На правах рукописи

СУНЧАЛИНА Анна Леонидовна

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА СВЯЗЕЙ В ФОРСИРОВАННЫХ ИСПЫТАНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ И СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана».

Научные руководители: доктор технических наук, профессор Карташов Геннадий Дмитриевич

доктор физико-математических наук, профессор Тимонин Владимир Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Волков Игорь Куприянович

кандидат физико- математических наук Козлов Василий Васильевич

Ведущая организация: Институт системного анализа РАН

Защита диссертации состоится «_____ » _______________2010 года в ____ часов___мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н .Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан « ___ »______________ 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.т.н., с.н.с., доцент Аттетков А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Определение показателей надежности для технических устройств различного уровня (таких как комплектующие, ЭРИ, блоки РЭА, сложные технические системы) имеет важное значение при принятии решений о характере и сроках их применения. Сюда относится и определение степени резервирования отдельных блоков для невосстанавливаемых систем кратковременного использования, назначение времен профилактик восстанавливаемых систем, определение сроков снятия с эксплуатации (боевого дежурства) систем, выработавших ресурс.

Определение же показателей надежности в связи с непрерывно усложняющимися объектами исследования требует разработки новых методов анализа информации, моделирования и прогнозирования функционирования систем в различных эксплуатационных условиях, создание программного обеспечения для реализации предложенных методов.

Следует заметить, что начиная с 60-х годов модели и методы анализа информации по испытаниям изделий в эксплуатационных режимах оказались недостаточными для удовлетворительного решения поставленных задач ввиду невозможности в приемлемые сроки получить необходимую информацию. Поэтому одним из решений этой проблемы стала разработка методов и алгоритмов оценки эффективности и надежности систем по результатам форсированных испытаний.

Проблеме форсированных испытаний посвящено большое количество публикаций как у нас в стране, так и за рубежом. Среди отечественных авторов отметим работы Карташова Г.Д., Перроте А.И., Седякина Н. М., Пешеса Л. Я., Степановой М. Д., Тимонина В.И., Белова В.Н. и др. Из иностранных авторов – Д. Кокса, В. Нельсона, Н. Сингпурваллу, Д. Хана, Ф. Прошана, Н. Манн, С. Аморима, А. Джонсон-Рихарда и др.

Среди многих проблем, требующих решения при проведении форсированных испытаний, выделяются две:

А. Проблема нестабильности производства, заключающаяся в том, что разные партии однотипных изделий вследствие особенностей различных производств зачастую имеют неодинаковые законы распределения наработок до отказа. Вследствие этого статистические связи между законами распределения наработок в разных режимах являются неустойчивыми и могут меняться от партии к партии. Отсюда следует, что неправомерно распространять результаты форсированных испытаний, проводимых обычными регрессионными методами на изделиях одной из партий, на другие партии аналогичных изделий;

Б. Проблема форсированных испытаний сложных изделий, представляющих собой систему, состоящую из большого количества элементов (комплектующих). Для таких систем очень сложно определить коэффициент ускорения испытаний по причине того, что форсированный режим на каждое комплектующее действует по-разному, и следовательно, это приводит к изменчивости коэффициента ускорения испытаний для различных элементов. В связи с этим возникает вопрос о самой возможности построения форсированных испытаний для таких изделий, в частности, для изделий, представляющих собой последовательно соединенную систему большого количества элементов.

Начало исследований по первой проблеме было положено Перроте А.И. [1] и продолжено Карташовым Г.Д.[2,3] В частности, для решения проблемы А. он предложил оценивать связи не между функциями распределения наработок до отказа, а между случайными величинами - наработками **одного и того же изделия** в разных режимах. Согласно принципу инвариантности, эти связи не меняются от партии к партии, так как они определяются не особенностями производства, а внутренней структурой исследуемых изделий. Поэтому, установив эту связь для изделий одной из партии, мы можем применять ее и для изделий из других партий.

В рамках решения задачи установления связей между наработками до отказа в разных режимах **одного и того же изделия** (между компонентами двумерного вектора), Г.Д. Карташовым была решена проблема оценки связи между ненаблюдаемыми одновременно случайными величинами. Дело в том, что невозможно у одного изделия «измерить» обе наработки. Определив наработку в одном режиме, нельзя испытать изделие в другом режиме, так как оно уже разрушено. Для решения этой проблемы были разработаны планы проведения испытаний в переменных режимах (предварительных исследований), статистическая обработка результатов которых основывалась на использовании непараметрических оценок, не требующих знания функций распределения наработок до отказа. Однако применение непараметрических методов из-за ограниченности объемов испытаний зачастую приводит к очень широким доверительным интервалам для коэффициента ускорения, что обесценивает получаемую информацию или вынуждает пользоваться только «точечными» оценками этих функций.

Проблема Б. исследовалась Карташовым Г.Д. в работах[4,5], где была сформулирована точная математическая постановка проблемы и дано ее решение для последовательной системы при условии выполнения некоторых

---

[1] Карташов Г. Д., Перроте А. И. О принципе ”наследственности“ в теории надёжности // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 5. С. 17–20.

[2] Карташов Г.Д. Основы теории форсированных испытаний. М.: Знание, 1977. 52 с.

[3] Карташов Г.Д. Предварительные исследования в теории форсированных испытаний. М.: Знание, 1980. 51 с.

[4]Карташов Г.Д. О коэффициенте корреляции между наименьшими членами вариационного ряда // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Естественные науки. 1990. №1. С.4-9.

[5] Карташов Г.Д. Форсированные испытания аппаратуры. М.: Знание, 1985. 51 с.

предположений. В этих работах было проведено подробное исследование асимптотического поведения коэффициента корреляции между наработками системы в двух режимах, распределения отношения наработок, оценки коэффициента ускорения. Однако эти результаты были получены при ограничительном предположении о том, что совместная плотность распределения наработок элементов в двух режимах отлична от нуля в начале координат. Это предположение исключало возможность использования полученных результатов для двумерных распределений, у которых маргинальными являются, например, гамма-распределение или распределение Вейбулла с параметром формы больше единицы.

В диссертации разработана новая техника оценивания результатов испытаний в переменных режимах на стадии предварительных исследований, позволяющая для первой из обозначенных проблем оценивать совместную плотность распределения наработок одного и того же изделия в различных режимах при условии использования параметрических моделей. Кроме того, для второй проблемы получено обобщение результатов Карташова Г.Д. и других авторов, позволяющее снять большинство из ранее существовавших ограничений на возможный вид двумерной плотности распределения наработок элементов.

Решение первой проблемы связано с описанием совместной функции распределения наработок одного и того же изделия в двух режимах. Дело в том, что часто мы имеем информацию о маргинальных законах наработок в различных режимах, которая не используется при непараметрических методах оценки коэффициента ускорения. Если при этом ограничиться параметрическим семейством распределения наработок, то задача описания взаимной зависимости между наработками на отказ сводится к задаче оценки параметров модели. Кроме того, разработанные модели совместного распределения отказов в двух режимах обладают важным свойством – регрессия одной наработки (например, в нормальном режиме) на другую (в форсированном режиме) линейна.

Такой подход к оценке зависимости между одновременно не наблюдаемыми случайными величинами рассматривался Amorim S., Johnson R. A.[6] в предположении, что совместное распределение отказов в двух режимах описывается двумерным гауссовским распределением, и в одном из режимов отсутствует последействие (т.е не происходит накопление повреждений). В этой работе оценки параметров для двумерной нормальной модели получены по результатам испытаний изделий в переменном режиме с программным способом переключения. Карташовым Г.Д. были получены аналогичные результаты для двумерной нормальной модели при динамическом способе переключения. Однако в теории надежности для описания наработок изделий

[6] Amorim S., Johnson R. A. Experimental designs for estimating the correlation between two destructively tested variables // Journal of the American Statistical Association. 1986. V.81, № 395. P. 807–812.

нормальное распределение используется довольно редко. Поэтому чрезвычайно актуальна задача оценки параметров для моделей других двумерных распределений.

Для второй из обозначенных выше проблем обобщение результатов Г.Д. Карташова было получено за счет использования существенно более тонких методов асимптотического анализа (метод Лапласа и др.). Полученные результаты позволяют производить пересчет результатов форсированных испытаний в условия нормального режима для широкого класса совместных плотностей отказов элементов системы.

Цель работы - разработка параметрических моделей совместной плотности распределения для наработок до отказа изделий в различных режимах и методов оценки их параметров; определение асимптотических характеристик совместных законов распределения наработок до отказа больших систем последовательно соединенных элементов в различных режимах (плотности, коэффициента корреляции, отношения наработок).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Предложены новые параметрические модели и методы оценивания их параметров для обработки результатов форсированных испытаний, когда наработки изделий в нормальном и форсированном режимах описываются как непрерывными, так и дискретными случайными величинами.

Существенным образом обобщены ранее полученные результаты, относящиеся к исследованию асимптотического поведения распределения отношения наработок и коэффициента корреляции между наработками больших систем последовательно соединенных элементов в двух режимах. Доказана возможность производить пересчет результатов форсированных испытаний в условия нормального режима для широкого класса совместных плотностей отказов элементов системы.

Введены новые модели двумерных распределений с заданными маргинальными распределениями и носителями плотности специального вида.

Результаты в 3.1, полученные ранее Карташовым Г.Д. [7], доказаны новым способом с целью демонстрации предложенных в диссертации методов.

Методы исследования. В диссертации использовались методы математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, асимптотические методы анализа (разложение в ряд по ортогональным многочленам, метод Лапласа, специальные функции), численные методы, методы статистического моделирования.

Теоретическая и практическая ценность. Предложенные в диссертации модели и разработанные методы оценки их параметров позволяют:

[7] Kartashov G.D. Estimation of the parameters of bevariate distribution of Gaussian random variables that cannot be observed simultaneously // Journal of Mathematical Sciences.1995. V. 75, №1. P.1389-1393.

- обосновать возможность применения параметрических моделей при проведении испытаний в переменных режимах в условиях нестабильного производства;

- существенно увеличить точность оценок коэффициента ускорения форсированных испытаний за счет более полного использования информации, полученной в результате испытаний;

- значительно расширить статистический аппарат обработки результатов форсированных испытаний сложных систем.

- разработанная техника может служить базой и для других приложений в методах определения показателей надежности (отбор высоконадежных изделий, сравнение показателей надежности в различных эксплуатационных режимах и пр.).

На защиту выносятся следующие положения:

1. Разработка и исследование новых параметрических моделей совместной плотности наработок до отказа в различных режимах, основанных на билинейном разложении плотности по системе ортогональных многочленов. Разработка методов оценки параметров для указанных моделей, как в непрерывном, так и в дискретном случае. Разработка новых методов отбора высоконадежных изделий. Аналитические выражения оценок параметров для ряда конкретных моделей, имеющих широкое распространение на практике.
2. Исследование асимптотического поведения коэффициента корреляции и отношения наработок в нормальном и форсированном режимах для больших систем, последовательно соединенных равно надежных элементов. Обоснование возможности проведения форсированных испытаний таких систем вне зависимости от поведения совместной плотности наработок их элементов в начале координат. Нижняя оценка для усредненного коэффициента ускорения.
3. Апробация полученных результатов как на экспериментальных данных, так и данных, полученных методами статистического моделирования. Исследование новых моделей двумерных распределений с заданными маргинальными распределениями и носителями плотности специального вида.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы неоднократно обсуждались на научных семинарах МГТУ им.Н.Э.Баумана и МЭСИ (2009,2010), докладывались на LXII Научной сессии Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С.Попова (Москва, 2007); II научно-методической конференции аспирантов и молодых ученых «Актуальные проблемы фундаментальных наук» МГТУ им. Н.Э.Баумана (Москва,2008); X Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Санкт-Петербург, 2009).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 5 научных статьях [1-5], в том числе в 3 статьях из перечня ведущих научных журналов и изданий ВАК РФ.

Личный вклад соискателя. Все исследования в диссертационной работе проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырех глав, выводов, приложения и списка литературы, содержащего 57 наименований. Работа изложена на 103 страницах, содержит 14 рисунков, 8 диаграмм и 6 таблиц. Библиография включает 57 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель исследования, научная новизна, теоретическая и практическая ценность полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе рассматриваются модели, в которых наработки изделий в нормальном и форсированном режимах описываются непрерывными двумерными распределениями, допускающими билинейное разложение по системе ортогональных многочленов. Основным допущением является предположение о том, что в форсированном режиме отсутствует последействие. Это означает, что если в этом режиме изделие подвергалось воздействию определенной силы и при этом оно не отказало, то после снятия воздействия оно сохраняет свои свойства.

Обозначим через ξ_* и ξ_0 значения разрушающих нагрузок (наработок) для одного и того же изделия в форсированном режиме ε_* и нормальном режиме ε_0 соответственно. Эти две случайные величины одновременно не наблюдаемы.

Пусть $F(x,y)=\mathrm{P}(\xi_*<x,\xi_0<y)$ - совместная функция распределения случайных величин ξ_* и ξ_0, $f(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$ - совместная плотность распределения. Через

$$F_i(t)=\mathrm{P}(\xi_i<t),\qquad f_i(t)=\frac{d}{dt}F_i(t),\quad i=*,0$$

обозначим маргинальные функции распределения и плотности случайных величин ξ_* и ξ_0.

Для пары изделий $\left(\xi_i^{(1)},\xi_i^{(2)}\right)$ (нижний индекс – режим испытаний, верхний индекс – номер изделия) введем случайные величины

$$\theta_* = \min\left\{\xi_*^{(1)}, \xi_*^{(2)}\right\}, \quad \theta_0 = \begin{cases} \xi_0^{(1)}, \text{ если } \xi_*^{(1)} > \xi_*^{(2)}, \\ \xi_0^{(2)}, \text{ если } \xi_*^{(1)} < \xi_*^{(2)}. \end{cases}$$

Таким образом, θ_* – стойкость наиболее “слабого” изделия пары в режиме ε_*, а θ_0 – стойкость второго изделия пары в режиме ε_0. Обе величины θ_* и θ_0 одновременно наблюдаемы, и поэтому обычными статистическими методами можно восстановить их совместную функцию распределения $H(x,y) = \mathrm{P}(\theta_* \le x, \theta_0 \le y)$ (по крайней мере, в предположении о бесконечно большом объеме выборки).

Задача состоит в том, чтобы по функции распределения $H(x,y)$ ***наблюдаемых одновременно случайных величин*** θ_* и θ_0 ***восстановить совместную плотность распределения*** $f(x,y)$ ***одновременно ненаблюдаемых случайных величин*** ξ_* и ξ_0.

Обозначим через $\left\{g_k^{(i)}(x), k = 0,1,...\right\}$ систему многочленов, получающуюся из системы $\left\{x^k, k = 0,1,...\right\}$ процессом ортогонализации Гильберта-Шмидта с весовой функцией $f_i(x)$, $i = *,0$. Это означает, что $g_k^{(i)}(x)$ – многочлен степени k, для которого имеют место следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_k^{(i)}(x) g_l^{(i)}(x) f_i(x)\,dx = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{при } l = k, \\ 0, & \text{при } l \ne k. \end{cases}$$

Будем говорить, что плотность $f(x,y)$ допускает билинейное разложение по системе ортогональных многочленов, если

$$f(x,y) = f_*(x) f_0(y)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\, g_k^{(*)}(x) g_k^{(0)}(y)\right), \qquad (1)$$

где μ_k – некоторая последовательность коэффициентов.

Для ряда двумерных распределений (нормальное, гамма-распределение, распределение Пуассона) такое представление имеет место, при этом последовательность μ_k есть решение проблемы моментов, т.е. μ_k – момент k-го порядка некоторого распределения. Чтобы свести задачу к параметрическому случаю будем использовать распределение, сосредоточенное в одной точке, т.е. в качестве параметра выступает точка, в которой сосредоточено распределение (этот параметр тесно связан с коэффициентом корреляции случайных величин ξ_* и ξ_0).

Для ортогональных многочленов введем обозначения:

$$g_k^{(i)}(x) = \sum_{l=0}^{k} \beta_{k,l}^{(i)} x^l, \quad k = 0,1,2,..., \; i = *,0,$$

$$x^k = \sum_{l=o}^{k} \gamma_{k,l}^{(i)} g_l^{(i)}(x), \qquad k = 1,2,..., \;\; i = *,0.$$

Обозначим также $\quad J_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_k^{(*)}(x) f_*(x) F_*(x)\,dx.$

Теорема 1.1. *Если* $f(x,y)$ *допускает представление (1), то*

$$\mathrm{M}\left(\theta_*^k\right) = \gamma_{k,0}^{(*)} - 2\sum_{l=1}^{k} \gamma_{k,l}^{(*)} J_l, \qquad \mathrm{M}\left(\theta_0^k\right) = \gamma_{k,0}^{(0)} + 2\sum_{l=1}^{k} \mu_l\, \gamma_{k,l}^{(0)} J_l.$$

Отметим одно важное свойство любых распределений, допускающих представление (1), касающееся регрессионной модели этих распределений.

Теорема 1.2. В условиях теоремы 1.1

$$\mathrm{M}\left(\xi_0 \middle| \xi_* = x\right) = \gamma_{1,0}^{(0)} + \mu_1 \gamma_{1,1}^{(0)} g_1^{(*)}(x),$$

$$D\left(\xi_0 \middle| \xi_* = x\right) = \gamma_{2,0}^{(0)} + \mu_1 \gamma_{2,1}^{(0)} g_1^{(*)}(x) + \mu_2 \gamma_{2,2}^{(0)} g_1^{(*)}(x) - \left[\gamma_{1,0}^{(0)} + \mu_1 \gamma_{1,1}^{(0)} g_1^{(*)}(x)\right]^2.$$

Это означает, что для любой модели имеет место линейная регрессия, при этом условная дисперсия является многочленом не выше второй степени.

Далее в 1.3, используя теорему 1.1, приведено новое, более короткое доказательство результатов Карташова Г.Д. для случая, когда совместное распределение наработок ξ_* и ξ_0 описывается двумерным нормальным распределением.

В разделах 1.3, 1.4 для описания совместного распределения наработок ξ_* и ξ_0 используется модель двумерного гамма-распределения

$$f_i(x) = f(x,\alpha_i,\lambda_i) = \begin{cases} \lambda_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1} e^{-\lambda_i x} / \Gamma(\alpha_i), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \;\; i = *,0. \qquad (2)$$

В этом случае совместная плотность распределения $f(x,y)$ допускает представление (1) в том и только том случае, когда[8]

$$\mu_k = \sqrt{\frac{\Gamma(k+\alpha_*)\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_*)\Gamma(k+\alpha_0)}} \int\limits_0^1 t^k d\mu(t), \qquad (\alpha_0 \ge \alpha_*),$$

где $\mu(t)$ - произвольная функция распределения на отрезке [0,1].

---

[8] Griffiths R.C. The canonical correlation coefficients of bivariate gamma distributions // The Annals of Mathematical Statistics. 1969. V.40. P. 1401-1408.

Используя распределение, сосредоточенное в точке ρ, получаем параметрическую модель совместной плотности с

$$\mu_k = \sqrt{\frac{\Gamma(k+\alpha_*)\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_*)\Gamma(k+\alpha_0)}}\,\rho^k, \qquad \rho \in [0,1]. \tag{3}$$

Ортогональные многочлены носят название многочленов Лагерра.

Теорема 1.4. *Если $f(x,y)$ допускает представление (1) с маргинальными плотностями и коэффициентами μ_k, заданными соотношениями (2)-(3), то*

$$\mathrm{M}(\theta_*) = \frac{1}{\lambda_*}\left(\alpha_* - \frac{1}{\mathrm{B}(1/2,\alpha_*)}\right), \quad \mathrm{M}(\theta_0) = \frac{1}{\lambda_0}\left(\alpha_0 + \frac{\rho}{\mathrm{B}(1/2,\alpha_*)}\right),$$

$$D(\theta_*) = \frac{1}{\lambda_*^2}\left(\alpha_* - \frac{1+\mathrm{B}(1/2,\alpha_*)}{\mathrm{B}^2(1/2,\alpha_*)}\right), \quad D(\theta_0) = \frac{1}{\lambda_0^2}\left(\alpha_0 + \frac{2\rho}{\mathrm{B}(1/2,\alpha_*)} - \frac{\rho^2(1+\mathrm{B}(1/2,\alpha_*))}{\mathrm{B}^2(1/2,\alpha_*)}\right),$$

$$\mathrm{Cov}(\theta_*,\theta_0) = \frac{\rho}{\lambda_*\lambda_0\mathrm{B}^2(1/2,\alpha_*)},$$

где $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ *- бета-функция Эйлера.*

Пусть $\overline{\theta}_0$, $\overline{\theta}_*$, s_0^2, s_*^2 и $\overline{\theta_0^0\theta_*^0}$ - выборочные средние, дисперсии и ковариация случайных величин θ_0 и θ_* соответственно. Тогда оценки параметров совместной плотности имеют вид:

$$\widehat{\alpha}_* = T_1^{-1}\left(\frac{\overline{\theta}_*^2}{s_*^2}\right), \quad \widehat{\lambda}_* = \frac{\widehat{\mathrm{B}}\widehat{\alpha}_* - 1}{\widehat{\mathrm{B}}\overline{\theta}_*}, \quad \widehat{\left(\frac{\alpha_0}{\rho}\right)} = \frac{\overline{\theta}_0}{\overline{\theta_*^0\theta_0^0}\widehat{\mathrm{B}}^2\widehat{\lambda}_*} - \frac{1}{\widehat{\mathrm{B}}},$$

$$\widehat{\rho} = \frac{\overline{\theta}_0^2\left(\widehat{\left(\frac{\alpha_0}{\rho}\right)} + \frac{2}{\widehat{\mathrm{B}}}\right)}{s_0^2\left(\widehat{\left(\frac{\alpha_0}{\rho}\right)} + \frac{1}{\widehat{\mathrm{B}}}\right)^2 + \frac{\overline{\theta}_0^2\left(\widehat{\mathrm{B}}+1\right)}{\widehat{\mathrm{B}}^2}},$$

$$\widehat{\alpha}_0 = \widehat{\left(\frac{\alpha_0}{\rho}\right)}\widehat{\rho}, \qquad \widehat{\lambda}_0 = \frac{\widehat{\rho}}{\overline{\theta_*^0\theta_0^0}\widehat{\mathrm{B}}^2\widehat{\lambda}_*},$$

где $T_1(\alpha) = \dfrac{(\alpha\mathrm{B}(1/2,\alpha)-1)^2}{\alpha\mathrm{B}^2(1/2,\alpha) - \mathrm{B}(1/2,\alpha) - 1}$, $\quad \widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{B}(1/2,\widehat{\alpha}_*)$.

Далее в диссертации проанализированы два частных случая:
1) маргинальные распределения имеют общий параметр формы;
2) маргинальные распределения являются экспоненциальными.

В второй главе рассматриваются модели, в которых наработки изделий в нормальном и форсированном режимах описываются дискретными двумерными распределениями, допускающими билинейное разложение по системе ортогональных многочленов.

В 2.1 изложены общие результаты, касающиеся моделей двумерных распределений, допускающих билинейное разложение по системе ортогональных многочленов.

Введем обозначения для маргинальных распределений и совместного распределения наработок изделий в двух режимах:

$$\mathrm{P}(\xi_i = m) = \psi_i(m) \quad (i = *, 0), \qquad \mathrm{P}(\xi_* = m,\ \xi_0 = n) = \psi(m,n).$$

Для дискретной модели отказов, в отличие от непрерывного случая, при динамическом способе переключения с положительной вероятностью *оба* изделия пары могут *одновременно* отказать в форсированном режиме. Если исключить такие исходы эксперимента, то в качестве распределения случайных величин θ_* и θ_0, следует использовать их условное распределение при условии, что $\left\{\xi_*^{(1)} \neq \xi_*^{(2)}\right\}$.

Пусть $g_k^{(i)}(x)$ - ортогональные многочлены с весовой функцией $\psi_i(x)$.

Относительно совместного распределения наработок ξ_* и ξ_0 будем предполагать, что оно допускает билинейное разложение по системе ортогональных многочленов

$$\psi(k,l) = \psi_*(k)\psi_0(l)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s\, g_s^{(*)}(k)\, g_s^{(0)}(l)\right), \tag{4}$$

где μ_k – некоторая последовательность коэффициентов.

Введем следующие обозначения

$$J_s = \sum_{x=0}^{\infty} g_s^{(*)}(x)\psi_*(x)\Psi_*(x), \qquad \widetilde{J}_s = \sum_{t=1}^{\infty} g_s^{(*)}(t)\psi_*(t)\Psi_*(t-1).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если* $f(x,y)$ *допускает представление (4), то*

$$\mathrm{M}\left(\theta_*^k\right) = \gamma_{k,0}^{(*)} - 2\sum_{l=1}^{k} \gamma_{k,l}^{(*)}\, J_l,$$

$$\mathrm{M}\left(\theta_0^k\right) = \gamma_{k,0}^{(0)} + 2\sum_{l=1}^{k} \mu_l\, \gamma_{k,l}^{(0)}\, \widetilde{J}_l.$$

В 2.2 исследуется случай, когда наработки изделий описываются пуассоновским распределением.

$$\mathrm{P}(\xi_i = m) = \psi_i(m) = \psi(m, a_i) = \frac{a_i^m e^{-a_i}}{m!},\ m = 0,1,\ldots,\ i = *, 0. \tag{5}$$

Теорема 2.2. *Если совместное распределение* $\psi(n,m)$ *допускает представление (4) с маргинальными распределениями, заданными соотношением (5), то*

$$\mathrm{M}(\theta_*) = a_* - \frac{2a_* I_1(2a_*)}{e^{2a_*} - I_0(2a_*)}, \qquad \mathrm{M}(\theta_0) = a_0 + \frac{2\rho\sqrt{a_* a_0}\, I_0(2a_*)}{e^{2a_*} - I_0(2a_*)},$$

$$\mathrm{COV}(\theta_*,\theta_0) = \frac{2\rho a_*\sqrt{a_* a_0}}{\left(e^{2a_*} - I_0(2a_*)\right)^2}\left[\left(I_1(2a_*) - I_0(2a_*)\right)e^{2a_*} + I_0^2(2a_*) + I_0(2a_*)I_1(2a_*)\right],$$

где $I_\nu(2a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+\nu}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}$ - *модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента.*

Окончательный вид оценок параметров для пуассоновской модели

$$\hat{a}_* = T_2^{-1}\left(\overline{\theta}_*\right),$$

$$\hat{a}_0 = \overline{\theta}_0 - \frac{\overline{\theta_*^0\theta_0^0} - \left[e^{2\hat{a}_*} - I_0\left(2\hat{a}_*\right)\right]}{a_*\left[\left(I_1(2\hat{a}_*) - I_0(2\hat{a}_*)\right)e^{2\hat{a}_*} + I_0^2(2\hat{a}_*) + I_0(2\hat{a}_*)I_1(2\hat{a}_*)\right]},$$

$$\hat{\rho} = \frac{\left(\overline{\theta}_0 - \hat{a}_0\right)\left[e^{2\hat{a}_*} - I_0\left(2\hat{a}_*\right)\right]}{2\sqrt{\hat{a}_*\hat{a}_0}\, I_0(2\hat{a}_*)},$$

где $T_2(x) = x - \frac{2x\, I_1(2x)}{e^{2x} - I_0(2x)}.$

В 2.3 получены оценки параметров совместного распределения отказов, имеющего в качестве маргинальных геометрическое распределение:

$$\hat{q}_* = \sqrt{\frac{\overline{\theta}_*}{1+\overline{\theta}_*}}, \qquad \hat{q}_0 = \frac{\overline{\theta}_0\hat{q}_*^2 - \overline{\theta_*^0\theta_0^0}\,(1-\hat{q}_*^2)}{\hat{q}_*^2 + \overline{\theta}_0\hat{q}_*^2 - \overline{\theta_*^0\theta_0^0}\,(1-\hat{q}_*^2)},$$

$$\hat{\rho} = \frac{\overline{\theta_*^0\theta_0^0}\left(1-\hat{q}_*\right)\left(1-\hat{q}_0\right)\left(1+\hat{q}_*\right)^2}{\hat{q}_*\sqrt{\hat{q}_*}}.$$

<u>В третьей главе</u> исследуется асимптотическое поведение систем, состоящих из большого количества последовательно соединенных равно надежных элементов при испытаниях систем в двух режимах.

Пусть $(\xi_*^{(i)}, \xi_0^{(i)}),\ i = 1,2,\ldots,n$ - последовательность независимых между собой одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения $f(x,y)$. Случайные величины $\xi_*^{(i)}$ и $\xi_0^{(i)}$ - наработки i-го элемента в режимах ε_* и ε_0 соответственно.

Обозначим через $\xi_* = \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_*^{(i)}$ и $\xi_0 = \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_0^{(i)}$ минимальные члены соответствующих вариационных рядов, а через r - коэффициент корреляции случайных величин ξ_* и ξ_0 (чтобы не усложнять обозначений, зависимость величин ξ_*, ξ_0 и r от n в обозначениях не отражается). Случайные величины ξ_* и ξ_0 являются наработками системы последовательно соединенных элементов в режимах ε_* и ε_0 соответственно. Задача состоит в исследовании асимптотического поведения коэффициента корреляции r, а также отношения ξ_0 / ξ_* при $n \to \infty$.

Пусть k - заданное неотрицательное целое число. Введем следующие предположения:

П1. Функция $f(x,y)=0$ *при всех* $(x,y) \notin D$, *где*

$$D = \{(x,y): \quad \alpha x \le y \le \beta x, \quad x \ge 0\} \qquad \text{(рис.1).}$$

П2. Функция надежности $P(x,y) = \mathrm{P}(\xi_*^{(i)} > x, \xi_0^{(i)} > y)$ *удовлетворяет свойству*

$$\lim_{x \to +\infty} x^{k+2} P(x,0) = \lim_{y \to +\infty} y^{k+2} P(0,y) = 0 .$$

П3. Функция $f(x,y)$ *дифференцируема* k *раз и*

$$d^l f(x,y)\Big|_{(0,0)} = 0, \quad l = 0,1,\dots,k-1, \qquad d^k f(x,y)\Big|_{(0,0)} \ne 0.$$

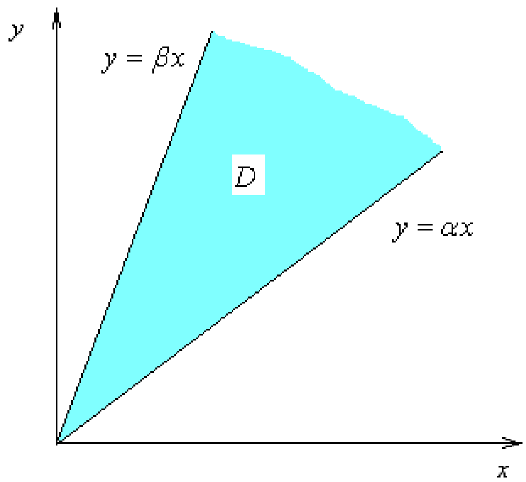


Рис. 1. Носитель совместной плотности распределения отказов

Введем следующие обозначения:

$$b_{k,0} = \frac{1}{(k+2)!}\sum_{l=0}^{k} \beta^{l+1} C_{k+1}^{l+1} \frac{\partial^k \overset{\circ}{f}}{\partial x^{k-l} \partial y^l}, \qquad b_{k,k+2} = \frac{1}{(k+2)!}\sum_{l=0}^{k} \alpha^{-l-1} C_{k+1}^{l+1} \frac{\partial^k \overset{\circ}{f}}{\partial y^{k-l} \partial x^l},$$

$$b_{k,l} = -\frac{C_{k+2}^{l}}{(k+2)!} \frac{\partial^k \overset{\circ}{f}}{\partial x^{k+1-l} \partial y^{l-1}}, \quad l = 1, 2, ..., k+1,$$

$$a_{k,*} = \sum_{l=0}^{k+2} b_{k,l} \alpha^l, \qquad a_{k,0} = \sum_{l=0}^{k+2} b_{k,l} \beta^{l-k-2}, \qquad c_k = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{l=0}^{k+2} b_{k,l}\, t^l \right)^{-2/(k+2)} dt.$$

Здесь для любой функции g принято обозначение $\overset{\circ}{g} = g\big|_{(0,0)}$.

В 3.1 рассматривается случай $k = 1$, в 3.2 - k- произвольное натуральное число.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения П1-П3. Тогда для коэффициента корреляции r_k случайных величин ξ_* и ξ_0 имеет место асимптотическое разложение*

$$r_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+4}{k+2}\right)\left[c_k (a_{k,*} a_{k,0})^{1/(k+2)} + \alpha \left(\frac{a_{k,0}}{a_{k,*}}\right)^{1/(k+2)} + \beta^{-1}\left(\frac{a_{k,0}}{a_{k,*}}\right)^{-1/(k+2)} \right] - 2\Gamma^2\left(\frac{k+3}{k+2}\right)}{2\left[\Gamma\left(\frac{k+4}{k+2}\right) - \Gamma^2\left(\frac{k+3}{k+2}\right)\right]} + o(n^{-1/(k+2)}).$$

В теореме 3.4 исследовано асимптотическое поведение функции распределения отношения наработок $H_k(t) = \mathrm{P}(\,\xi_0 / \xi_1 < t)$.

Теорема 3.4. *В предположениях П1-П3 асимптотическое распределение отношения ξ_0 / ξ_* имеет вид*

$$H_k(t) = \mathrm{P}(\frac{\xi_0}{\xi_*} < t) \approx \frac{\sum_{l=1}^{k+2} (k+2-l)\, b_{k,l}\, \alpha^{l-1}}{(k+2)\sum_{l=0}^{k+2} b_{k,l}\, \alpha^l} - \frac{\sum_{l=1}^{k+2} (k+2-l)\, b_{k,l}\, t^{l-1}}{(k+2)\sum_{l=0}^{k+2} b_{k,l}\, t^l}.$$

На рис.2 показана зависимость плотности $h_k(t) = dH_k(t)/dt$ от t при различных значениях α, β и k. Анализ графиков показывает, что с ростом k распределение отношения ξ_0 / ξ_* локализуется в окрестности своего среднего значения, что влечет за собой уменьшение длины доверительного интервала для коэффициента ускорения испытаний.

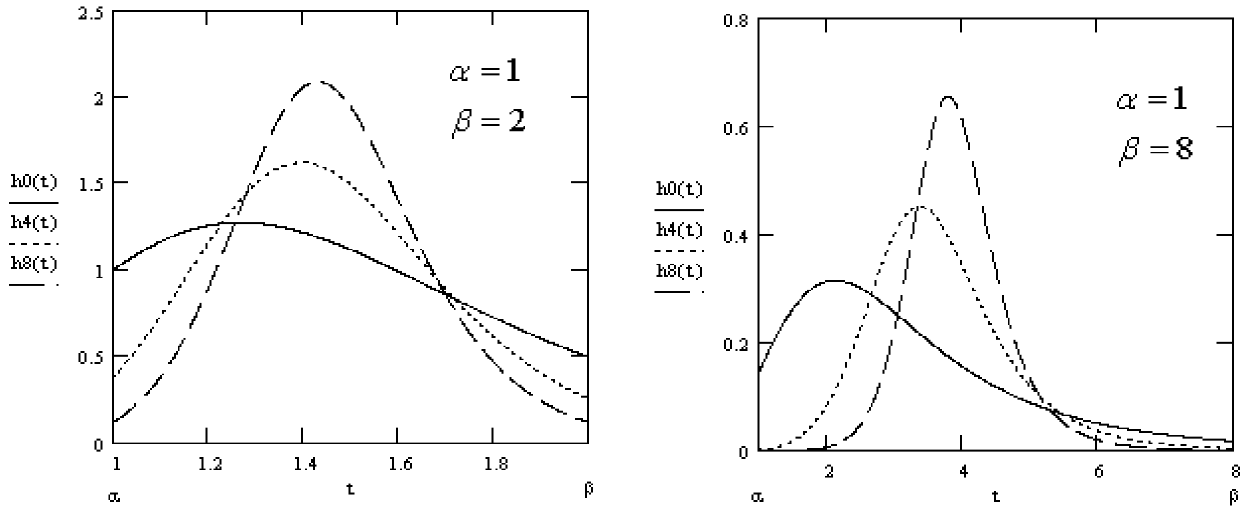


Рис. 2. Графики плотности отношения ξ_0 / ξ_*

Обозначим через $\delta = \sqrt{a\beta}$ усредненный коэффициент ускорения испытаний. В случае $k = 1$ введем дополнительное предположение *П4:*

$$f'_x\big|_{(0,0)} = f'_y\big|_{(0,0)} .$$

Теорема 3.5. *В предположениях П1 –П4 имеет место асимптотическое неравенство*

$$\ln(\delta) \geq \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{\xi_0}{\xi_*}\right)\right] .$$

Этот результат позволяет оценить снизу усредненный коэффициент ускорения по испытаниям систем отдельно в нормальном и форсированном режимах.

<u>В четвертой главе</u> проводится апробация результатов диссертации на примере предварительных испытаний конкретных изделий: универсальные вторичные источники питания (УВИП) (4.1) и конденсаторы (4.2). В частности, при оценке коэффициента ускорения испытаний УВИП параметрическая модель (модель гамма-распределения с общим параметром формы) приводит к следующим доверительным границам:

$\gamma = 0.8$ $\underline{k} = 3.1$; $\overline{k} = 7.8$,

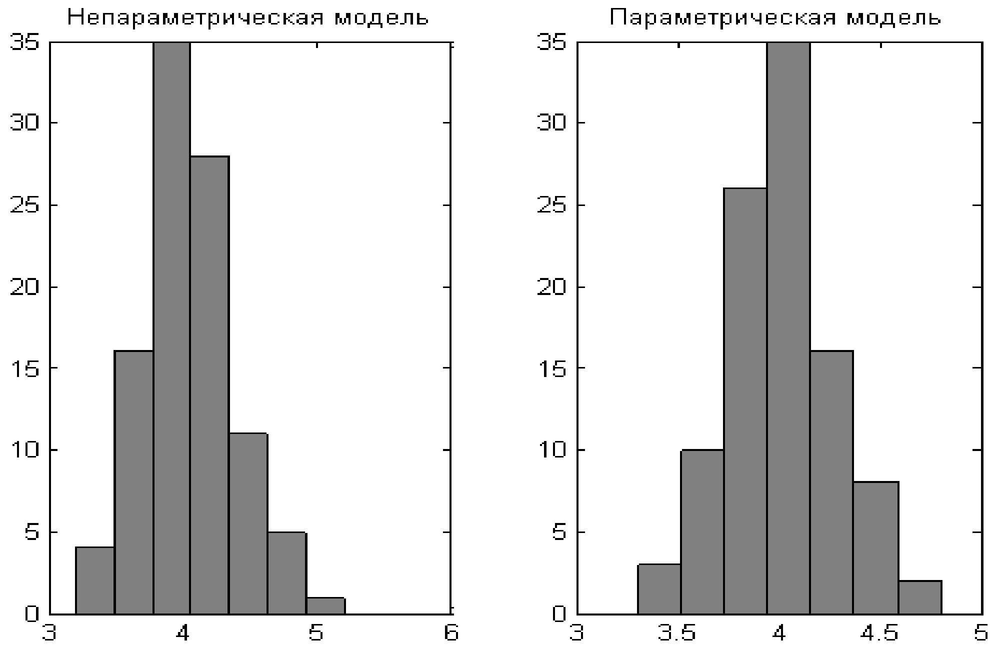
в то время как непараметрические методы оценки[9] - к доверительным границам

$\gamma = 0.8$ $\underline{k}$=2.3; $\overline{k}$= 19.8.

В 4.3 методами статистического моделирования проводится сравнительный анализ методов, изложенных в диссертации, и непараметрических методов оценки коэффициента ускорения.

[9] Тимонин В.И. Модели и методы сокращения объемов и продолжительности форсированных испытаний: Дис. … докт. физ.-мат. наук. М., 2005. 240 с.

При моделировании использовалось значение к=4. На рис. 3 представлены результаты обработки данных, полученных методами статистического моделирования(М- число реализаций, N- объем выборок, Km и Kmp – оценки коэффициента ускорения для непараметрической и параметрической моделей , Dk и Dkp – их дисперсии, α и λ - параметры формы и масштаба гамма распределения).



M = 100 N = 500 $\alpha = 4$ $\lambda = 1$

Km 4.0440 Kmp = 4.0200

Dk = 0.1372 Dkp = 0.0677

Рис. 3. Гистограммы оценок коэффициента ускорения

Результаты моделирования для большого количества различных моделей и различных наборов параметров показывают, что дисперсия оценки коэффициента ускорения параметрическим методом приблизительно в два раза меньше, чем в непараметрическом случае.

В 4.6 найдены оценки коэффициента корреляции наработок больших систем по результатам статистического моделирования большого количества различных распределений. Показано, что результаты, полученные с помощью статистического моделирования, хорошо согласуются с теоретическими результатами главы 3.

В приложении представлены тексты используемых в диссертационной работе программ с комментариями.

В заключение автор хотел бы отметить определяющую роль профессора Геннадия Дмитриевича Карташова, который был первым научным руководителем соискателя. Он же поставил большую часть задач, решенных в диссертации.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Тимонину В.И. за помощь и поддержку в работе, а также профессору

Белову В.Н. за полезные замечания. Также автор благодарна коллективу кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Карташов Г.Д., Сунчалина А.Л. Оценивание взаимной связи между наработками изделий радиоэлектроники в двух режимах // Электронные волны и электронные системы. 2007. №9. С. 4-11.

2. Сунчалина А.Л. Моделирование совместных распределений отказов изделий радиоэлектроники // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С.Попова. М., 2007. С.296-297.

3. Ветров Л.Г., Сунчалина А.Л. Об оценке корреляции между одновременно ненаблюдаемыми наработками изделий радиоэлектроники в двух режимах // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. №2. С. 40-44.

4. Сунчалина А.Л. Об одном классе двумерных распределений с заданными маргинальными распределениями // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Труды второй научно-методической конференции аспирантов и молодых ученых. М., 2008. С.31-35.

5. Сунчалина А.Л. О билинейном разложении для двумерного отрицательного биномиального распределения // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т.16 , №3. С.483-484.