На правах рукописи

ЛАЗАРЕВА Светлана Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ СРЕД С МАЛОРАЗМЕРНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ ФЕДОРЕНКО

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика»
Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Галанин Михаил Павлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Колдоба Александр Васильевич
	кандидат физико-математических наук, Гавриков Михаил Борисович
Ведущая организация:	Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова

Защита состоится: «___» _________ 20__ года в ___ ч. ___ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, ул. 2-ая Бауманская, д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан: «___»_________ 20__ года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.141.15,
кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
доцент

А. В. Аттетков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Широкий класс важных прикладных задач характеризуется наличием неоднородностей (геометрической или физической природы), которые проявляются на малых участках пространственной области. Актуальной задачей является описание явлений и процессов, поведение которых в небольших подобластях сопровождается быстрым ростом или внезапным скачком исследуемой физической величины, ее производной, резкими изменениями определяющих характеристик среды или геометрии. Известны задачи, в которых неточный расчет сравнительно небольших элементов или частей решения приводит к физически неверной картине явления.

Развитие численных методов для решения данного класса задач в значительной степени стимулируется продолжающимся процессом миниатюризации объектов исследования и необходимостью повышения эффективности численных алгоритмов и программных комплексов, позволяющих автоматизировать проведение расчетов.

Данная работа посвящена математическому моделированию состояний сред с малоразмерными включениями на основе метода конечных суперэлементов (МКСЭ), предложенного Р.П. Федоренко[1], разработке различных модификаций метода, их детальному теоретическому и численному анализу для решения задач описанного класса.

Разработка метода математического моделирования предполагает проведение исследований по трем основным направлениям: анализ математических моделей; разработка и теоретическое исследование численных алгоритмов; создание программного комплекса, в котором реализованы данные алгоритмы, и проведение с его помощью численных расчетов. В диссертации представлены все перечисленные направления.

Конкретные побудительные мотивы проведения исследований, представленных в диссертации, следующие:

1. Фундаментальной проблемой является разработка и исследование базовых математических моделей (в том числе вычислительных) процессов и явлений, протекающих в областях, которые содержат подобласти с резко неоднородными свойствами. Это, например, задачи моделирования процессов, протекающих в материалах с мелкими порами, в слоистых средах, в подобластях с разрывами характеристик (сопряжение идеального проводника и диэлектрика, сопряжение материалов с различными параметрами упругости и т.д.), задачи исследования свойств ядерных реакторов, задачи создания композитов, задачи определения полей вблизи малых частиц, задачи расчета распределения электростатического потенциала двойного слоя и многие другие. Особенности их решений включают сингулярности решения около точечных источников, ребер и углов, точки возврата, пограничные слои, скачки производных на границах различных материалов и т.п.

[1] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: МФТИ, 1994. – 528 с.

Известны различные методы расчета таких задач. Однако большинство подходов, применяемых на достаточно произвольных двух- и трехмерных областях, используют адаптивные сетки с большим числом узлов, что существенно увеличивает объем обрабатываемых данных. При этом погрешность расчета напрямую зависит от размера сеточного шага. В отличие от них МКСЭ использует особый подход, ориентированный под конкретную постановку задачи и специальным образом учитывающий особенности решения.

Разработка новых эффективных, теоретически и экспериментально обоснованных алгоритмов и программ для решения задач описанного класса, а также решение вопроса об определении точности их решения, является ключевым моментом в повышении эффективности решения рассматриваемых проблем в целом.

2. Метод конечных суперэлементов Федоренко уже был апробирован ранее. Изначально он был использован Р.П. Федоренко совместно с его коллегами для решения задач кинетики ядерных реакторов, задачи о трещине гидроразрыва и других[2]. Однако метод был разработан только для одномерной и двумерной постановок. Расчет решения задач в пространственно-трехмерном случае представляет огромный интерес для приложений. Рассмотрение и исследование возможных модификаций метода открывает возможности для разработки в определенном смысле оптимального подхода к расчетам «сложных» в вычислительном отношении задач.

Расчеты с помощью МКСЭ были проведены и несколько позже (М.П. Галанин, Е.Б. Савенков, Ю.М. Темис и др.) При этом метод показал свою высокую численную эффективность при определенном выборе способа его построения и реализации.

Теоретическое исследование МКСЭ начато в работах М.П. Галанина и Е.Б. Савенкова. Однако оно посвящено только доказательствам его сходимости на определенном классе функций и аппроксимации соответствующих решений. Детальное описание свойств и возможностей метода ранее проведено не было.

3. В последние годы большое значение придается распараллеливанию численных алгоритмов для решения краевых задач на многопроцессорных вычислительных комплексах. Метод конечных суперэлементов Федоренко входит в класс методов, в которых решение исходной задачи сводится к решению серии более простых задач. Методы данного класса в особенности эффективны в связи с возможностью реализации этих алгоритмов на многопроцессорных и параллельных электронно-вычислительных машинах.

4. Построенные варианты метода наглядны и наследуют принципы проекционных методов и методов разделения области (декомпозиции). Это делает их реализацию и принципы построения распространимыми на многие типы задач в неоднородных или неодносвязных областях.

---

[2] Климов А.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Гомогенизация в математическом моделировании ядерных реакторов канального типа методом конечных суперэлементов. – М., 1990. – 27 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, №4).

Цели и задачи исследования. Диссертационная работа посвящена математическому моделированию состояний сред с малоразмерными включениями на основе метода конечных суперэлементов Федоренко.

Целью работы является численное и теоретическое исследование аппроксимаций МКСЭ:

1. Программная реализация и применение МКСЭ для исследования состояний сред с малоразмерными включениями и определения их характеристик.
2. Теоретический анализ вариантов МКСЭ и исследование их влияния на приближение решения и его производных.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1. Реализация и численный анализ различных вариантов аппроксимаций метода. Разработка программного комплекса для численного решения двумерной задачи для уравнения Лапласа в неодносвязной области, трехмерных задач линейной теории упругости и задачи определения эффективных параметров композитного материала, трехмерной задачи анализа электрофизических свойств неоднородных проводящих объектов.
2. Получение априорных оценок погрешностей метода в пространствах С.Л. Соболева на примере эллиптического уравнения Лапласа в двумерной постановке. Установление насыщаемости метода и вывод неравенств типа Джексона и Бернштейна для приближений МКСЭ.
3. Локальное исследование гладкости численных решений МКСЭ в окрестностях углов декомпозиции на примере уравнения Лапласа.
4. Анализ погрешностей приближения производных любого порядка (при условии их существования) и получение необходимых и достаточных условий их аппроксимации методом конечных суперэлементов.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели использованы методы гильбертова пространства для различных классов краевых задач для уравнений с частными производными, теория проекционно-сеточных методов, естественные для энергетических подходов пространства Соболева, теория весовых пространств, теория эллиптических задач в областях с угловыми точками, теория интерполяции пространств функций и задачи определения насыщаемости, свойства регулярности решений вариационных задач на негладких областях и известные методы исследования МКЭ. Численный анализ характеризуется введением различных вариантов задания интерполяций, программная реализация которых не была построена ранее.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена строгостью используемого математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с известными данными. Результаты теоретической части диссертационной работы согласуются с результатами, полученными для иных методов в частных случаях.

Научная новизна и практическая значимость. В диссертации разработаны эффективные, теоретически и экспериментально обоснованные алгоритмы, являющиеся модификациями МКСЭ Федоренко. Построены аппроксимации МКСЭ, позволяющие решать задачи, к решениям которых предъявлены повышенные требования точности. Проведено их теоретическое и численное исследование на примере двумерных и трехмерных задач.

Результаты исследования МКСЭ показывают его высокую конкурентоспособность для моделирования состояний сред с малоразмерными включениями и ранее были неизвестны. Задачи рассмотрены в пространственно-двумерных и трехмерных областях.

Подобное обоснование метода проведено впервые в данной работе. Получены априорные оценки погрешностей метода в пространствах С.Л. Соболева. Для задачи Дирихле определены: регулярность решения, получаемого МКСЭ; погрешности численного решения на соболевских классах функций; неравенства типа Джексона и Бернштейна; теоретический анализ погрешностей приближения производных.

Построен программный комплекс. Метод применен для численного решения двумерной задачи о скважине для уравнения Лапласа; трехмерной задачи линейной теории упругости для материала с мелкими отверстиями; трехмерной задачи определения электрического потенциала и осредненного сопротивления в проводящих объектах, содержащих малые диэлектрические поры. Детальный численный анализ различных вариантов МКСЭ проведен впервые.

Основные положения, выносимые на защиту:

- результаты математического моделирования состояний сред с малоразмерными включениями на основе МКСЭ Федоренко: задача Дирихле в двумерной постановке; трехмерная задача линейной теории упругости; задача определения усредненных характеристик композитного материала; расчет электрофизических свойств проводника, содержащего малые диэлектрические поры, в трехмерной постановке;
- результаты теоретического исследования и обоснования аппроксимаций МКСЭ Федоренко: определения порядка сходимости МКСЭ; выявления аппроксимационных параметров, влияющих на сходимость решения и его производных; получения априорных оценок погрешностей приближения; исследования приближенного решения в углах декомпозиции.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на 17 семинарах и конференциях: 10th International Conference «Mathematical Modelling and Analysis» and 2nd International Conference «Computational Methods in Applied Mathematics» (Trakai, 2005); конференция «Студенческая научная весна – 2006» (Москва, 2006); 11th International Conference «Mathematical Modelling and Analysis» (Jurmala, 2006); International Conference «Tikhonov and Contemprorary Mathematics» (Moscow, 2006); международная конференция «Параллельные вычислительные технологии – 2007» (Челябинск, 2007); конференция «Инженерные системы – 2007» (Москва, 2007); конференция «Студенческая научная весна – 2007» (Москва, 2007); всероссийская конференция по вычислительной математике «КВМ – 2007» (Новосибирск, 2007); The 15th ISTC/Korea Workshop «KIS 2007» KMAC International Seminar & Workshop: Future Intelligence & Material Technologies (Bucheon, 2007); пятый международный семинар «Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах» (Москва, 2008); вторая научно-методическая конференция аспирантов и молодых исследователей (Москва, 2008); семинар отдела №11 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Вычислительные методы и математическое моделирование» (Москва, 2008); международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008); международная конференция «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2008); третья научно-методическая конференции аспирантов и молодых исследователей (Москва, 2009); международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (Москва, 2009); 1st International Conference «Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences» (Sozopol, 2009).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы представлены в 29 печатных работах: 9-ти статьях [7,8,16,17,21,22,23,25,28], в том числе 2-х статьях Перечня, рекомендованного ВАК РФ [7,8], 7-ми препринтах [1,4,5,10,11,14,18], 13-ти тезисах докладов [2,3,6,9,12,13,15,19,20,24,26,27,29].

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 175 страницах, содержит 57 иллюстраций. Библиография включает 155 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, изложены основные идеи МКСЭ, проведен обзор МКСЭ и близких к нему подходов, приведены данные о структуре и содержании диссертационной работы.

Первая глава посвящена численному решению краевых задач с мелкоразмерными особенностями для эллиптических уравнений и систем на основе МКСЭ. Метод применен для численного решения двумерной задачи о скважине для уравнения Лапласа; трехмерной задачи линейной теории упругости для материала с мелкими отверстиями и задачи определения эффективных характеристик композитного материала, содержащего мелкомасштабные включения; трехмерной задачи исследования электрофизических свойств проводящего объекта, содержащего малые диэлектрические поры. Детальный численный анализ различных вариантов МКСЭ для математического моделирования состояний сред с мелкоразмерными неоднородностями проведен впервые в данной работе.

В первом параграфе представлены результаты численного исследования МКСЭ на примере решения двумерной задачи о «скважине» для уравнения Лапласа. Область расчета является неодносвязной и содержит одно или несколько малых отверстий – «скважин», в окрестности которых допускается быстрый рост решения и компонентов его градиента. Предложены и опробованы различные варианты МКСЭ, основанные на возможных способах интерполирования решения на границе суперэлемента и задании регулярного разбиения области на суперэлементы. Построен программный комплекс. Проведен сравнительный анализ этих вариантов. Осуществлено сравнение МКСЭ с методом конечных элементов (МКЭ). Получены количественные данные об ошибках в нормах различных пространств и численные оценки скорости сходимости.

Во втором параграфе при помощи МКСЭ решены несколько задач линейной теории упругости в трехмерной постановке. Предложены различные варианты задания интерполяции решения на двумерных границах суперэлементов. Построена их программная реализация и проведен сравнительный анализ.

По результатам решения первой задачи для упругого материала с мелкомасштабными отверстиями проведено численное исследование МКСЭ и осуществлено сравнение точности МКСЭ и МКЭ, получены численные оценки скорости сходимости.

Математическая модель включает в себя уравнения равновесия сплошной среды при отсутствии массовых сил; закон Гука для изотропного тела с постоянными Ламе λ, μ; соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений σ_{ij} и компоненты тензора деформаций ε_{ij}. Систему уравнений линейной теории упругости для изотропных сред в перемещениях $\mathbf{u}$ можно представить в векторном виде (уравнение Ламе):

$$(\lambda + 2\mu)\ \mathrm{grad\ div}\ \mathbf{u} - \mu\ \mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Слабая постановка уравнений, из которых вытекает система Ламе, имеет следующий вид:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS,$$
$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij},$$
$$\varepsilon_{ij} = 1/2\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, δ_{ij} – символ Кронекера, а также использованы соглашения об обозначении производной по пространственной переменной x_i через $(\cdot)_{,i}$ и правило суммирования по повторяющимся индексам.

Для замыкания системы следует добавить граничные условия на поверхности $\partial\Omega$, ограничивающей тело. На части границы Γ_1 заданы кинематические граничные условия $u_i\big|_{\Gamma_1} = g_i$, где $\mathbf{g}$ – известная вектор-функция; на части Γ_2 границы заданы динамические граничные условия $\sigma_{ij} n_j\big|_{\Gamma_2} = h_i$, где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль; причем $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Вторая рассмотренная в параграфе задача – задача расчета с помощью МКСЭ напряженно-деформированного состояния композитных материалов. Выбраны композитные материалы с включениями в виде коротких волокон. Определены приведенные (усредненные) свойства композита в зависимости от упругих и геометрических параметров матрицы и включения в предположении близкой к сферической форме волокон и при упругом поведении материалов. Параметры включают упругие коэффициенты, объемную долю включений в материале, их взаимное расположение и др. Исследование особенностей напряженно-деформированного состояния тела в масштабе элементарной ячейки композита особенно важно при рассмотрении процесса пластического деформирования и разрушения композитов.

Математическая модель включает приведенную выше систему уравнений линейной теории упругости (в слабой постановке) и необходимые граничные условия.

В третьем параграфе МКСЭ применен для расчета распределений электрического потенциала, плотности тока и осредненного сопротивления в проводящих объектах. Материал таких объектов содержит малые диэлектрические поры. Область, занятая проводником, составляет значительную величину по сравнению с областью, занятой порами. Построен программный комплекс, включающий в себя реализацию различных вариантов метода. Определены осредненные коэффициенты проводимости и сопротивления. Исследованы зависимости электрофизических характеристик проводящего объекта от величин объемной пористости, проводимости материала, размеров и расположения полостей в материале.

Математическая модель включает закон сохранения полного заряда; соотношения, выражающие потенциальность электрического поля; закон Ома:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{j} = \sigma^0 \mathbf{E},$$

где $\mathbf{j}$ – вектор плотности (постоянного во времени) электрического тока, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, σ^0 – электропроводность материала образца.

Вторая глава дисертационной работы посвящена теоретическому исследованию аппроксимаций МКСЭ. Получены априорные оценки погрешностей метода и установлена его насыщаемость. Выведены неравенства типа Джексона и Бернштейна для приближений МКСЭ.

Исследование проведено на примере двумерной задачи Дирихле:

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где u – искомое решение, $\partial\Omega$ – граница расчетной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, g – известная функция на $\partial\Omega$. Область Ω получена из односвязной области удалением некоторого числа кругов, радиус которых существенно меньше (на несколько порядков) ее характерных размеров. В окрестностях кругов сосредоточены все локальные особенности решения. Особенность может заключаться, например, в значительном росте производных искомой функции в окрестностях мелких отверстий.

В классическом случае линейных эллиптических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами слабые решения задачи (1) – (2) принадлежат пространству Соболева $H^1(\Omega)$. В главе проведено исследование точности приближений МКСЭ в данном пространстве (энергетическое пространство задачи (1)–(2)). Искомое решение u принадлежит естественной для него шкале пространств Соболева $H^R(\Omega)$, $R \ge 1$, $R \in \mathbb{R}$.

В первом параграфе приведены основные используемые обозначения и введены необходимые определения.

Второй и третий параграфы посвящены доказательству насыщаемости метода и выводу априорных оценок его погрешностей.

Показано, что при интерполяции сплайнами порядка ν на границах суперэлементов S на равномерной сетке с шагом $|I|$ МКСЭ имеет насыщение по гладкости в пространстве $H^1(\Omega)$ на соболевских классах $H^R(\Omega)$, $R > 1$, $R \in \mathbb{Z}$. Классом насыщения является $H^{\nu+1}(\Omega)$, и если $(N - 1)$ – число отрезков разбиения границы декомпозиции, то порядок насыщения – $O(1/N^{R-1})$. Справедливы следующие априорные оценки погрешностей (приближенное решение обозначено символом $\bar{u}$):

1. При $\nu \ge R - 1$

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C}\, \|u - \bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \le C M_R (\nu+1)^{1-R} |I|^{R-1} |u|_{H^{R-1/2}(S)},$$

где постоянная C определена только параметрами непрерывности и эллиптичности исходного оператора и константами неравенств вложения, постоянная M_R зависит только от R. Здесь и далее $|\cdot|_H$ – обозначение полунормы пространства H.

2. При $\nu \le R - 1$

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C}\, \|u - \bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \le C \cdot |I|^{\nu} |u|_{H^{\nu+1/2}(S)},$$

где постоянная C определена параметрами непрерывности и эллиптичности исходного оператора, константами неравенств вложения и зависит от ν.

Понятие насыщаемости метода по гладкости иллюстрирует поведение погрешности приближения на рисунках 1 и 2. Здесь s – порядок сходимости, т.е.

$$\|u-\overline{u}\|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C}\,\|u-\overline{u}\|_{H^{1/2}(S)} \le C'|I|^s\,|u|_{H^{s+1/2}(S)}.$$

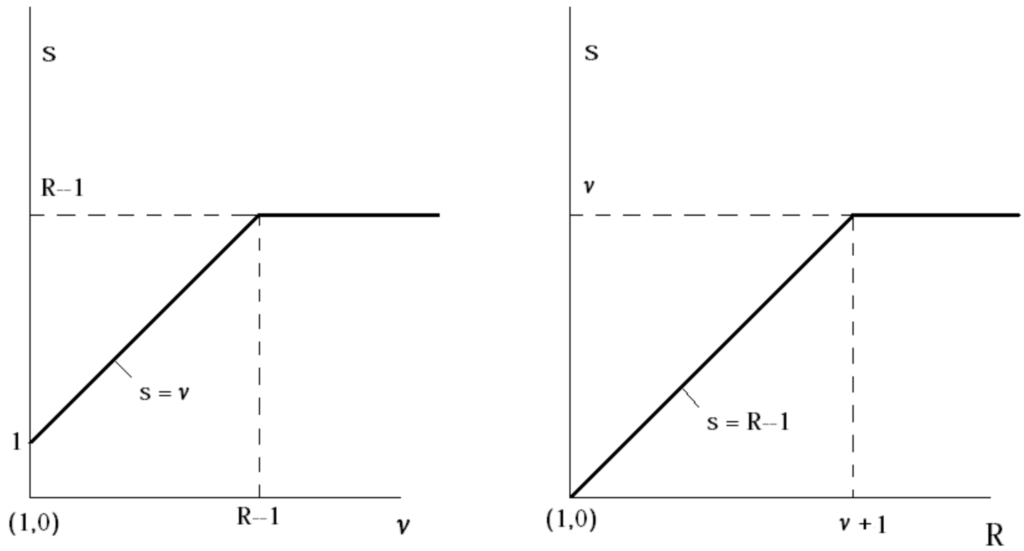

Рис. 1 Рис. 2

В заключение параграфа приведен тестовый пример задачи о «скважине» для уравнения Лапласа, на котором продемонстрированы полученные результаты.

Для решения задач использованы теория интерполяции пространств функций, методы определения насыщаемости, известные методы получения оценок наилучшего приближения, некоторые из подходов к исследованию МКЭ, теория соболевских пространств, теория проекционно-сеточных методов.

Третья глава дисертационной работы посвящена исследованию влияния способов численной реализации МКСЭ на приближение производных решения. Получены теоретические оценки погрешностей приближения производных любого порядка с помощью МКСЭ в пространствах Соболева. Производные решения представляют часто определяющие физические характеристики решаемых задач. Все результаты получены на примере задачи Дирихле (1) – (2).

В первом параграфе показана локальная гладкость и асимптотическое представление численного решения МКСЭ вблизи границы декомпозиции.

Получено представление решения в окрестности угла суперэлемента Λ раствора α, имеющее вид суммы с конечным числом слагаемых. Поведение решения $\overline{u}$ при приближении к угловой точке или при $r \to 0$ (где r – расстояние до угла) таково: $\overline{u} = O(r^{\pi/\alpha}\ln r)$ при $\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{Z},\, b \le \nu\}$; в противном случае решение $\overline{u}$ ограничено.

Приведено асимптотическое разложение произвольной функции класса $H^R(\Omega)$, имеющей следы на гладких частях границы декомпозиции, принадлежащие пространству $H^{R-1/2}(I)$. Именно такая функция (при необходимых дополнительных ограничениях) может играть роль решения задачи u.

Второй параграф посвящен получению априорных оценок погрешностей производных любого порядка. Наряду с остальным доказательства основаны на результатах, полученных в первом параграфе и во второй главе диссертации.

Показано, что:

1. Погрешность расчета решения в окрестности угловой точки в норме пространства $H^2(\Lambda)$ сходится к нулю при $|I| \to 0$, если выполнено условие $\pi / \alpha \notin \{b \in \mathbb{Z},\ b \le \nu\}$. Это погрешность градиента в норме пространства $H^1(\Lambda)$ либо вторых производных в стандартной средне-квадратичной норме $L_2(\Lambda)$.

2. Существует некоторая константная погрешность метода, если выполнено условие $\pi / \alpha \in \{b \in \mathbb{Z},\ b \le \nu\}$. Погрешность МКСЭ на классе $H^R(\Omega)$ не сходится к нулю при $|I| \to 0$. Получена соответствующяя нижняя оценка погрешности.

3. Выведены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых погрешность метода сходится к нулю (ликвидация константной погрешности, возникающей в условиях пункта 2). Для сходимости погрешности метода к нулю в пространстве $H^2(\Lambda)$ при условии $\pi / \alpha \in \{b \in \mathbb{Z},\ b \le \nu\}$ необходимо и достаточно, чтобы след граничного интерполянта $\bar{u}\big|_{\partial\Lambda}$ на каждой стороне угла Λ являлся следом некоторого гармонического полинома в системе координат Oxy, связанной с углом Λ, оси которой Ox и Oy направлены по сторонам угла.

4. Погрешность расчета решения в норме пространства $H^M(\Lambda)$ при $M > 2$ неограниченно возрастает при $|I| \to 0$ (норма в пространстве $H^1(\Lambda)$ ошибки расчета производных порядка выше единицы либо норма в пространстве $L_2(\Lambda)$ ошибки расчета производных выше второго порядка расходится).

Для решения задачи использованы теория весовых пространств, теория эллиптических задач в областях с угловыми точками, свойства регулярности решений вариационных задач на негладких областях, а также результаты и методы, полученные либо использованные в предыдущих главах работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложены различные варианты МКСЭ Федоренко для моделирования состояний сред с малоразмерными включениями. Проведен их численный анализ. Реализованы алгоритмы и построен программный комплекс для численного решения краевых задач с особенностями. Решены двумерная задача для уравнения Лапласа в неодносвязной области, трехмерная задача линейной теории упругости и задача определения эффективных параметров композитного материала, трехмерная задача определения электрофизических свойств пористого материала.

2. Проведено теоретическое обоснование различных вариантов МКСЭ для эллиптических уравнений и систем на примере уравнения Лапласа. Получены априорные оценки погрешностей приближения в пространствах Соболева. Определен порядок сходимости МКСЭ. Выявлены аппроксимационные параметры, влияющие на скорость сходимости.

3. Исследовано влияние аппроксимации следов решения сплайн-функциями на приближение решения и его производных. Проведен анализ приближенного решения в углах декомпозиции и определено влияние геометрических характеристик на свойства приближения. Выведены необходимые и достаточные условия для приближения производных МКСЭ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Галанин М.П., Лазарева С.А. Локальная гладкость и асимптотика решения метода конечных суперэлементов в угловых точках разбиения. – М., 2008. – 31 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 49).

2. Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. Качественный анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко // КВМ – 2007: Тезисы докладов Всероссийской конференции по вычислительной математике. – Новосибирск, 2007. – С. 23.

3. Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. Качественный анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко // Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах: Тезисы докладов V международного семинара. – М., 2008. – С. 100-102.

4. Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. Метод конечных суперэлементов для решения трехмерных задач теории упругости. Численное исследование. – М., 2006. – 28 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 44).

5. Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. Численное исследование метода конечных суперэлементов на примере решения задачи о скважине для уравнения Лапласа. – М., 2005. – 30 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 79).

6. Лазарева С.А. Анализ метода конечных суперэлементов Федоренко // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Тезисы докладов третьей научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. – М., 2009. – С. 39-42.

7. Лазарева С.А. Анализ точности приближений метода конечных суперэлементов Федоренко // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2009. – №2. – С. 3-27.

8. Лазарева С.А. Аппроксимационные свойства метода конечных суперэлементов Федоренко // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 8. – С. 75-81.

9. Лазарева С.А. Априорные оценки погрешностей и гладкость приближенного решения МКСЭ Федоренко // Студенческая научная весна – 2007: Тезисы докладов общеуниверситетской научно-технической конференции. – М., 2007. – С. 100-101.

10. Лазарева С.А. О неравенствах типа Джексона и Бернштейна для приближений метода конечных элементов Федоренко. – М., 2008. – 25 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 102).

11. Лазарева С.А. Теоретические оценки погрешностей приближения производных для метода конечных суперэлементов. – М., 2008. – 36 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №100).

12. Лазарева С.А. Теоретический анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Тезисы докладов второй научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. – М., 2008. – С. 45-46.

13. Лазарева С.А. Теоретический анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Тезисы докладов международной конференции. – М., 2009. – С. 72-73.

14. Лазарева С.А. Точность аппроксимаций метода конечных суперэлементов Федоренко в пространствах Соболева. – М., 2008. – 32 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 101).

15. Лазарева С.А. Численное исследование метода конечных суперэлементов для решения задач теории упругости // Студенческая научная весна – 2006: Тезисы докладов общеуниверситетской научно-технической конференции. – М., 2006. – С. 143-144.

16. Метод конечных суперэлементов и его применения для решения задач науки и техники / М.П. Галанин, С.А. Лазарева, Е.Б. Савенков, Д.А. Яковлев // Параллельные вычислительные технологии – 2007: Сборник трудов международной конференции. – Челябинск, 2007. – С. 87-100.

17. Метод конечных суперэлементов Федоренко и некоторые его применения / М.П. Галанин, С.А. Лазарева, Е.Б. Савенков и др. // Инженерные системы – 2007: Сборник трудов научно-практической конференции. – М., 2007. – С. 100-114.

18. Применение метода конечных суперэлементов для расчета распределений электрического потенциала и плотности тока в проводящих объектах / В.Э. Бородай, М.П. Галанин, С.А. Лазарева и др. – М., 2008. – 25 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 17).

19. Galanin M., Lazareva S. A priori error estimates of the Fedorenko finite superelement method // Differential Equations and Topology: Abstracts of International Conference. – M., 2008. – P. 39-40.

20. Galanin M., Lazareva S. Approximation of the Fedorenko finite superelement method in Sobolev spaces // Differential Equations, Function Spaces, Approximation Theory: Abstracts of International Conference. – Novosibirsk, 2008. – P. 606.

21. Galanin M., Lazareva S. Local regularity and asymptotic behaviour of Fedorenko finite superelement method solution // Int. J. Computing Science and Mathematics. – 2009. – V.2, №3. – P. 201-221.

22. Galanin M., Lazareva S. Mathematical modelling of processes in conditions of strong media inhomogenities // Future Intelligence & Material Technologies: The Proceedings of 15th ISTC/Korea Workshop KIS 2007 KMAC International Seminar & Workshop. – Bucheon, 2007. – P. 25-31.

23. Galanin M., Lazareva S. On the Analysis of the Fedorenko Finite Superelement Method for Simulation of Processes with Small-Scale Singularities // American Institute of Physics Conference Proceedings. – 2009. – V. 1186. – P. 327-334.

24. Galanin M., Lazareva S. Theoretical and Numerical Analysis of the Fedorenko Finite Superelement Method // Applications of Mathematics in Technical and Natural Sciences: Abstracts of 1st Euro-American Consortium. – Sozopol, 2009 . – P. 33.

25. Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko finite superelement method and its applications // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2007. – V. 7, №1. – P. 3-24.

26. Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Finite Superelements method and its applications // Mathematical Modelling and Analysis. Computational Methods in Applied Mathematics: Abstracts of 10th and 2nd International Conferences. – Trakai, 2005. – P. 114.

27. Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Finite superelements method for solution of problems of mathematical physics in sharply inhomogeneous domains // Tikhonov and Contemprorary Mathematics: Abstracts of International Conference. – M., 2006. – P. 52-53.

28. Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical investigation of the Finite superelement method for the 3D elasticity problems // Mathematical Modelling and Analysis. – 2007. – V. 12, №1. – P. 39-50.

29. Numerical study of finite superelements approximations for elasticity problems / M. Galanin, S. Lazareva, E. Savenkov, J. Temis // Mathematical Modelling and Analysis: Abstracts of 11th International Conference. – Jurmala, 2006. – P. 24.