

На правах рукописи

ТОКАРЕВА Светлана Андреевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА
НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА**

Специальность:

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук



Москва — 2010

Диссертационная работа выполнена на кафедре прикладной математики
Московского государственного технического университета
имени Н. Э. Баумана

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор Галанин Михаил Павлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Гасилов Владимир Анатольевич

доктор физико-математических наук,
профессор Мухин Сергей Иванович

Ведущая организация: Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Защита состоится «28» декабря 2010 г. в ____ час. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертационной работой можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан « ____ » ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Аttetков А. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование течений жидкости и газа является важнейшим элементом решения сложных инженерных задач. Основным инструментом моделирования таких течений является вычислительный эксперимент. При рассмотрении реальных технических устройств, как правило, приходится работать с очень сложной геометрией, что приводит к необходимости использования в расчетах неструктурированных сеток.

Одним из главных требований, предъявляемых к методам решения задач газовой динамики, является правильность воспроизведения решения в областях, где оно претерпевает сильные изменения во времени и пространстве, в частности, на ударных волнах, волнах разрежения и контактных разрывах.

Зачастую повышение порядка метода связано с расширением шаблона аппроксимации, что может отрицательно сказаться на качестве решения на неструктурированных сетках, а также вычислительных затратах метода. Поэтому предпочтительным является использование в расчетах численных методов, обладающих высоким порядком аппроксимации и сохраняющих при этом компактность шаблона аппроксимации. Одним из таких методов является метод RKDG (Runge–Kutta discontinuous Galerkin), развитию и применению которого посвящена настоящая работа.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является развитие RKDG-метода, его оптимизация, разработка и применение основанного на нем программного комплекса для математического моделирования процессов газовой динамики и динамики двухфазных сред.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1. Реализация алгоритма RKDG-метода для решения одномерного квазилинейного уравнения переноса и создание основы программного комплекса. Проверка реализованного алгоритма и программного комплекса с использованием как известных в литературе, так и специально созданных тестовых задач.

2. Реализация алгоритма RKDG-метода для решения двумерных уравнений Эйлера и создание программного комплекса для численного решения задач идеальной газовой динамики. Проверка реализованного алгоритма и программного комплекса на примере известных тестовых задач

и сравнение различных вариантов RKDG-метода с другими известными методами.

3. Реализация алгоритма RKDG-метода для решения двумерных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа и расширение программного комплекса для учета вязкости и теплопроводности среды. Тестирование реализованного алгоритма на задачах обтекания различных профилей и сравнение полученных в результате вычислительного эксперимента аэродинамических коэффициентов с экспериментальными данными.

4. Оптимизация параметров алгоритма монотонизации численного решения и анализ эффективности монотонизации как элемента RKDG-метода.

5. Разработка и программная реализация параллельного алгоритма RKDG-метода, анализ его эффективности на различных типах вычислительных систем.

6. Разработка численного метода HLLC решения задачи Римана для уравнений Баера–Нунциато, описывающих динамику двухфазных сред, разработка численного потока типа HLLC. Сравнительный анализ эффективности RKDG-метода с потоком типа HLLC.

Методы исследования. Основным методом исследования задач, поставленных в работе, является вычислительный эксперимент.

Научная новизна. Работа посвящена развитию RKDG-метода применительно к решению квазилинейного уравнения переноса и задач газовой динамики, включая задачи моделирования потоков как идеального, так и вязкого теплопроводного газа, а также задачи динамики двухфазных сред.

Для уравнений Эйлера, описывающих динамику идеального газа, проведен детальный сравнительный анализ RKDG-метода с другими известными методами, такими как метод конечных объемов с численными потоками годуновского типа, а именно: потоками Куранта–Изаксона–Риса (КИР), Лакса–Фридрихса и потоками типа Хартена–Лакса–ван Лира (HLL и HLLC). Исследована эффективность применения RKDG-метода для решения системы уравнений динамики вязкого теплопроводного газа.

Разработана модификация RKDG-метода, позволяющая автоматически оптимизировать параметры монотонизатора решения в процессе расчетов, адаптируя их к локальным особенностям решения. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием предложенного алгоритма монотонизации и стандартного алгоритма, использующего фиксированные

параметры ограничителя.

Разработан параллельный алгоритм RKDG-метода, имеющий в своей основе принцип разделения расчетной области по количеству имеющихся вычислительных узлов. Представлены результаты распараллеливания RKDG-метода, проведен анализ эффективности созданного параллельного алгоритма на различных типах вычислительных систем.

В рамках работы изучено расширение области применения RKDG-метода на решение неконсервативных гиперболических систем. В качестве примера исследована система уравнений Баера–Нунциато, описывающая движения двухфазной среды без учета фазовых переходов. Разработан численный поток типа HLLC, основанный на аппроксимации задачи Римана для уравнений Баера–Нунциато, который затем использован при построении численных схем метода конечных объемов, RKDG-метода и РС-метода (англ. path-conservative). Результирующие схемы проверены на специально подобранных тестовых задачах, сделаны соответствующие выводы о работоспособности RKDG-метода по сравнению с другими методами решения неконсервативных систем.

Практическая ценность диссертационной работы связана с её прикладной ориентацией, а созданные программные комплексы могут быть использованы для численного моделирования течений жидкости и газа, вычисления аэродинамических нагрузок, численного моделирования динамики многофазных сред.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Оптимизированный алгоритм RKDG-метода с возможностью пространственно-временной адаптации монотонизатора к особенностям решения.

2. Алгоритм численного решения задачи Римана для уравнений Баера–Нунциато. Применение численного потока на его основе в методах конечных объемов, РС и RKDG.

3. Параллельный алгоритм RKDG-метода.

4. Применение программного комплекса на основе RKDG-метода для расчета течений жидкости и газа, определения аэродинамических характеристик профилей и моделирования динамики двухфазных сред.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на XVI-й Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева (Санкт-Петербург, 2007), Меж-

дународной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2008), XII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2008), 5-й Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2009), Международной конференции по вычислительному тепло- и массообмену (Гуанчжоу, Китай, 2009), 17-й Международной конференции по математической физике (Прага, Чехия, 2009), 6-й Международной конференции по вычислительной газовой динамике (Санкт-Петербург, 2010).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2 препринтах [1,2], 6 научных статьях [3-8], в том числе в 5 статьях из Перечня рецензируемых ведущих научных журналов и изданий [3-7], и 10 тезисах и докладах конференций [9-18].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, общих выводов и списка литературы. Работа изложена на 141 странице, содержит 96 иллюстраций и 24 таблицы. Список литературы включает 110 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проведен обзор литературы по теме исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В **первой главе** рассмотрен алгоритм RKDG-метода для численного решения одномерных гиперболических уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T]; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in (0, L), \end{aligned} \quad (1)$$

с необходимыми граничными условиями.

Алгоритм RKDG-метода состоит в следующем. После введения в расчетной области $(0, L)$ равномерной сетки с узлами $\{x_{j+1/2}\}$, $j = 0, \dots, N$

и шагом $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ на каждом интервале $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, $j = 1, \dots, N$ выбирается система базисных функций, например, ортогональная система функций $\{\varphi_l(x)\}$, $l = 0, \dots, k$:

$$\varphi_l(x) = P_l \left(\frac{2(x - x_j)}{\Delta_j} \right), \quad x_j = \frac{x_{j+1/2} + x_{j-1/2}}{2},$$

где P_l — полином Лежандра степени l .

Тогда для $x \in I_j$ приближенное решение уравнения (1) $u_h(x, t)$ может быть найдено в виде разложения по выбранному базису:

$$u_h(x, t) = \sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x).$$

Умножение исходного уравнения (1) на базисную функцию $\varphi_l(x)$ с последующим интегрированием по отрезку I_j и заменой функции $u(x, t)$ ее аппроксимацией $u_h(x, t)$ дает для $\forall j = 1, \dots, N$, $\forall l = 0, \dots, k$:

$$\frac{1}{2l+1} \frac{du_j^l(t)}{dt} - \frac{1}{\Delta_j} \int_{I_j} f(u_h) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} dx + \frac{1}{\Delta_j} [h_{j+1/2} - (-1)^l h_{j-1/2}] = 0;$$

$$u_j^l(0) = \frac{2l+1}{\Delta_j} \int_{I_j} u_0 \varphi_l dx,$$

где $h_{j+1/2}$ — некоторая аппроксимация потока через границу вычислительной ячейки. Для решения полученной системы ОДУ может быть использован метод Рунге-Кутты порядка $(k+1)$ с монотонизацией решения на каждом промежуточном шаге; результирующая схема в этом случае обладает порядком аппроксимации $(k+1)$ по пространству и по времени.

В диссертационной работе RKDG-метод применен к решению задачи Коши для квазилинейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, T]$$

с финитными начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$ различного вида. Проанализирована эффективность RKDG-метода по сравнению с другими известными численными методами решения данной задачи.

Рассмотрен алгоритм RKDG-метода для решения гиперболических систем уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x),$$
(2)

с необходимыми граничными условиями, где $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_n]^T$ — вектор консервативных переменных, а $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ — тензор потоков, который можно представить в виде $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \mathbf{F}_2(\mathbf{U})]^T$, где $\mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = [f_{11}(\mathbf{U}), \dots, f_{n1}(\mathbf{U})]$ и $\mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = [f_{12}(\mathbf{U}), \dots, f_{n2}(\mathbf{U})]$, а n — размерность системы.

Пусть T_h — разбиение рассматриваемой области Ω на треугольники. Для получения RKDG-метода $(k+1)$ -го порядка аппроксимации по пространству на каждом элементе $K \in T_h$ вводится конечноэлементный базис степени k $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, m$, а приближенное решение \mathbf{U}_h системы (2) в каждой вычислительной ячейке представляется в виде разложения по базису:

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mathbf{U}_j(t) = [u_1^j(t), \dots, u_n^j(t)]^T$.

Домножив каждое уравнение системы (2) на базисную функцию $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$ и проинтегрировав результат по ячейке K заданной расчетной сетки, с учетом представления приближенного решения (3) получим систему ОДУ для определения неизвестных коэффициентов разложения $u_l^j(t)$, $l = 1, \dots, n$, :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{du_l^j(t)}{dt} \int_K \varphi_i \varphi_j dV &= \int_K \mathbf{f}_l(\mathbf{U}_h) \cdot \nabla \varphi_i dV - \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K}^l \varphi_i d\Gamma; \\ \sum_{j=1}^m u_l^j(0) \int_K \varphi_i \varphi_j dV &= \int_K u_{0l} \varphi_i dV, \quad \forall K \in T_h, \end{aligned} \quad (4)$$

где $h_{e,K}$ — аппроксимация потока через грань e ячейки K , зависящая от значения приближенного решения внутри ячейки K и внутри ячейки, соседней с K по грани e .

Для решения системы (4) используется явный $(k+1)$ -шаговый метод Рунге-Кутты, что в результате дает RKDG-метод $(k+1)$ -го порядка аппроксимации по пространству и времени. На каждом промежуточном шаге метода Рунге-Кутты применяется процедура монотонизации решения, которая реализуется для проекции приближенного решения на пространство кусочно-линейных функций.

В диссертационной работе RKDG-метод использован для численного решения уравнений Эйлера. Эффективность метода по сравнению с другими распространенными численными методами показана на примере несколь-

ких тестовых задач. В качестве примера на рис. 1 представлены результаты моделирования течения газа в канале клинообразной формы методом конечных объемов и RKDG-методом при использовании одной и той же расчетной и сетки и аппроксимации численных потоков HLLC. Видно, что RKDG-метод обеспечивает существенно лучшее качество передачи структур решения.

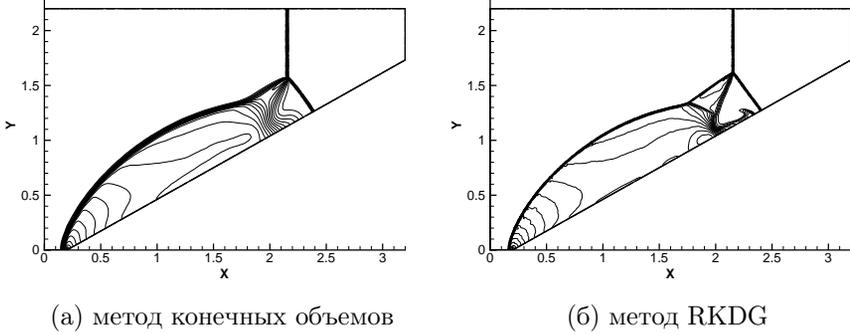


Рис. 1. Результаты расчетов на сетке с характерным размером 1/120

Во **второй главе** рассмотрено расширение области применения RKDG-метода для численного решения уравнений конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial r_s(u, \nabla u)}{\partial x_s}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]; \quad (5)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

с необходимыми граничными условиями, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \equiv (x, y)$, векторы $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ образуют невязкие потоки, а векторы $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ — вязкие потоки.

Для решения уравнения (5) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка. Для этого вводятся дополнительные переменные: $q_1 = \partial u / \partial x_1$, $q_2 = \partial u / \partial x_2$.

Тогда исходную систему (5) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(u) = \nabla \cdot \mathbf{r}(u, q_1, q_2); \quad (6)$$

$$q_1 = \nabla \cdot \mathbf{Q}_1(u); \quad q_2 = \nabla \cdot \mathbf{Q}_2(u),$$

где $\mathbf{Q}_1 = (u, 0)^T$, $\mathbf{Q}_2 = (0, u)^T$. Для решения системы (6) применяется RKDG-метод, как было указано ранее.

В работе предложен модифицированный алгоритм RKDG-метода, позволяющий автоматически подбирать определяющий параметр Φ монотонизатора (лимитера), используемого на промежуточных этапах метода Рунге-Кутты решения системы ОДУ после пространственной дискретизации согласно RKDG-методу. Лимитер для кусочно-линейных функций базируется на вычислении допустимых скачков функции численного решения u_h в центрах ребер \mathbf{m}_i , $i = 1, 2, 3$, треугольника K_0 с центром масс в точке \mathbf{b}_0 :

$$\Delta_i = \bar{m}(\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), \nu \Delta \bar{u}(\mathbf{m}_i, K_0), \Phi), \quad (7)$$

где $\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0) = u_h(\mathbf{m}_i) - \bar{u}_{K_0}$ — скачок численного решения в центре i -го ребра треугольника K_0 , а \bar{u}_{K_0} — среднее значение численного решения по треугольнику K_0 .

Функция \bar{m} в (7) соответствует модифицированной функции minmod :

$$\bar{m} = \begin{cases} \tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), & \text{если } |\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0)| < \Phi; \\ m(\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), \nu \Delta \bar{u}(\mathbf{m}_i, K_0)), & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8)$$

а функция m — стандартная функция minmod :

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min(|a_1|, |a_2|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2); \\ 0, & \text{если } \text{sign}(a_1) \neq \text{sign}(a_2). \end{cases}$$

Параметр Φ задает максимально возможный скачок функции в центре ребра, при котором решение не монотонизируется. В исходной схеме этот параметр полагается одинаковым для всех треугольников сетки. С помощью предлагаемого алгоритма автоматического определения Φ можно достичь большей гибкости вычислений, выбирая этот параметр для каждого ребра каждого треугольника независимо.

Алгоритм автоматического выбора Φ основан на представлении функции u_h по формуле Тейлора с центром в точке \mathbf{b}_0 , где \mathbf{b}_0 — центр масс рассматриваемого треугольника K_0 . Сохраняя только первый член разложения, норму скачка функции на i -м ребре треугольника K_0 можно оценить как

$$\|u_h(\mathbf{m}_i) - \bar{u}_{K_0}\| \approx \|\nabla u_h(\mathbf{b}_0) \cdot (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0)\| = \Phi_i, \quad (9)$$

где Φ_i и есть искомое значение параметра Φ на i -м ребре треугольника K_0 .

Таким образом, для вычисления Φ_i необходимо определить функцию градиента численного решения $q_h = \nabla u_h$ и взять ее значение в точке \mathbf{b}_0 . Градиент u_h в ячейке K_0 аппроксимируется постоянной функцией \bar{q} следующим образом:

$$\bar{q} = \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} \nabla u_h dV = \frac{1}{|K_0|} \int_{\partial K_0} \tilde{u} \mathbf{n} dS \approx \frac{1}{|K_0|} \sum_{k=1}^3 \tilde{u}_k \mathbf{n}_k L_k, \quad (10)$$

где \mathbf{n}_k — внешняя единичная нормаль к k -му ребру треугольника K_0 , а L_k — длина k -го ребра. Значение \tilde{u}_k соответствует некоторой аппроксимации численного решения на ребре, в качестве которой используется аппроксимация решения задачи Римана с начальными данными \bar{u}_L^k, \bar{u}_R^k , где $\bar{u}_L^k = \bar{u}_{K_0}$, $\bar{u}_R^k = \bar{u}_{K_p}$ — средние значения решения в треугольнике K_0 и соседнем с ним по k -му ребру треугольнике K_p . Для получения решения задачи Римана используется метод HLLC.

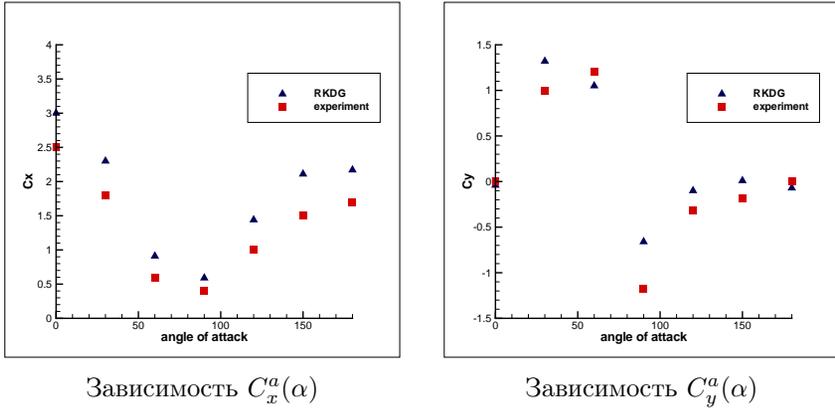


Рис. 2. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки

Автоматический выбор параметра Φ позволяет получить хорошее количественное и качественное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными при моделировании течений вязкого теплопроводного газа путем численного решения уравнений Навье-Стокса. Для оценки работоспособности алгоритма автоматического выбора параметра лимитера проведено исследование зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов полукруглого профиля от угла атаки и сравнение полученных расчетных величин с экспериментальными. В данной задаче число Маха набегающего потока равно $M = 0,025$, а число Рейнольдса $Re = 31\,500$.

Расчеты проведены для углов атаки α от 0° до 180° с шагом 30° , результаты представлены на рис. 2.

Характерный вид вихревого следа, образующегося за полукругом при $\alpha = 30^\circ$, представлен на рис. 3.

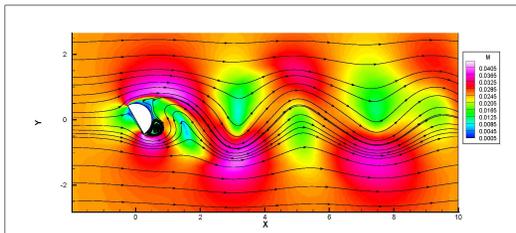


Рис. 3. Распределение чисел Маха и линии тока, угол атаки 30°

В результате работы создан параллельный алгоритм RKDG-метода, в основе которого лежит принцип разбиения расчетной области на несколько подобластей (по количеству используемых в расчете вычислительных узлов). Эффективность распараллеливания RKDG-метода на высокопроизводительном кластере МВС-100к представлена на рис. 4. На графике слева показано время в секундах, необходимое для выполнения одного шага расчета, а на графике справа — соответствующее ускорение алгоритма.

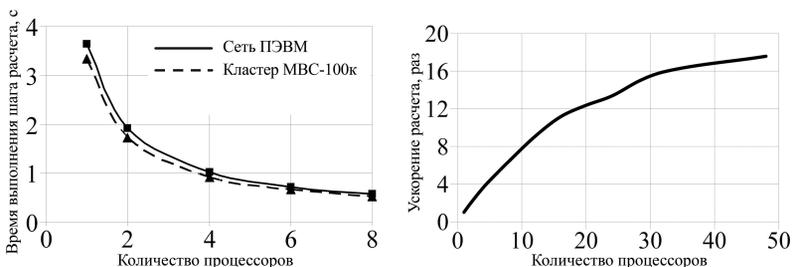


Рис. 4. Эффективность распараллеливания на МВС-100к

Созданный программный комплекс на основе RKDG-метода может быть эффективно использован для расчета аэродинамических характеристик реальных крыловых профилей при необходимости анализа уже имеющихся профилей или проектировании новых. В качестве примера такого расчета рассмотрено вычисление аэродинамических характеристик профиля

NACA23012 с закрылком с использованием разработанного программного комплекса. На рис. 5 представлены результаты расчета аэродинамических характеристик профиля при угле атаки, равном $\alpha_a = 8^\circ$, и различных углах отклонения закрылка α_f . Кривая «RKDG» соответствует расчетным значениям коэффициентов лобового сопротивления C_x^a и подъемной силы C_y^a , а кривая «experiment» — экспериментальным значениям этих величин. Результаты моделирования обтекания профиля крыла NACA23012 при $\alpha_f = 75^\circ$ представлены на рис. 6.

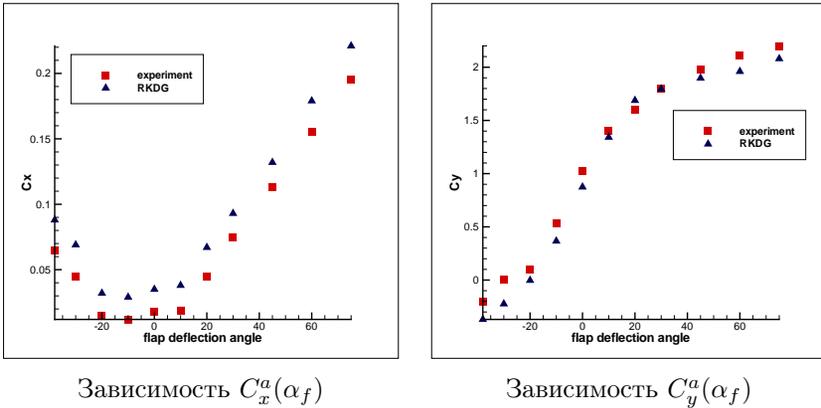


Рис. 5. Зависимость аэродинамических коэффициентов от α_f

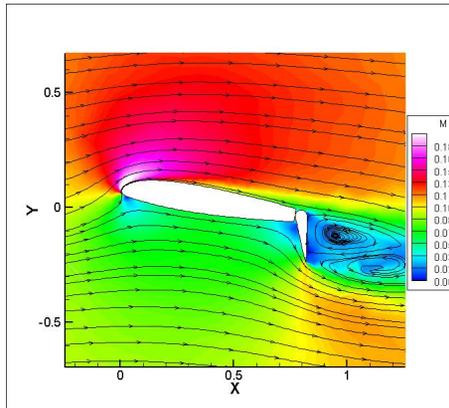


Рис. 6. Распределение чисел Маха и линии тока

Аэродинамические характеристики профиля NACA23012 хорошо (качественно и количественно) согласуются с результатами экспериментов, что

позволяет говорить об эффективности созданного программного комплекса на базе RKDG-метода при решении реальных газодинамических задач.

В **третьей главе** исследована неконсервативная система уравнений Баера-Нунциато, описывающая движения двухфазной среды, в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

где $\mathbf{Q} = [\bar{\alpha}, \bar{\alpha}\bar{\rho}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{w}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E}, \alpha\rho, \alpha\rho u, \alpha\rho v, \alpha\rho w, \alpha\rho E]^T$;

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = [0, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}, \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}), \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{w}, \bar{\alpha}\bar{u}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}), \\ \alpha\rho u, \alpha(\rho u^2 + p), \alpha\rho uv, \alpha\rho uw, \alpha u(\rho E + p)]^T;$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{Q}) = [\bar{u}, 0, -p, 0, 0, -p\bar{u}, 0, p, 0, 0, p\bar{u}]^T.$$

В уравнениях (11) величины с чертой соответствуют параметрам твердой фазы, а без нее — параметрам газовой фазы.

В качестве уравнения состояния для газовой фазы использовано уравнение состояния совершенного газа. В качестве твердой фазы рассмотрены материалы, подчиняющиеся жесткому уравнению состояния: $p = (\gamma - 1)\rho e$, $\bar{p} = (\bar{\gamma} - 1)\bar{\rho}\bar{e} - \bar{\gamma}\bar{P}_0$, где \bar{P}_0 — некоторая известная константа. Концентрации фаз связаны друг с другом следующим условием насыщения: $\bar{\alpha} + \alpha = 1$.

В работе предложен новый метод численного решения задачи Римана для уравнений (11), в основе которого лежит обобщение метода HLLC на случай двухфазных течений, а также решение уравнений тонкого слоя, справедливых на контактном разрыве твердой фазы. Приближенное решение задачи Римана использовано для построения численного потока типа HLLC, который применен в методе конечных объемов, РС-методе и RKDG-методе. Исходные данные для одной из тестовых задач, представляющей собой задачу Римана на отрезке $[0, 1]$ с разрывом начального условия в точке $x_0 = 0,8$, таковы: $\bar{\alpha}_L = 0,7$, $\bar{\rho}_L = 1$, $\bar{u}_L = -19,5975$, $\bar{p}_L = 1000$, $\alpha_L = 0,3$, $\rho_L = 1$, $u_L = -19,5975$, $p_L = 1000$; $\bar{\alpha}_R = 0,2$, $\bar{\rho}_R = 1$, $\bar{u}_R = -19,5975$, $\bar{p}_R = 0,01$, $\alpha_R = 0,8$, $\rho_R = 1$, $u_R = -19,5975$, $p_R = 0,01$. Параметры уравнений состояния для данной задачи: $\gamma = 1,4$, $\bar{\gamma} = 3,0$, $\bar{P}_0 = 100,0$.

Результаты расчетов для твердой и газообразной фазы, полученные методом конечных объемов, RKDG и РС, представлены на рис. 7–8. На графиках кривая «exact» изображает точное решение, а кривые «FV», «DG», «РС» — решения, полученные методом конечных объемов, RKDG-методом и РС-методом, соответственно.

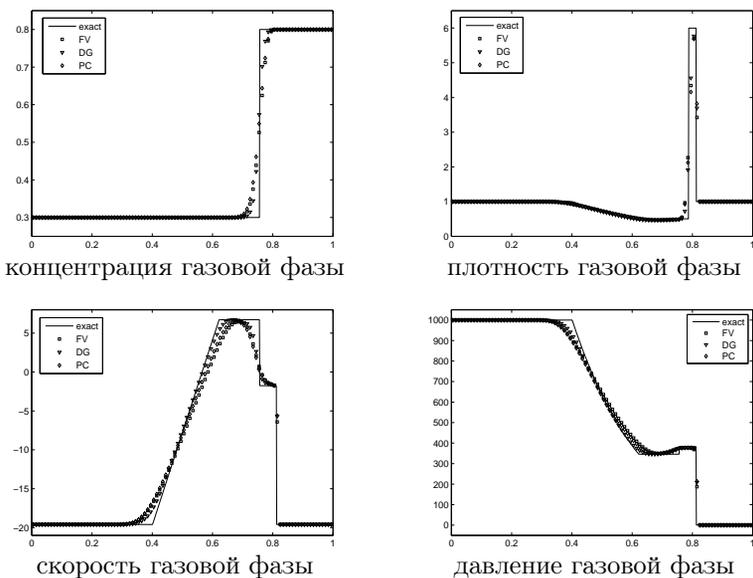


Рис. 7. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени $t = 0,007$

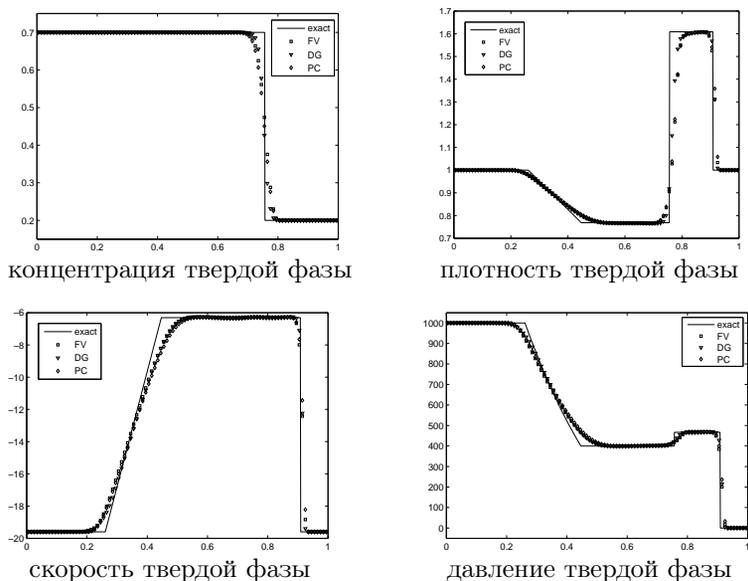


Рис. 8. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени $t = 0,007$

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

По результатам проведенных в работе исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Разработан оптимизированный алгоритм RKDG-метода, позволяющий проводить процедуру монотонизации с автоматическим выбором параметров лимитера в процессе решения задачи с возможностью пространственно-временной адаптации лимитера к особенностям решения. Разработан алгоритм численного решения задачи Римана для уравнений Баера-Нунциато, на его основе создан алгоритм вычисления потока, примененный в качестве базового элемента в методе конечных объемов, РС-методе и RKDG-методе.

2. Создан программный комплекс на основе RKDG-метода, позволяющий проводить расчеты течений как идеального, так и вязкого теплопроводного газа или жидкости, а также моделировать течения двухфазных сред с помощью метода конечных объемов, РС-метода и RKDG-метода. Разработан параллельный алгоритм RKDG-метода и проанализирована эффективность распараллеливания на различных вычислительных комплексах.

3. Продемонстрирована работоспособность RKDG-метода и основанного на нем программного комплекса на задачах моделирования течений газа в каналах сложной формы, а также задачах определения аэродинамических характеристик различных профилей, включая крыловые профили с закрылками. Эффективность созданного алгоритма вычисления потока типа HLLC при его использовании в RKDG-методе решения двухфазных уравнений Баера-Нунциато проверена на специально подобранных задачах Римана и задаче взаимодействия материалов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Галанин М. П., Савенков Е. Б., Токарева С. А. Применение разрывного метода Галеркина для численного решения квазилинейного уравнения переноса. М., 2005. 34 с. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 105).
2. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики / С. А. Токарева [и др.]. М., 2006. 30 с. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 52).
3. Галанин М. П., Савенков Е. Б., Токарева С. А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 11. С. 55–66.
4. Galanin M. P., Tokareva S. A. The RKDG method and its application for the numerical solution of gas dynamics problems // Heat Transfer Research. 2008. V. 39, № 2. P. 123–132.
5. Galanin M. P., Savenkov E. B., Tokareva S. A. Solving gas dynamics problems with shock waves using the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method // Mathematical Models and Computer Simulations. 2009. V. 5, № 1. P. 635–645.
6. Марчевский И. К., Токарева С. А. Сравнение эффективности параллельных алгоритмов решения задач газовой динамики на разных вычислительных комплексах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2009. № 1. С. 90–97.
7. Tokareva S. A., Toro E. F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // Journal of Computational Physics. 2010. V. 229. P. 3573–3604.
8. Tokareva S. A. A problem-independent slope limiting algorithm for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method // Computational Methods in Applied Mathematics. 2010. V. 10, № 3. P. 326–342.
9. Токарева С. А. Применение разрывного метода Галеркина для численного решения задач газовой динамики // Студенческий научный Вестник : Тез. докл. общеуниверситетской научно-технической конференции Студенческая весна — 2006. М., 2006. Т. 3. С. 145.
10. Токарева С. А. RKDG-метод для численного решения задач динамики вязкого газа // Студенческий научный Вестник : Тез. докл. обще-

университетской научно-технической конференции Студенческая весна — 2007. М., 2007. Т. 4. С. 86–87.

11. Галанин М. П., Токарева С. А. RKDG метод и его применение для численного решения задач газовой динамики // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках : Труды XVI Школы-семинара молодых учёных и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева. Санкт-Петербург, 2007. Т. 1. С. 99–102.

12. Токарева С. А. Параллельный алгоритм RKDG-метода для расчета заполнения газом канала ускорителя // Студенческий научный Вестник : Тез. докл. общеуниверситетской научно-технической конференции Студенческая весна — 2008. М., 2008. Т. 6, ч. 2. С. 25–26.

13. Токарева С. А., Марчевский И. К. Анализ эффективности параллельных алгоритмов решения задач газовой динамики // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Тез. докл. международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск, 2008. С. 571.

14. Токарева С. А. RKDG-метод и его применение для численного решения задач газовой динамики // Необратимые процессы в природе и технике: Труды пятой Всероссийской конференции. М., 2009. Ч. 2. С. 93–96.

15. Марчевский И. К., Токарева С. А. Параллельный алгоритм RKDG-метода для решения задач газовой динамики // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону, 2008. С. 150–154.

16. Tokareva S. A. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for simulation of flow around obstacles // Proceedings of the 6th International Conference of Computational Heat and Mass Transfer. Guangzhou, China, 2009. P. 111–116.

17. Tokareva S. A. Numerical simulation of fluid flow with Discontinuous Galerkin methods // Proceedings of the 16th ICMP. Prague, Czech Republic, 2009. P. 64.

18. Tokareva S. A., Toro E. F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // Proceedings of the 6th ICCFD. St. Petersburg, Russia, 2010. P. 238–239.