На правах рукописи

ПАЛОШ Виталий Евгеньевич

Исследование устойчивости и анализ управления нелинейных неконсервативных систем

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление
и обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Агафонов Сергей Алексеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Вахрамеев Сергей Александрович
	кандидат физико-математических наук, доцент Щеглов Георгий Александрович
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита состоится «___» ____________ 20 года в ___ ч. ___ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим выслать по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан « ___ » ____________ 20 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.141.15,
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник, доцент Аттетков А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Устойчивость неконсервативных систем — один из разделов механики, имеющий важное практическое значение и вызывавший интерес на протяжении всего минувшего столетия. Задачи исследования устойчивости возникают при рассмотрении систем со следящими и реактивными силами, при проектировании гироскопических устройств, современных конструкций в машиностроении, крупногабаритных космических конструкций. Эти же вопросы появляются и при решении задач управления, поскольку нагрузки, возникающие в объектах систем автоматического регулирования, в большинстве случаев представляют собой неконсервативные силы. Поэтому анализ и обнаружение новых качественных механических эффектов поведения систем под действием неконсервативных нагрузок представляет значительный интерес.

В диссертационной работе рассматривается устойчивость и управление следующими системами: динамически симметричный космический аппарат, солнечный парус, двойной маятник, свободный стержень.

Первые работы по нахождению стационарных режимов динамически симметричного космического аппарата относятся к 1950-1960 гг., среди них можно выделить работы Г.Н. Дубошина, В.Т. Кондураря, Ф.Л. Черноусько. Стабилизации и управлению спутников постоянными внешними моментами посвящены работы А.Д. Герман, С.А. Гутника, В.А. Сарычева. В работе С.А. Агафонова и А.Д. Герман решена задача стабилизации стационарного движения динамически симметричного спутника с помощью приложения внешних моментов. Центр масс спутника движется по круговой орбите. Задача решена в строгой нелинейной постановке. Стабилизирующие внешние моменты формируются по известным значениям компонент угловой скорости спутника, а также по значениям углов Эйлера, полученным из решения задачи Дарбу.

В.А. Сарычевым рассмотрено движение спутника, центр масс которого движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью. Спутник не является динамически симметричным и на него действуют постоянные внешние стабилизирующие моменты.

Динамика систем соединенных тел, находящихся на орбите, представляет большой интерес, поскольку имеет различные практические применения, такие как космические роботы и манипуляторы, телескопы, орбитальные станции и т.д. Первые публикации на эту темы появились в научной литературе в начале 1960-х годов. Отметим работы А. Аннелиси, М. Лаванги, А.К. Мисры, В.А. Сарычева. Существуют также работы, в которых рассматриваются системы, состоящие из произвольного числа материальных точек. В работах А.Д. Герман исследована устойчивость по первому приближению возможных положений равновесия систем такого вида.

Г. Циглер рассмотрел колебания двойного маятника, состоящего из двух невесомых стержней равной длины l и нагруженного на конце следящей силой P. Массы сосредоточены в узлах $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, гравитационные силы отсутствуют, восстанавливающие моменты в шарнирах равны $M_1 = -A\theta_1 - B\dot{\theta}_1$, $M_2 = -A(\theta_2 - \theta_1) - B\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)$.

Был получен неожиданный результат: критическая сила, при которой система теряет устойчивость, с исчезающе малой вязкостью оказалась значительно ниже, чем значение критической силы системы, в которой с самого начала предполагалось отсутствие вязкости. Этот эффект, получивший название парадокса дестабилизации, вызвал большой интерес и способствовал появлению значительного числа публикаций во всем мире.

Парадоксу дестабилизации, возникающему при исследовании устойчивости двойного маятника, посвящены работы С.А. Агафонова, В.В. Болотина, А.П. Сейраняна, П. Хагедорна, Г. Херрманна.

Отметим, что механическая система в виде двойного перевернутого маятника привлекает интерес исследователей как объект автоматического управления. Синтез управления в форме обратных связей по состоянию для таких объектов выполнен в работах А.А. Гришина, П.Д. Крутько, С.А. Решмина, Ф.Л. Черноусько.

Парадокс дестабилизации возникает и при исследовании континуальных моделей стержней. Исследованию устойчивости стержней посвящены работы С.А. Агафонова, В.В. Болотина, Д.В. Георгиевского, Ю.В. Захарова, Г.К. Охоткина, А.П. Сейраняна.

Устойчивость свободного стержня впервые исследовалась в работах К.Н. Гопака и В.И. Феодосьева.

В работе С.А. Агафонова и Г.А. Щеглова рассмотрен свободный стержень с нелинейной вязкостью. Показано, что в этом случае также наблюдается парадокс дестабилизации.

Цель работы — развитие и решение задач управления и устойчивости нелинейных систем, находящихся под действием неконсервативных нагрузок.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы теории устойчивости, теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, теории управления, линейной алгебры, теоретической механики и вычислительной математики.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата и подтверждается результатами численного моделирования.

Научная новизна:

1. В нелинейной постановке решена задача управления стационарным движением вокруг центра масс динамически симметричного космического аппарата, находящегося на круговой орбите, с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих.

2. Получены условия устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий относительного положения равновесия солнечного паруса при заданном управлении.

3. Впервые рассмотрена система, представляющая собой двойной маятник, нагруженный следящей и консервативной силами, в шарнирах которого действуют стабилизирующие моменты. В нелинейной постановке получены условия устойчивости по Ляпунову положения равновесия двойного маятника.

4. В нелинейной постановке решена задача устойчивости прямолинейной формы свободного стержня, на один из концов которого действует постоянная по величине следящая сила, а определяющее соотношение имеет вид $\sigma = E\varepsilon + k_0\dot{\varepsilon} + k_1\varepsilon^2\dot{\varepsilon} + k_2\dot{\varepsilon}^3$.

Научная и практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при разработке алгоритмов управления динамически симметричным космическим аппаратом, при проектировании и исследовании систем со следящими и реактивными силами.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Метод управления стационарным движением динамически симметричного космического аппарата с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих.

2. Условия устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий относительного положения равновесия солнечного паруса при заданном управлении.

3. Условия устойчивости по Ляпунову положения равновесия двойного маятника, нагруженного следящей и консервативной силами, в шарни-

рах которого действуют стабилизирующие моменты.

4. Условия устойчивости по Ляпунову прямолинейной формы свободного стержня, на один из концов которого действует постоянная по величине следящая сила.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы обсуждались на научных семинарах МГТУ им. Н.Э. Баумана и МГУ им. М.В. Ломоносова (2009, 2010), докладывались на Девятой Крымской международной математической школе «Метод функции Ляпунова и его приложения» (Алушта, Украина, 2008), Пятой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2009), Третьей научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей «Актуальные проблемы фундаментальных наук» (Москва, 2009), International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (Киев, Украина, 2009), Четвёртой научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей «Актуальные проблемы фундаментальных наук» (Москва, 2010).

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах, в том числе в 4-х статьях Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий [1, 2, 4, 7] и 5-ти тезисах докладов и трудах конференций [3, 5, 6, 8, 9].

Личный вклад соискателя. Все исследования, представленные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе диссертационной работы. Из совместной публикации в диссертацию включён лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 127 страницах, содержит 40 иллюстраций. Библиография включает 57 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, представлен обзор известных результатов по рассматриваемым в работе задачам, приведены данные о структуре и содержании диссертации.

В первой главе решается задача управления движением динамически симметричного космического аппарата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$. Два главных центральных момента равны $A = B$, момент инерции относительно оси симметрии равен C. За обобщенные координаты приняты углы Эйлера θ, φ, ψ.

После исключения циклической координаты φ уравнения движения спутника сводятся к виду

$$\begin{cases} A\Big(\ddot\theta - \dot\psi^2 \sin\theta\cos\theta + \omega_0\dot\psi\cos\psi - \omega_0\dot\psi\cos 2\theta\cos\psi + \\ \qquad +\omega_0^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi\Big) + C\Omega\left(\dot\psi\sin\theta + \omega_0\cos\theta\cos\psi\right) - \\ \qquad\qquad -3\omega_0^2(C-A)\sin\theta\cos\theta = M_\theta, \\ A\Big(\ddot\psi\sin^2\theta + \dot\psi\dot\theta\sin 2\theta + \omega_0\dot\theta\cos 2\theta\cos\psi - \omega_0\dot\theta\cos\psi - \\ \qquad -\omega_0^2\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi\Big) - C\Omega\left(\dot\theta\sin\theta + \omega_0\sin\theta\sin\psi\right) = M_\psi, \end{cases} \tag{1}$$

где $C\Omega$ — циклическая постоянная; M_θ и M_ψ — стабилизирующие внешние моменты, формирующиеся следующим образом:

$$\begin{cases} M_\theta = A\omega_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0\cos^2\psi_0 + C\Omega\omega_0\cos\theta_0\cos\psi_0 - \\ \qquad -3\omega_0^2(C-A)\sin\theta_0\cos\theta - \Gamma_1\dot\theta^3, \\ M_\psi = -A\omega_0^2\sin^2\theta_0\sin\psi_0\cos\psi_0 - C\Omega\omega_0\sin\theta_0\sin\psi_0 - \Gamma_2\dot\psi^3, \end{cases}$$

где $\Gamma_1 \geq 0$ и $\Gamma_2 \geq 0$ — постоянные коэффициенты.

При таком выборе управляющих моментов система уравнений (1) имеет в орбитальной системе координат положение равновесия $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0$, $\dot\theta = \dot\psi = 0$. Ранее в нелинейной постановке задача не рассматривалась.

Уравнения первого приближения, записанные в матричном виде

$$Mx'' + Gx' + Kx = 0, \tag{2}$$

$$x = (\theta-\theta_0, \psi-\psi_0)^T,\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta_0 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Если матрица K положительно определена, то положение равновесия $x = 0$ системы (2) устойчиво.

Если матрица K отрицательно определена, то устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы (2) зависит от матрицы G, поскольку в этом случае степень неустойчивости системы четна.

Если матрица K не является знакоопределённой, то положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

В случае устойчивости положения равновесия $x = 0$ характеристическое уравнение системы первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$.

Если в системе нет резонансов третьего и четвертого порядков ($\omega_2 \neq 2\omega_1$ и $\omega_2 \neq 3\omega_1$), то систему уравнений можно привести к нормальной форме

$$\begin{cases} w_1' = i\omega_1 w_1 + A_{11} w_1^2 \overline{w}_1 + A_{12} w_1 w_2 \overline{w}_2 + \ldots, \\ w_2' = i\omega_2 w_2 + A_{21} w_1 w_2 \overline{w}_1 + A_{22} w_2^2 \overline{w}_2 + \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

где многоточие — слагаемые не ниже пятого порядка малости.

По теореме Каменкова нулевое положение равновесия системы (3) асимптотически устойчиво при одновременном выполнении трех условий: 1) $\mathrm{Re}\ A_{11} < 0$, 2) $\mathrm{Re}A_{22} < 0$, 3) если $\mathrm{Re}A_{12} > 0$ и $\mathrm{Re}A_{21} > 0$, то $\Delta = \mathrm{Re}A_{11}\mathrm{Re}A_{22} - \mathrm{Re}A_{12}\mathrm{Re}A_{21} > 0$. Положение равновесия неустойчиво при строгом нарушении знака, по крайней мере в одном из условий 1) – 3).

Численный анализ коэффициентов A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} показал, что в области, где K отрицательно определена, условия теоремы Каменкова нарушаются всегда, при любом выборе коэффициентов Γ_1 и Γ_2.

В области, где K положительно определена, при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ относительное равновесие неустойчиво, т.е. стабилизировать космический аппарат постоянными моментами нельзя. При этом всегда можно выбрать такие коэффициенты Γ_1 и Γ_2, что условия теоремы Каменкова будут выполняться.

При резонансе третьего порядка ($\omega_2 = 2\omega_1$) положение равновесия является неустойчивым.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости равновесия солнечного паруса он представляет собой механическую систему, состоящую из двух невесомых стержней A_0A_1 и A_1A_2 одинаковой длины a. В точках A_0, A_1, A_2 расположены три одинаковые массы m. Движение системы происходит в плоскости xoz. Управляющим воздействием является следящая сила $\overline{F}$, с которой на солнечный парус MN действуют солнечные лучи. Направление этой силы всё время движения совпадает с направлением стержня A_0A_1. Положение системы $A_0A_1A_2$ определяется двумя углами θ_1 и θ_2 (рис. 1). Центр масс C в орбитальной системе xoz имеет координаты x_c, z_c. В нелинейной постановке задача рассматривается впервые.

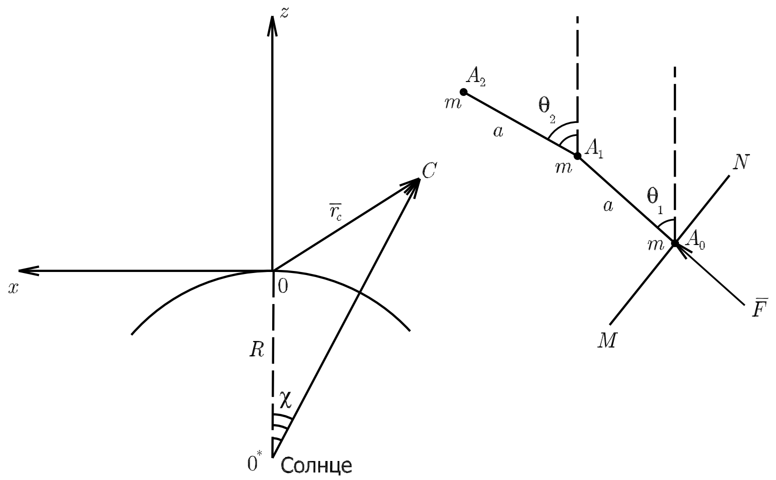

Рис. 1. Солнечный парус

У солнечного паруса существуют положения равновесия

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0, \tag{4}$$

$$x_c = z_c = 0,\ \dot{x}_c = \dot{z}_c = 0.$$

Из системы первого приближения найдены условия устойчивости положения равновесия (4)

$$\begin{cases} \beta < 3 + \frac{7}{9}\alpha, \\ \beta \neq 2 + \frac{4}{9}\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha = \dfrac{F}{\omega^2 mR},\ \beta = \dfrac{F}{\omega^2 ma}$.

Положение равновесия $x_c = 0,\ \dot{x}_c = 0$ устойчиво по первому приближению, если параметры α и β удовлетворяют системе (5). Решение $z_c = 0$, $\dot{z}_c = 0$ неустойчиво.

При выполнении условий (5) характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_{1,2}$. Если в системе нет резонансов третьего и четвертого порядков ($\omega_2 \neq 2\omega_1$ и $\omega_2 \neq 3\omega_1$), то систему уравнений можно привести к нормальной форме

$$\begin{cases} w_1' = i\omega_1 w_1 + A_{11} w_1^2 \overline{w}_1 + A_{12} w_1 w_2 \overline{w}_2 + \ldots, \\ w_2' = i\omega_2 w_2 + A_{21} w_1 w_2 \overline{w}_1 + A_{22} w_2^2 \overline{w}_2 + \ldots. \end{cases} \tag{6}$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22} являются чисто мнимыми, поэтому невозможно доказать устойчивость или неустойчивость по Ляпунову.

По теореме Бибикова-Плисса, если определитель $\Delta = \mathrm{Im}A_{11}\mathrm{Im}A_{22} - \mathrm{Im}A_{12}\mathrm{Im}A_{21} \neq 0$, то нулевое положение равновесия системы (6) устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

При резонансе третьего порядка $\omega_2 = 2\omega_1$ положение равновесия является неустойчивым.

В третьей главе рассматривается устойчивость двойного маятника, представляющего собой систему двух невесомых стержней CD и DE длиной l (рис. 2). В шарнирах действуют стабилизирующие моменты $M_1 = -A\theta_1 - B\dot{\theta}_1,\ M_2 = -A(\theta_2 - \theta_1) - B\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)$. В шарнире D и на свободном конце E расположены две одинаковые массы m. Гравитационные силы отсутствуют. На свободный конец маятника E действует следящая сила $\overline{P}$, направление которой во всё время движения совпадает с направлением стержня DE. На шарнир D действует консервативная сила $\overline{F}$, всегда направленная вертикально вниз. При наличии консервативной силы устойчивость двойного маятника ранее не рассматривалась.

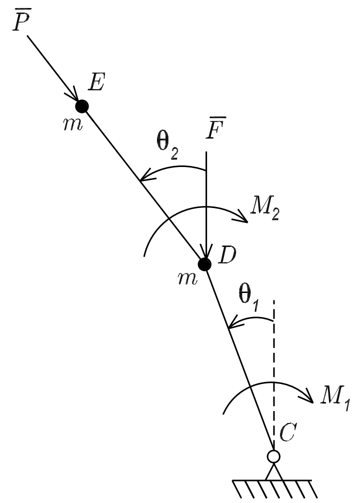

Рис. 2. Двойной маятник под действием консервативной F и следящей P сил

Исследуется устойчивость положения равновесия замкнутой системы

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0. \tag{7}$$

С помощью теоремы Рауса-Гурвица найдены условия асимптотической устойчивости положения равновесия (7)

$$\begin{cases} f < 1, \\ p < \frac{1}{12-6f}\left(6b^2 - 3b^2 f + \frac{5}{2}f^2 - 4f + 16\right), \end{cases}$$

где $p = \dfrac{Pl}{A},\ f = \dfrac{Fl}{A},\ b = \dfrac{B}{\sqrt{Aml^2}}$ - безразмерные параметры.

При этом возможны ситуации, когда характеристическое уравнение имеет один нулевой корень и три корня с отрицательными действительными частями, пару чисто мнимых корней и два корня с отрицательными частями, один нулевой корень, пару чисто мнимых корней и один корень с отрицательной действительной частью.

Задача устойчивости в критическом случае одного нулевого корня эквивалентна задаче устойчивости для уравнения

$$x_1' = A_2 x_1^3 + \ldots,\ A_2 < 0.$$

Коэффициент при x_1^3 отрицательный, поэтому положение равновесия (7) асимптотически устойчиво.

В случае пары чисто мнимых корней задача устойчивости сводится к системе:

$$\begin{cases} v' = i\lambda v + A_3 v^2 w + \ldots, \\ w' = -i\lambda w + \overline{A}_3 v w^2 + \ldots. \end{cases}$$

Устойчивость положения равновесия (7) определяется знаком $\mathrm{Re}A_3$. Если $\mathrm{Re}A_3 < 0$, то положение равновесия асимптотически устойчиво; при $\mathrm{Re}A_3 > 0$ положение равновесия неустойчиво. В диссертационной работе проводится исследование знака величины $\mathrm{Re}A_3$.

Задачу устойчивости в критическом случае устойчивости пары чисто мнимых корней и одного нулевого корня можно свести к системе:

$$\begin{cases} v' = C_1 v^3 + C_2 v\rho^2 + U_*(\vartheta, v, \rho) = U_*^{(3)}(v, \rho) + U_*(\vartheta, v, \rho), \\ \rho' = \mathrm{Re}\ C_3 v^2 \rho + \mathrm{Re}\ C_4 \rho^3 + R(\vartheta, v, \rho) = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = R^{(3)}(v, \rho) + R(\vartheta, v, \rho), \end{cases}$$

и уравнению

$$\vartheta' = \tilde{\lambda} + \mathrm{Im}\ C_3 v^2 \rho + \mathrm{Im}\ C_4 \rho^3 + \theta(\vartheta, v, \rho).$$

Рассмотрим две формы $G(v,\rho)=vR^{(3)}-\rho U_*^{(3)},\ P(v,\rho)=vU_*^{(3)}+\rho R^{(3)}$. Положение равновесия (7) будет неустойчиво, если существует хотя бы одна вещественная прямая, задаваемая уравнением $G(v,\rho)=0$, на которой $P(v,\rho)$ может принимать положительные значения. Уравнение $G(v,p)=0$ задает прямую $v=0$.

$$P(0,\rho)=\operatorname{Re}\,C_4\rho^4.$$

$\operatorname{Re}\,C_4>0$, следовательно, нулевое положение равновесия неустойчиво.

Четвертая глава посвящена исследованию устойчивости прямолинейной формы свободного стержня длины l, на один из концов которого действует постоянная по величине следящая сила $\overline{P}$. Определяющее соотношение имеет вид $\sigma=E\varepsilon+k_0\dot{\varepsilon}+k_1\varepsilon^2\dot{\varepsilon}+k_2\dot{\varepsilon}^3$, где E – модуль Юнга, k_0,k_1,k_2 – коэффициенты внутренней вязкости, σ — напряжение, ε — деформация. При указанном определяющем соотношении задача рассматривается впервые.

Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+k_0J\frac{\partial^5 V}{\partial x^4\partial t}+k_1I\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial t}\right)+$$
$$+k_2I\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial t}\right)^3+\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{l-x}{l}\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\rho f\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0,$$

где ρ – плотность материала стержня, f – площадь поперечного сечения, $J=\int\limits_{\Sigma}y^2d\Sigma,\ I\ =\ \int\limits_{\Sigma}y^4d\Sigma$, Σ – постоянное поперечное сечение стержня.

Граничные условия

$$\frac{\partial^2 V(t,0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 V(t,0)}{\partial x^3}=0,\ \frac{\partial^2 V(t,l)}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 V(t,l)}{\partial x^3}=0$$

соответствуют свободным концам стержня.

Решение уравнения колебаний стержня ищется в следующем виде:

$$v(\tilde{x},\tau)=u_1(\tau)\varphi_1(\tilde{x})+u_2(\tau)\varphi_2(\tilde{x}),$$

где $\tilde{x}=\dfrac{x}{l},\ \tau=\sqrt{\dfrac{EJ}{\rho f}}\dfrac{t}{l^2}$ — безразмерные величины.

$$\varphi_k(\tilde{x})=C_1\cos\delta_k\tilde{x}+C_2\sin\delta_k\tilde{x}+C_3\operatorname{ch}\delta_k\tilde{x}+C_4\operatorname{sh}\delta_k\tilde{x}.$$

δ_k задаются уравнением $\operatorname{ch}\delta_k \cos\delta_k = 1,\ k = 1, 2.$

Функции $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + a_0\delta_1^4\dot{u}_1 + (\delta_1^4 + e_{11}p)u_1 + p(e_{12} - \alpha_{12})u_2 + X_1(a_1, a_2, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = 0, \\ \ddot{u}_2 + a_0\delta_2^4\dot{u}_2 + (\delta_2^4 + e_{22}p)u_2 + p(e_{21} - \alpha_{21})u_1 + X_2(a_1, a_2, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = 0, \end{cases}$$

где $X_1(a_1, a_2, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)$ и $X_2(a_1, a_2, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)$ — слагаемые не ниже третьего порядка малости, а безразмерные параметры задаются формулами

$$a_0 = \frac{k_0}{l^2}\sqrt{\frac{J}{\rho f E}},\ a_1 = \frac{k_1 I}{l^4\sqrt{\rho f E J}},\ a_2 = \frac{k_2 I}{l^8}\sqrt{\frac{EJ}{(\rho f)^3}},\ p = \frac{Pl^2}{EJ}.$$

Исследуется устойчивость положения равновесия

$$u_1 = u_2 = 0,\ \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0.$$

При $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ находится такое $p^* \approx 116{,}097$, что при $0 < p < p^*$ положение равновесия системы системы первого приближения устойчиво.

При $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ с помощью теоремы Рауса-Гурвица при каждом конкретном значении a_0 можно определить такое значение $\tilde{p}$, что при $0 < p < \tilde{p}$ положение равновесия системы первого приближения будет асимптотически устойчивым.

Интерес представляет предельное значение, $\lim\limits_{a_0 \to 0} \tilde{p} = 94{,}564 \neq p^*$, то есть значение критической силы при коэффициенте a_0, стремящимся к нулю, не совпадающее с её же значением при $a_0 = 0$.

При $p = \tilde{p}$ характеристическое уравнение системы первого приближения имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$.

Задача устойчивости сводится к системе:

$$\begin{cases} v' = i\lambda v + A_3 v^2 w + \ldots, \\ w' = -i\lambda w + \overline{A}_3 v w^2 + \ldots. \end{cases}$$

Устойчивость положения равновесия определяется знаком величины $\mathrm{Re}A_3$. В диссертационной работе показано, что $\mathrm{Re}A_3 > 0$ при любых значениях a_0, a_1, a_2. Следовательно, положение равновесия системы в критическом случае пары чисто мнимых корней неустойчиво.

Выводы и основные результаты работы

1. Для динамически симметричного космического аппарата решена задача стабилизации относительного положения равновесия с помощью предложенного управления. В линейной постановке получены условия стабилизации постоянными моментами. В нелинейной постановке показана невозможность стабилизации постоянными внешними моментами, получены условия стабилизации внешними моментами с добавлением нелинейных составляющих.

2. В линейной постановке получены условия устойчивости положения равновесия солнечного паруса. В нелинейной постановке найдены условия устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

3. Проведено исследование устойчивости положения равновесия двойного маятника, нагруженного следящей и консервативной силами, в шарнирах которого действуют стабилизирующие моменты. Получены условия устойчивости при следующих критических случаях устойчивости: одного нулевого корня, пары чисто мнимых корней, одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней.

4. Для свободного стержня, на один из концов которого действует постоянная по величине следящая сила, показано, что значение критической силы при наличии внутренней вязкости всегда меньше, чем при отсутствии таковой. Найдено предельное значение следящей силы при стремлении коэффициента вязкости к нулю и исследовано поведение действительных частей корней характеристического уравнения в зависимости от ее величины. При критическом случае устойчивости пары чисто мнимых корней доказана неустойчивость.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. **Палош В.Е. Исследование устойчивости свободного вязкоупругого стержня под действием следящей силы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 4. С. 72-78.**

2. **Палош В.Е. Устойчивость двойного маятника с вязкоупругими элементами, нагруженного следящей и консервативными силами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 1. С. 87-98.**

3. Палош В.Е. Устойчивость двойного маятника с вязкоупругими элементами, нагруженного следящей и консервативными силами // Метод функции Ляпунова и его приложения: Тезисы докладов Девятой Крымской международной математической школы. Алушта, 2008. С. 129.

4. **Палош В.Е. Исследование динамики двойного маятника со следящей и консервативной силами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 3. С. 64-74.**

5. Палош В.Е. Стабилизация внешними моментами искусственного спутника земли // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Пятой Всероссийской конференции. М., 2009. С. 125-128.

6. Палош В.Е. Стабилизация динамически симметричного спутника с помощью внешних моментов // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов Третьей научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. М., 2009. С. 45-49.

7. **Крутько П.Д., Палош В.Е. Стабилизация состояний равновесия двойного маятника, нагруженного следящей и консервативной силами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 3-17.**

8. Палош В.Е. Стабилизация внешними моментами искусственного спутника земли // Dynamical System Modeling and Stability Investigation: Thesis of Conference Reports International Conference. Kyiv, 2009. С. 150.

9. Палош В.Е. Исследование устойчивости относительного положения равновесия солнечного паруса // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов Четвёртой научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей. М., 2010. С. 29-30.