2006); X Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2008); семинаре «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление» (Москва, 2008).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 4 научных статьях [3,6,7,13], в том числе в 3 статьях Перечня ведущих научных журналов и изданий ВАК, и 9 тезисах докладов [1,2,4,5,8–12].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 147 страницах, содержит 18 иллюстраций. Библиография включает 115 наименований.

Автор выражает глубокую признательность к.ф.-м.н., с.н.с. В. А. Каменецкому за полезные обсуждения и консультации, которые во многом определили направление настоящей работы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В **первой главе** рассматривается ряд задач, к которым приводит использование метода функций Ляпунова для аппроксимации области притяжения нулевого решения системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где функция $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет локальному условию Липшица в открытой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f(0) = 0$.

В разделах 1.1 и 1.2 вводятся основные понятия, используемые в первой главе, и формулируются предложения, применяемые в работе для аппроксимации области притяжения инвариантными множествами, вложенными в область притяжения.

В подразделе 1.2.1 предлагается пример, показывающий, что существуют функции Ляпунова, для которых использование теоремы Ла-Салля при аппроксимации области притяжения приводит к получению лишь пустой оценки. Поэтому доказывается следующее предложение, обеспечивающее для любой функции Ляпунова существование непустой оценки области притяжения.

Теорема 1. Пусть $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ — определённо положительная функция, $r > 0$ — такое, что $S_v(r) = \operatorname{arw}_0\{x \mid v(x) < r\}$ — ограниченное множество, $S_v(r) \subseteq D$ и $\dot{v}(x) < 0$ для всех $x \in S_v(r)\backslash\{0\}$. Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, а множество $S_v(r)$ положительно инвариантно и вложено в область притяжения нулевого решения системы (1).

В теореме 1 и ниже по тексту символом $\operatorname{arw}_0 S$ обозначена та линейно связная компонента множества S, которая содержит точку 0.

В подразделе 1.2.2 даётся постановка задачи вычисления критического значения константы уровня, т. е. такой постоянной R, что для всех $r \in (0, R]$ выполнены условия теоремы 1, а для любого $r > R$ условия теоремы 1 нарушены. Предлагается пример, показывающий отсутствие решения задачи в такой постановке. С учётом этого, предлагается заменить требование ограниченности $S_v(r)$ в теореме 1 на условие $S_v(r) \subset H$, где H — некоторый компакт. Поскольку в рассматриваемой задаче существенны лишь определённые свойства функции $\dot{v}$, то далее вместо функции $\dot{v}(x) \ : \ D \to \mathbb{R}$ рассматривается её обобщение — функция $N_{v,f}(x) \ : \ D \to \mathbb{R}$ такая, что выполнены предположения: A1) $v \in C^1(D, \mathbb{R})$; A2) v определённо положительная; A3) первые частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ функции v удовлетворяют в области D локальному условию Липшица; A4) $N_{v,f} \in C(D, \mathbb{R})$; A5) функция $N_{v,f}$ определённо отрицательная; A6) существует компакт $\tilde{H}$ такой, что $H \subset \operatorname{int} \tilde{H} \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$; A7) $0 \in \operatorname{int} H$; A8) для любого $x \in H$ из равенства $\operatorname{grad} v(x) = 0$ следует, что $x = 0$; A9) H — линейно связное множество.

По функциям v и $N_{v,f}$ определяются следующие множества: $B = (\{x \mid N_{v,f}(x) = 0\} \cap H) \backslash \{0\}$; G — множество таких $y_0 \in \mathbb{R}^n$, что решение $y(t) \ : \ \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^n$ системы $\dot{y}(t) = -\operatorname{grad} v(y(t))$ с начальным условием $y(0) = y_0$, единственно, неограниченно продолжимо и существует $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$; $S_v^*(r) = \{x \mid v(x) < r\} \cap G$.

В подразделе 1.2.3 с учётом предположений A1)–A9) доказывается, что $(B \cup \partial H) \cap G \neq \varnothing$ и существует наименьшее значение

$$R = \min_{x \in (B \cup \partial H) \cap G} v(x). \tag{2}$$

Теорема 2. Пусть R определяется по (2). Тогда:

1) $S_v(R) = S_v^*(R)$;

2) $S_v(R) \subseteq (\{x \mid N_{v,f}(x) < 0\} \cup \{0\}) \cap H$;

3) для любого $\tilde{R} > R$ имеет место по меньшей мере одно из неравенств $S_v(\tilde{R}) \backslash (\{x \mid N_{v,f}(x) < 0\} \cup \{0\}) \neq \varnothing$ или $S_v(\tilde{R}) \backslash H \neq \varnothing$.

Вследствие теоремы 2 постоянная R из (2) — искомое критическое значение константы уровня.

В подразделе 1.2.4 рассматривается задача вычисления критического значения константы уровня для частного случая функции Ляпунова $v(x) \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей предположениям A1) – A3) и A10) $\operatorname{grad} v(x) \neq 0$ при $x \neq 0$; A11) $\lim\limits_{x \to \infty} v(x) = +\infty$.

Доказывается, что наименьшее значение

$$R^* = \min_{x \in \beta} v(x), \quad \beta = \{x \mid N_{v,f}(x) = 0\} \backslash \{0\} \tag{3}$$

существует при условии $\beta \neq \varnothing$.

Теорема 3. Пусть $\beta \neq \varnothing$, R^* определяется по (3). Тогда:
1) множество $S_v(R^*)$ — ограниченное;
2) $S_v(R^*) \subseteq \{x \mid N_{v,f}(x) < 0\} \cup \{0\}$;
3) для любого $\tilde{R}^* > R^*$ выполнено неравенство

$$S_v(\tilde{R}^*) \backslash (\{x \mid N_{v,f}(x) < 0\} \cup \{0\}) \neq \varnothing.$$

По теореме 3 постоянная R^* из (3) — искомое критическое значение константы уровня.

Разделы 1.3 и 1.4 содержат обзор. В разделе 1.3 изложены методы построения функций Ляпунова для аппроксимации области притяжения, принадлежащие В. И. Зубову, R. Genesio и A. Vicino, H. Chiang и J. S. Thorp, В. А. Каменецкому и др. В разделе 1.4 описан метод приближённого построения сечений границы области притяжения для системы третьего порядка, предложенный А. Тондлом.

В разделе 1.5 на примере конкретной нелинейной системы, описывающей боковое движение самолёта, выполнено сравнение методов аппроксимации области притяжения, принадлежащих В. И. Зубову, H. Chiang и J. S. Thorp, В. А. Каменецкому и А. Тондлу.

Во **второй главе** предложены не связанные с использованием функций Ляпунова методы построения области притяжения для системы с фазовыми ограничениями.

В разделе 2.1 вводятся основные определения и обозначения, используемые во второй главе.

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где функция $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет локальному условию Липшица в $\mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$, $x = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (4). В (4) допустимое множество D задаётся фазовыми ограничениями

$$g(x) > 0, \tag{5}$$

где $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $g(0) > 0$. Для области притяжения нулевого решения системы (4) с фазовыми ограничениями (5) используется обозначение Ω_g.

В разделе 2.2 доказано следующее утверждение, определяющее метод редукции ограничений (5).

Теорема 4. Пусть функция g удовлетворяет в $\mathbb{R}^n$ локальному условию Липшица. Тогда $\tilde{x} = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия системы

$$\dot{\tilde{x}} = g(\tilde{x}) f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

и $\Omega_g = \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ — область притяжения положения равновесия $\tilde{x} = 0$ системы (6).

В разделе 2.3 предложен метод для построения области притяжения системы с фазовыми ограничениями, использующий теоретико-множественные операции и операцию выделения линейно связной компоненты множества.

Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Вводятся множества

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = \dot{g}(x) = 0\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ X(-t, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \Theta, t \geqslant 0 \right\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ x \mid g(x) = 0 \right\}, \tag{9}$$

где $X(t, \tilde{x})$ — решение (4) с начальным условием $X(0, \tilde{x}) = \tilde{x}$. Доказаны следующие утверждения, позволяющие строить область Ω_g при известной области притяжения Ω системы (4) (без ограничений на состояние) или оценивать Ω_g при известном положительно инвариантном множестве $S \subseteq \Omega$.

Теорема 5. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда $\Omega_g = \mathrm{arw}_0(\Omega \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}))$.

Теорема 6. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, множество S положительно инвариантное и $S \subseteq \Omega$. Тогда множество $S_g = \mathrm{arw}_0(S \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}))$ положительно инвариантное и $S_g \subseteq \Omega_g$.

В разделе 2.4 с помощью теоремы 5 решаются задачи точного построения областей притяжения системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (ax_1 + bx_2)(1 + x_1), \ \ a < 0, \, b < -a \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \end{cases} \tag{10}$$

при различных фазовых ограничениях, в частности, когда состояние $x = (x_1 \, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ должно находится в множестве, заданном одним из неравенств $g_1(x) = x_1^* - x_1 > 0$ или $g_2(x) = x_2^* - x_2 > 0$.

Уравнения (10) описывают поведение ядерного реактора[3], а неравенства $g_i(x) > 0$, $i = 1, 2$ имеют смысл ограничений на мгновенную мощность ($i = 1$) и температуру ($i = 2$) активной зоны.

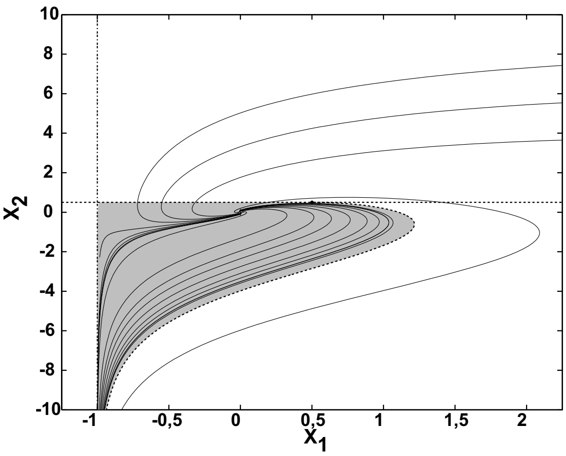

Рис. 1

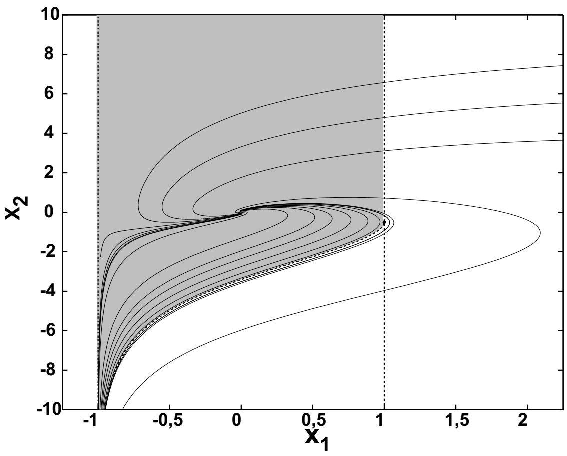

Рис. 2

Искомые области Ω_{g_i} выделены на рис. 1 ($i = 1$) и рис. 2 ($i = 2$) для $a = -0{,}2$, $b = -0{,}4$, $x_1^* = 1$ и $x_2^* = 0{,}2$, $\Omega_{g_i} = \mathrm{arw}_0(\Omega \backslash (\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i))$, где $\Omega = \{x \mid x_1 > -1\}$, $\mathcal{B}_i = \{x \mid x_i = x_i^*\}$, множества $\mathcal{A}_i$ найдены по (8) численным методом, $\Theta_1 = \left\{ \left(x_1^*, -\frac{a x_1^*}{b} \right) \right\}$, $\Theta_2 = \{(x_2^*, x_2^*)\}$.

В разделе 2.5 с помощью теоремы 6 решается задача[4] аппроксимации области устойчивости для интегратора, замкнутого динамической обратной связью

$$\dot{\xi}(t) = u(t), \quad \dot{u}(t) = -\operatorname{sat}(\alpha \xi(t) + \beta \operatorname{sat}(u(t))), \tag{11}$$

где $\alpha = 0{,}0045$, $\beta = 1{,}0045$, а величина u ограничена $|u| < 1$.

Записывая ограничения в виде $g(\xi, u) = 1 - u^2 > 0$, имеем $\Omega_g \supseteq S_g = \mathrm{arw}_0(S \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}))$, где $S = \left\{ (\xi, u) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{u^2}{2} + \alpha \frac{\xi^2}{2} < \frac{1}{2\alpha} \right\}$ — инвариантное множество, вложенное в область притяжения системы (11), $\Theta = \{(\pm\frac{\beta}{\alpha}, \mp 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(\xi, u) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 = 1\}$, $\mathcal{A}$ вычислено приближённо по (8). При $\alpha = 0{,}0045$, $\beta = 1{,}0045$ непосредственной проверкой обнаружено, что $\Theta \cap S = \varnothing$, следовательно,

[3]Горяченко В.Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1971. — 264 с.

[4]Shewchun J.M., Feron E. High perfomance bounded control // Proceedings of the American Control Conf. — Albuquerque (USA), 1997. — P. 3250–3254.

$S_g = S \cap \left\{ (\xi, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - u^2 > 0 \right\}$. Найденная оценка S_g, выделенная на рис. 3, незначительно отличается от точной области устойчивости, выделенной на рис. 4, и существенно превосходит оценку, полученную J. M. Shewchun и E. Feron[4] (малый эллипс на рис. 3).

В разделе 2.6 рассматривается задача построения области притяжения линейной системы, замкнутой стабилизирующей линейной обратной связью

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad u(t) = c^T x(t) \tag{12}$$

с ограниченным управлением $|u| \leqslant u_{max}$, $u_{max} > 0$, т. е. множества $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall t \geqslant 0 : \left| c^T e^{(A+bc^T)t} x \right| \leqslant u_{max} \right\}$, где $A + bc^T$ — гурвицевая матрица. Задача построения множества L может рассматриваться как задача построения области притяжения с фазовыми ограничениями, которые, в отличие от (5), заданы нестрогим неравенством.

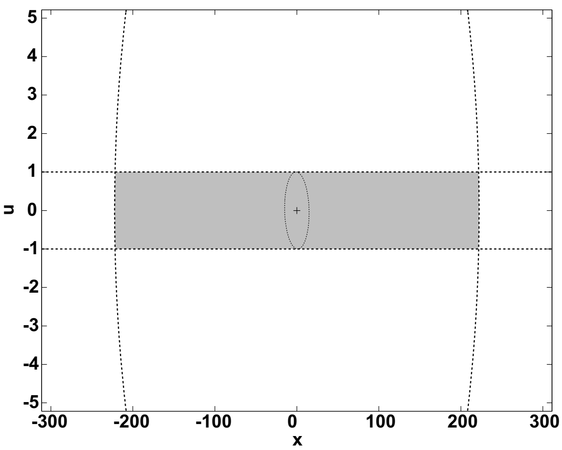

Рис. 3

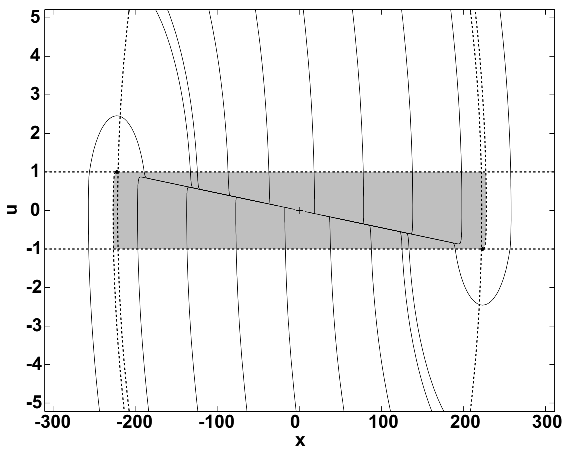

Рис. 4

Теорема 7. Пусть Ω_g — область притяжения системы (12) с фазовыми ограничениями $g(x) = u_{max}^2 - (c^T x)^2 > 0$. Тогда $L = \Omega_g \cup \partial\Omega_g$.

Рассматривается пример[5], для которого область притяжения, построенная с помощью теорем 5 и 7, совпала с областью, построенной А. М. Формальским[5] другим методом.

В **третьей главе** рассматривается задача аппроксимации области притяжения для системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h)), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

[5] Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974. — 368 с.

где $f : D \times D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, $f(0,0) = 0$, $h > 0$. Предлагается метод аппроксимации области притяжения, использующий функцию, удовлетворяющую требованиям теоремы Б. С. Разумихина об асимптотической устойчивости (функцию Ляпунова - Разумихина), и условия существования квадратичной функции Ляпунова - Разумихина.

В разделе 3.1 приводятся основные определения, используемые в третьей главе.

В разделе 3.2 предлагаются условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (13). Для этого вводится вспомогательная функция $N_{v,f}(x) \; : \; D \to \mathbb{R}$, заданная выражением

$$N_{v,f}(x) = \max_{y \in \bar{Y}(v(x))} \langle \operatorname{grad} v(x), f(x,y) \rangle_n \,, \tag{14}$$

где $\bar{Y}(r) = \mathrm{cs}_0\{y \in D \mid v(y) \leqslant r\}$. Здесь символом $\mathrm{cs}_0\, S$ обозначена связная компонента множества S, содержащая точку 0, символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

При условии определённой положительности v доказывается, что функция $N_{v,f}$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Получены следующие условия асимптотической устойчивости «в большом» нулевого решения системы (13), использующие функцию $N_{v,f}$.

Теорема 8. Пусть $v \in C^1(D, \mathbb{R})$ — определённо положительная функция, $r > 0$ — такая постоянная, что множество $S_v(r) = \mathrm{arw}_0\{x \in D \mid v(x) < r\}$ — ограниченное, $S_v(r) \subseteq D$ и $N_{v,f}(x) < 0$ для всех $x \in S_v(r)\backslash\{0\}$. Тогда нулевое решение системы (13) асимптотически устойчиво, множество $Z_v(r) = C([-h,0], S_v(r))$ положительно инвариантно и вложено в область притяжения нулевого решения системы (13).

В разделе 3.3 предложены достаточные условия существования квадратичной функции Ляпунова - Разумихина.

Пусть функция $f(x,y) \; : \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ из (13) непрерывно дифференцируемая в точке $x = y = 0$, $A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$, $B = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$. Условия существования квадратичной функции Ляпунова для системы с запаздыванием (13) определяет следующая теорема.

Теорема 9. Пусть существуют скаляр $\tau > 0$ и матрица $L = L^{\mathrm{T}} > 0$ такие, что выполнено матричное неравенство

$$\tau^2 L + \tau(LA^{\mathrm{T}} + AL) + BLB^{\mathrm{T}} < 0. \tag{15}$$

Тогда функция $v(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ при $P = L^{-1}$ удовлетворяет условиям теоремы 8 при некотором $r > 0$.

Далее предлагается метод решения (15), использующий линейность неравенства по переменной L и следующую оценку для τ.

Теорема 10. Пусть для матрицы $L = L^{\mathrm{T}} > 0$ и числа $\tau > 0$ выполнено неравенство (15). Тогда $\tau < -2 \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_i(A)$, где $\operatorname{Re} \lambda_i(A)$ — действительная часть i-го корня характеристического уравнения матрицы A.

В разделах 3.4 и 3.5 представлены иллюстрирующие метод примеры. В частности, в разделе 3.5 рассмотрена задача аппроксимации области притяжения нулевого решения системы[6]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + 1{,}5x_2(t) - x_2(t-h) + 150u, \\ \dot{x}_2(t) &= 0{,}3x_1(t) - 2x_2(t) + 15u, \\ u &= \operatorname{sat}\left(-0{,}15556 \cdot x_1(t) - 0{,}05156 \cdot x_2(t)\right). \end{cases}$$

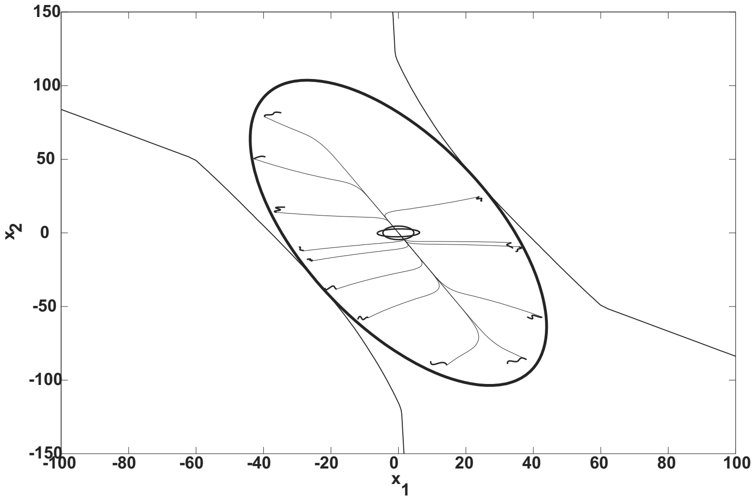

Рис. 5

С помощью теоремы 9 получена функция Ляпунова - Разумихина $v(x) = x^{\mathrm{T}}Px$, где

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9294 & 0{,}2424 \\ 0{,}2424 & 0{,}1670 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 4{,}3980 & -9{,}0172 \\ -9{,}0172 & 24{,}4759 \end{pmatrix}, \quad \tau = 2{,}1455,$$

[6]Tarbouriech S. Local stabilization of continuous-time delay systems with bounded inputs // Proc. of European Control Conf. — Brussels (Belgium), 1997. — CD-ROM Paper № 921. — 6 p.

обеспечивают выполнение матричного неравенства (15). По формуле (3), где функция $N_{v,f}$ определена выражением (14), вычислено критическое значение $R = 1115{,}6$ константы уровня r из теоремы 8. В качестве оценки области притяжения принято множество $Z_v(r) = C([-h, 0], S_v(r))$, где $S_v(R) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid v(x) < R\}$.

На рис. 5 показаны границы областей допустимых отклонений, найденных в работе S. Tarbouriech[6] (два малых эллипса) и полученной в настоящей работе $S_v(R)$ (большой эллипс), а также множество β из (3) (тонкая линия).

В **четвёртой главе** для двухзвенника с упругим шарниром между звеньями, совершающего движение в горизонтальной плоскости, предлагается ограниченное управление моментом силы, приложенным к одному из звеньев, обеспечивающее решение задачи робастной асимптотической стабилизации положения равновесия механизма. Для замкнутой системы построена область притяжения.

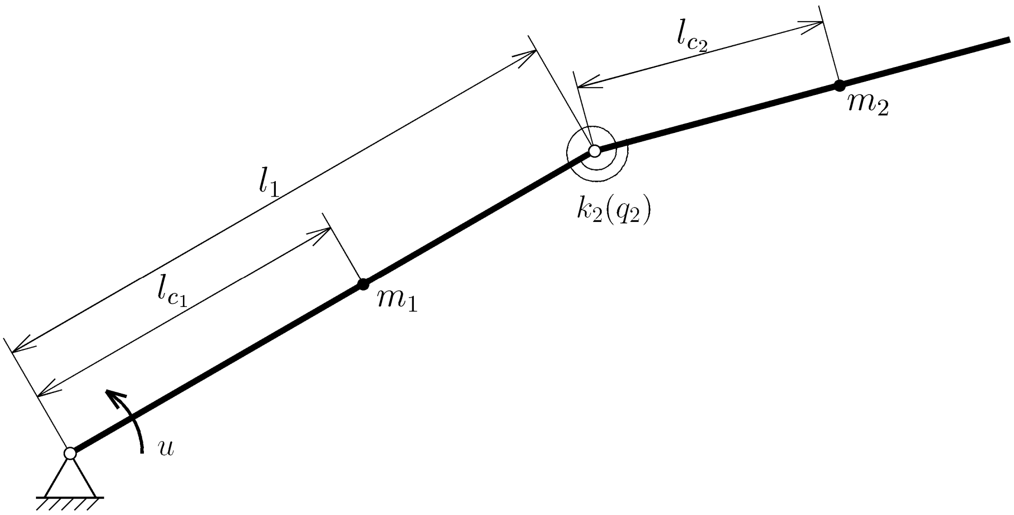

Рис. 6

При составлении математической модели в качестве обобщённых координат выбраны угол q_1 между первым звеном и некоторой фиксированной осью в плоскости движения механизма и угол q_2, на который повёрнута ось второго звена от положения, соответствующего недеформированному состоянию шарнира. Внешний угол, образуемый звеньями в состоянии, когда шарнир не деформирован, обозначен через α (все углы откладываются в одном и том же направлении), при деформации в шарнире возникает реактивный момент, равный $k_2(q_2)$. Уравнения движения имеют вид:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K(q) = Bu, \quad q = (q_1\ q_2)^T, \tag{16}$$

где $D(q) = \begin{pmatrix} \vartheta_1+\vartheta_2+2\vartheta_3\cos\tilde{q}_2 & \vartheta_2+\vartheta_3\cos\tilde{q}_2 \\ \vartheta_2+\vartheta_3\cos\tilde{q}_2 & \vartheta_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C(q,\dot{q}) = \vartheta_3\sin\tilde{q}_2 \begin{pmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_2-\dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}$, $K(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2(q_2) \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_2 = q_2+\alpha$, $\vartheta_1 = m_2l_1^2+m_1l_{c_1}^2+I_1$, $\vartheta_2 = m_2l_{c_2}^2+I_2$, $\vartheta_3 = m_2l_1l_{c_2}$. Множество значений параметров ϑ_i определяется следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $m_1>0$, $m_2>0$, $I_1\geqslant 0$, $I_2\geqslant 0$, $l_1\geqslant 0$, $l_{c_1}\geqslant 0$, $l_{c_2}\geqslant 0$, причём имеет место по меньшей мере один из следующих случаев: 1) $l_{c_1}>0$ и $l_{c_2}>0$; 2) $I_2>0$ и $l_1>0$; 3) $I_2>0$ и $I_1>0$. Тогда имеют место неравенства

$$\vartheta_1>0,\quad \vartheta_2>0,\quad \vartheta_3\geqslant 0, \tag{17}$$

$$\vartheta_1+\vartheta_2+2\vartheta_3\cos\alpha>0,\quad \vartheta_1\vartheta_2-\vartheta_3^2\cos^2(q_2+\alpha)>0. \tag{18}$$

Показано, что система (16) является пассивной и для решения задачи стабилизации предлагается управление

$$u = -\sigma_1(q_1)-\sigma_2(\dot{q}_1), \tag{19}$$

где для функций σ_i выполняются предположения:

Г1) σ_i удовлетворяют в $\mathbb{R}$ локальным условиям Липшица;

Г2) $\operatorname{sgn}(\sigma_i(s)) = \operatorname{sgn}(s)$, для всех $s\in\mathbb{R}$, $i=1,2$.

Доказаны следующие результаты.

Теорема 11. Пусть функции $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ и $k_2(s)$ дифференцируемы в точке $s=0$ и $\sigma_1'(0)=c_1>0$, $\sigma_2'(0)=c_2>0$, $k_2'(0)=k>0$, $\vartheta_2+\vartheta_3\cos\alpha\neq 0$, выполнены предположение Г1) и неравенства (17)–(18). Тогда решение $q\equiv\dot{q}\equiv 0$ замкнутой системы (16),(19) экспоненциально устойчиво.

Теорема 12. Пусть выполнены предположения Г1), Г2) и неравенства (17)–(18), $k_2(q_2)=kq_2$, где $k>0$ и $\Pi(x)=\int_0^x\sigma_1(\xi)d\xi\to+\infty$ при $|x|\to\infty$. Тогда решение $q\equiv\dot{q}\equiv 0$ системы (16),(19) асимптотически устойчиво в целом.

Приводятся примеры переходных процессов в системе (16),(19).

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Получены формулы для вычисления критического значения константы уровня при аппроксимации области притяжения методом функций Ляпунова.

2. Разработаны методы построения области притяжения системы с фазовыми ограничениями и области притяжения линейной системы, замкнутой ограниченным по величине линейным управлением.
3. Разработан метод аппроксимации области притяжения системы с запаздыванием положительно инвариантным множеством, целиком содержащимся в области притяжения.
4. Решена задача нелокальной асимптотической стабилизации малым управляющим воздействием положения равновесия механической системы, не являющейся полностью робастно управляемой в смысле Е. С. Пятницкого, и построена область притяжения для замкнутой системы.
5. На конкретных примерах показано, что разработанные методы могут быть использованы как для точного построения области притяжения, так и для её аппроксимации с высокой степенью точности.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Горбунов А.В. Робастная стабилизация в целом двузвенного робота-манипулятора ограниченной обратной связью // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов VII Международного семинара. — М., 2002. — С. 93 – 95.

2. Горбунов А.В. Стабилизация в целом двузвенного робота-манипулятора ограниченной нелинейной обратной связью // Нелинейный динамический анализ: Тезисы докладов II Международного конгресса (NDA'2). — М., 2002. — С. 111.

3. Горбунов А.В., Каменецкий В.А. Робастная стабилизация в целом двухзвенного робота-манипулятора обратной связью с насыщением // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Приборостроение. — 2002. — № 3. — С. 110 – 120.

4. Горбунов А.В., Каменецкий В.А. Об использовании метода функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов VIII Международного семинара памяти Е. С. Пятницкого. — М., 2004. — С. 46 – 48.

5. Gorbunov A.V., Kamenetskiy V.A. A construction method for attraction domain of time delay systems // Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике: Тезисы докладов II Московской конференции. — М., 2004. — С. 38.

6. Горбунов А.В., Каменецкий В.А. Метод функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 10. — С. 42 – 53.

7. Горбунов А.В., Каменецкий В.А., Пестряков Д.П. Нелокальная параметрическая стабилизация бокового движения самолета // Идентификация систем и задачи управления: Труды V Международной конференции. — М., 2006. — С. 2401 – 2414.

8. Большакова М.В., Горбунов А.В. Алгоритмическое описание функции Ляпунова для аппроксимации области притяжения // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IX Международного семинара им. Е. С. Пятницкого. — М., 2006. — С. 40 – 41.

9. Горбунов А.В. О структуре области притяжения для системы с фазовыми ограничениями // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IX Международного семинара им. Е. С. Пятницкого. — М., 2006. — С. 62 – 63.

10. Горбунов А.В. О стабилизации двухзвенника с нелинейной характеристикой упругого шарнира // Третья Международная конференция по проблемам управления: Тезисы докладов. — М., 2006. — Т. 1. — С. 32.

11. Горбунов А.В. Области притяжения для системы, описывающей поведение ядерного реактора при ограничениях на состояние // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов X Международного семинара им. Е. С. Пятницкого. — М., 2008. — С. 82 – 84.

12. Горбунов А.В., Каменецкий В.А. Оценка области устойчивости для систем, замкнутых управлением, ограниченным по величине и по скорости // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов X Международного семинара им. Е. С. Пятницкого. — М., 2008. — С. 84 – 86.

13. Горбунов А.В. О методах построения области притяжения динамической системы с ограничениями на состояние // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 2. — С. 283 – 284.

Подписано к печати . Заказ № .

Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.