

На правах рукописи

**Звягин Феликс Валерьевич**

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И МЕТОДОВ  
РАСЧЕТА ДВУХИМПУЛЬСНЫХ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ  
НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГАЛО-ОРБИТ И ОРБИТ F-КЛАССА**

Специальность 05.07.09 — Динамика, баллистика, управление движением  
летательных аппаратов.

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва – 2011

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана» (МГТУ им. Н.Э.Баумана).

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
Пантелеев Владимир Павлович

Научный консультант: Заслуженный деятель науки РФ,  
доктор технических наук, профессор  
Лысенко Лев Николаевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор  
Бетанов Владимир Вадимович

доктор технических наук, профессор  
Иванов Виталий Александрович

Ведущая организация: ФГУП НПО им. С.А.Лавочкина

Защита состоится « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета ДС 212.008.01 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: 105007, г. Москва, Госпитальный пер., д. 10, факультет Специального машиностроения МГТУ им. Н.Э.Баумана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э.Баумана

Автореферат разослан « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

Ваш отзыв в одном экземпляре, заверенный гербовой печатью, просьба направлять по адресу; 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ученому секретарю диссертационного совета ДС 212.008.01.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор технических наук, профессор

Калугин В.Т.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Космические программы различных стран и групп стран предполагают активное изучение и освоение не только околоземного пространства, но также и исследование дальнего космоса. При этом акцент делается на практическом использовании ранее уже изученных и апробированных возможностей, предоставляемых, например, выведением космических аппаратов (КА) на периодические орбиты в окрестностях точек либрации. Использование указанных орбит позволяет не только проводить мониторинг текущего состояния космического пространства, астрономические и космогонические исследования, но и своевременно оповещать службы Земли о нестационарных явлениях на Солнце, их интенсивности, заблаговременно предупреждать о возможных последствиях. Кроме того, рассматриваются варианты построения группировок КА, таких как интерферометры, для исследований с большим разрешением удаленных объектов в космическом пространстве. Осуществление названных и других проектов требует значительных затрат характеристических скоростей на выведение и поддержание орбит, что требует повышения точности баллистических расчетов, оптимизации схем выведения за счет применения новых методов, разработанных в последнее время; применения ранее не использовавшихся для практических целей орбит. В связи с этим, тема диссертации, в которой обсуждаются методы решения и разрабатываются алгоритмы расчета двухимпульсных схем межорбитальных перелетов на гало-орбиты и орбиты F-класса, находятся оценки устойчивости указанных орбит и выделяются среди них субоптимальные по суммарному потребному импульсу характеристической скорости, представляется **актуальной**.

**Целью исследования** является сокращение энергетических затрат на выполнение межпланетных миссий путем выбора наиболее рациональных баллистических схем полета.

**Задачи исследования** формулируются в соответствии с поставленной целью работы следующим образом:

- используя методику расчетов устойчивых и неустойчивых многообразий коллинеарных точек либрации выделить оптимальные по импульсу характеристической скорости орбиты перелета на гало-орбиты в соответствии с ограничениями, накладываемыми двухимпульсными схемами межорбитальных перелетов;
- получить оценки устойчивости гало-орбит;
- провести классификацию полученных орбит перелета по различным параметрам и определить ограничения на начальные условия движения по этим орбитам;
- оценить потребные импульсы характеристической скорости на коррекцию траекторий перелета;
- провести исследование устойчивости орбит F-класса;

- рассчитать двухимпульсные маневры и классифицировать их, выбрав оптимальные по величине суммарного потребного импульса характеристической скорости;

- провести сравнительный анализ возможных перелетов с круговых околоземных орбит ожидания на гало-орбиты с последующим выведением на орбиты F-класса с прямым выведением на обозначенные орбиты.

**Методы исследования.** Для решения сформулированных задач использовались методы небесной механики, проектной космической баллистики, теории динамических систем, теории управления, математического моделирования и программирования.

**Научная новизна** основных результатов, выносимых на защиту, заключается в том, что

- разработан алгоритм классификации двухимпульсных орбит перелета на основе использования гало-орбит и орбит F-класса;
- исследованы параметры устойчивости орбит F-класса с помощью возвратов Пуанкаре и по Ляпунову, выделены диапазоны орбит указанного класса, пригодные для практического использования;
- проведен сравнительный анализ возможных перелетов с круговых околоземных орбит ожидания на гало-орбиты с последующим выведением на орбиты F-класса с прямым выведением с круговых околоземных орбит ожидания.

**Практическая ценность** работы состоит в том, что ее результаты могут быть использованы при разработке проектов, в которых предполагается выведение КА на орбиты в окрестностях точек либрации. Проведенные исследования выявили существование технической возможности организации интерферометрических измерений со сверхбольшой базой посредством организации космической группировки на орбитах, лежащих за коллинеарными точками либрации системы Солнце—Земля, то есть вне зоны космического пространства, в которой имеется вероятность встречи с космическими объектами различного происхождения.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Метод расчета двухимпульсных межорбитальных перелетов с использованием гало-орбит и орбит F-класса.
2. Результаты определения характеристик устойчивости гало-орбит и орбит F-класса.
3. Метод кластеризации орбит перелета по интегральному параметру и результаты его применения для анализа орбит перелета.
4. Результаты расчетов и характеристики орбит перелета с низких круговых орбит ожидания.
5. Результаты анализа схем выведения на орбиты F-класса.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается

- применением строгих математических методов исследования, базирующихся на классических исследованиях ограниченной задачи трех тел;

- совпадением модельных результатов расчетов с результатами других авторов, в том числе, как частный случай — при расчете одноимпульсных перелетов на гало-орбиты.

- применением современных методов исследований, использующих методы численного интегрирования высокой точности, разработанные мировыми лидерами в этой области.

**Апробация работы и внедрение.** Результаты диссертационной работы нашли отражение в материалах докладов, прочитанных автором на XXXIV и XXXV Академических чтениях по космонавтике «Актуальные проблемы российской космонавтики», г. Москва, 2010 и 2011 гг. [4—6].

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 7 научных работ, в том числе 3 научные статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [1—3].

**Структура и объем работы.** Диссертация включает в себя введение, четыре главы, заключение, список использованной литературы, содержащий 32 наименования; общий объем диссертации 164 стр. машинописного текста.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** формулируется тема исследования и ее актуальность, приводится краткий обзор исследований по теме диссертации и реализованных проектов. Рассмотрены методы исследований, раскрывается научная новизна и практическая значимость работы. Приводится структура работы с кратким изложением глав исследования. Излагаются основные положения, выносимые на защиту, сведения об апробации и публикациях.

**Первая глава** посвящена теоретическим основам разработки алгоритмического обеспечения межорбитальных перелетов с использованием гало-орбит и орбит F-класса. Предполагая, что в рассматриваемой системе число степеней свободы есть  $k$ , ее состояние может быть однозначно определено обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_k$ . Если  $T(t, q, \dot{q})$  — живая сила рассматриваемой материальной системы, являющаяся непрерывной функцией времени  $t$ , обобщенных координат  $q$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}$  и обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядков, движение материальной системы происходит под действием сил, обладающих силовой функцией  $U$ , являющейся непрерывной функцией времени и обобщенных координат  $q$ , имеющей непрерывные частные

производные первого и второго порядков, то задача определения общих уравнений движения допускает нахождение решения на основе принципа Остроградского — Гамильтона и уравнений Лагранжа, которые могут быть

представлены в виде  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Введя вместо

обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ , новые зависимые переменные  $p_j$

как:  $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , получим новую запись уравнений движения в

форме Гамильтона:  $\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ ,  $\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ , где  $H$  — функция Гамильтона.

Дается вывод уравнений движения ограниченной задачи трех тел в неравномерно вращающейся (пульсирующей) барицентрической системе координат в безразмерных величинах на основании перехода от уравнений движения общей задачи трех тел в абсолютных координатах к ее ограниченной форме с использованием интегралов движения. Расстояния между основными телами (меньшего массы  $\mu$  и большего массы  $(1-\mu)$ ) принимается равным 1. Истинная аномалия меньшего тела обозначается  $v$ , постоянная тяготения равна 1. Уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - 2 \frac{dy}{dv} &= \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2 \frac{dx}{dv} &= \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \frac{1}{1 + e \cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где силовая функция определена как

$$\Omega = \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} e z^2 \cos v, \quad r_0^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_1^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2.$$

Далее проводится исследование уравнений движения круговой задачи трех тел с построением областей возможного движения в проекции на сечения поверхности Хилла на основании значений постоянной Якоби. Определяются особые точки системы уравнений — точки либрации и проводится линеаризация уравнений движения в окрестности коллинеарной точки либрации  $L$ , расположенной вблизи меньшего притягивающего тела. В плоской постановке задачи координаты точки либрации могут быть записаны как  $(x_e, y_e, \dot{x}_e, \dot{y}_e) = (x_e, 0, 0, 0)$ , тогда, разложив квадратные члены Гамильтониана  $H$  в окрестности точки  $(x_e, y_e, p_{x_e}, p_{y_e}) = (x_e, 0, 0, x_e)$  и

перенеся начало координат в  $(x_e, 0, 0, x_e)$ , получаем квадратичные члены гамильтониана:

$$H_l = \frac{1}{2} \left[ (p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 - ax^2 + by^2 \right], \quad (2)$$

где  $a = 2\bar{\mu} + 1 > 0$ ,  $b = \bar{\mu} - 1 > 0$  и  $\bar{\mu} = \mu |x_e - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu) |x_e + \mu|^{-3}$ , откуда линеаризованный вид уравнений в форме Гамильтона приобретает форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_x} = p_x + y, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H_l}{\partial x} = p_y - x + ax, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_y} = p_y - x, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H_l}{\partial y} = -p_x - y - by. \end{aligned} \quad (3)$$

**Во второй главе** выполнено исследование фазового пространства окрестности коллинеарных точек либрации, определены количественные характеристики гало-орбит. Приводится специальный случай теоремы Ляпунова-Мозера, позволяющий установить существование локального интеграла в точке либрации. В рассматриваемом случае уравнения имеют одну пару точек равновесия с действительными собственными числами  $\pm\lambda$  и другую — с мнимыми  $\pm i\omega$ . Гамильтониан записывается в форме:

$$H(x, y) = \lambda x_1 y_1 + \frac{1}{2} v (x_2^2 + y_2^2) + O_3(x, y), \quad (4)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  и  $O_n(\cdot, \cdot)$  обозначает члены разложения порядка  $n$  и выше. Линеаризованные уравнения получены из гамильтониана, содержащего квадратичные члены. Тогда, в соответствии с теоремой Ляпунова-Мозера, решение линеаризованных уравнений может быть записано как:

$$x_1(t) = x_1^0 e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = x_2^0(t) e^{-\lambda t}, \quad z(t) = x_2(t) + iy_2(t) = z^0 e^{-vt}, \quad (5)$$

где постоянные  $x_1^0$ ,  $y_1^0$  и  $z^0 = x_2^0 + iy_2^0$  — начальные условия. Эти линеаризованные уравнения допускают существование интегралов. А именно, функции  $x_1 y_1$  и  $|z|^2 = x_2^2 + y_2^2$  постоянны вдоль решений. Собственные числа линеаризованной системы имеют форму  $\pm\lambda$  и  $\pm iv$ , где  $\lambda$  и  $v$  положительные постоянные. Соответствующие им собственные векторы  $\bar{u}_1 = (1, -\sigma, \lambda, -\lambda\sigma)$ ,  $\bar{u}_2 = (1, \sigma, -\lambda, -\lambda\sigma)$ ,  $\bar{w}_1 = (1, -i\tau, iv, v\tau)$ ,  $\bar{w}_2 = (1, i\tau, -iv, v\tau)$ , где  $\sigma$  и  $\tau$  постоянные, причем  $\sigma > 0$  и  $\tau < 0$ . Используя собственные векторы  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2$  рассматриваемого пространства состояний как новые оси координат  $(\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2)$ , получающиеся из старой системы координат линейным преобразованием, записываем уравнения в новой системе координат, причем решения уравнений в новой системе имеют вид

$$\xi(t) = \xi^0 e^{\lambda t}, \quad \eta(t) = \eta^0 e^{-\lambda t}, \quad \zeta(t) = \zeta_1(t) + i\zeta_2(t) = \zeta^0 e^{-ivt}, \quad (6)$$

где постоянные  $\xi^0$ ,  $\eta^0$  и  $\zeta^0 = \zeta_1^0 + i\zeta_2^0$  — начальные условия. Линеаризованные уравнения имеют дополнительные интегралы, а именно:  $\eta\xi$  и  $|\zeta|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$  являются постоянными вдоль решения. Для положительных  $\varepsilon$  и  $c$  может быть определена область равновесия  $\mathbb{R}$  посредством  $E_l = \varepsilon$ , и  $|\eta - \xi| \leq c$ , то есть для каждого фиксированного значения  $\eta - \xi$  из интервала  $I = [-c, c]$ , уравнение  $E_l = \varepsilon$  определяет две области  $\frac{\lambda}{4}(\eta + \xi)^2 + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = \varepsilon + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2$ . Ограничивающая  $\mathbb{R}$  область, для которой  $\eta - \xi = -c$  обозначается  $n_1$ , а для которой  $\eta - \xi = c$ ,  $n_2$ ; представлены на рис. 1. Множество точек ограничивающей области, в которых  $\eta + \xi = 0$  называется экватором, а множества точек, в которых  $\eta + \xi > 0$  или  $\eta + \xi < 0$  северной или южной полусферой соответственно.

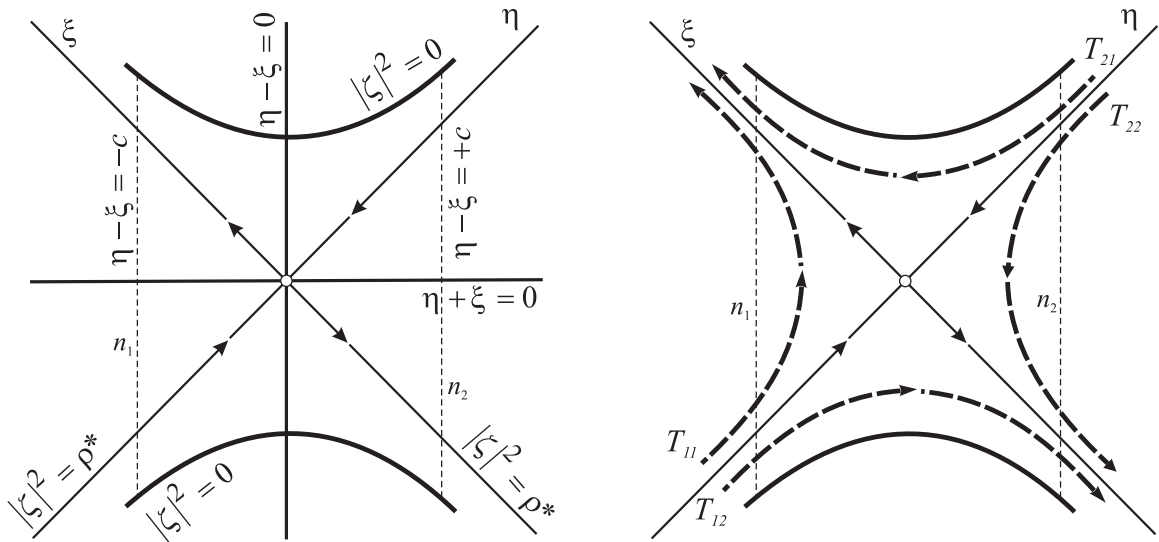


Рис. 1.

Проекция на плоскость  $\eta\xi$  орбит в окрестности коллинеарной точки либрации

В окрестности коллинеарной точки либрации существует девять классов орбит, которые можно сгруппировать в четыре категории.

1. Начало координат  $\xi = \eta = 0$ , соответствует периодической орбите в  $\mathbb{R}$ , называемой ляпуновской орбитой (плоская периодическая гало-орбита в окрестности точки либрации).

2. Четыре полуоткрытых сегмента осей гиперболы  $\eta\xi = 0$  (что эквивалентно  $|\zeta|^2 = \rho^*$  где  $\rho^* = 2\varepsilon/\nu$ ) соответствуют четырем потокам орбит, асимптотически стремящимся к ляпуновской орбите либо в прямом ( $\xi = 0$ ), либо в обратном ( $\eta = 0$ ) времени. Они обозначены линиями со стрелками.

3. Сегмент гиперболы, определяемый как  $\eta\xi = const > 0$  (что эквивалентно  $|\zeta|^2 < \rho^*$ ), соответствует двум потокам, пересекающим  $\mathbb{R}$  из одной ограничивающей сферы в другую с посещением обеих, причем первой северную, если они следуют из области  $\eta - \xi = +c$  в  $\eta - \xi = -c$ , и наоборот в обратном случае. Такие орбиты называются транзитными. Обозначены на



рис. 1 как  $T_{12}$  и  $T_{21}$ .

4. Сегмент гиперболы, определяемый как  $\eta\xi = const < 0$  ( $|\xi|^2 > \rho^*$ ) соответствует двум потокам орбит в  $\mathbb{R}$ , каждый из которых переходит из одной полусферы в другую по одной и той же ограничивающей сфере. Так, если  $\xi > 0$ , то ограничивающей является сфера  $n_1$  ( $\eta - \xi = -c$ ) и орбита переходит из южной ( $\eta + \xi < 0$ ) в северную ( $\eta + \xi > 0$ ) полусферу. В случае, когда  $\xi < 0$ , ограничивающей является сфера  $n_2$ . Проекция такого типа орбит обозначены на рис. 1 как  $T_{11}$  и  $T_{22}$ . Таким образом, потоки орбит через окрестность точки либрации можно разделить на четыре категории: периодические ляпуновские орбиты (плоские гало-орбиты), асимптотические орбиты, транзитные орбиты и нетранзитные орбиты.

Далее рассматриваются уравнения движения относительно начала координат, совмещенного с точкой либрации как функции полиномов Лежандра, при этом коэффициенты полиномов  $c_n(\mu)$  есть

$$c_n = \frac{1}{\gamma^3} \left( (\pm)^n \mu + (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma^{n+1}}{(1 \mp \gamma)^{n+1}} \right), \text{ причем верхний знак соответствует } L_1, \text{ а}$$

нижний —  $L_2$ . В линеаризованном виде уравнения записываются как:  $\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x = 0$ ,  $\ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = 0$ ,  $\ddot{z} + c_2z = 0$ . И таким образом, при  $x = 0$  и  $y = 0$  решение по оси  $z$  имеет колебательный характер для  $c_2 > 0$  и не зависит от  $x$  и  $y$ . Характеристическое уравнение системы имеет два действительных и два мнимых корня, откуда вытекает, что коллинеарные точки либрации имеют тип *седло×центр×центр* с собственными числами  $(\pm\lambda, \pm i\omega_p, \pm i\omega_v)$ :

$$\lambda = \pm \sqrt{-1 + \frac{c_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c_2}\sqrt{-8 + 9c_2}},$$

$$\omega_p = \pm \frac{\sqrt{-2 + c_2 - \sqrt{c_2}\sqrt{-8 + 9c_2}}}{\sqrt{2}}, \omega_v = \sqrt{c_2}$$
(7)

Наличие двух действительных собственных чисел разного знака ведет к появлению бесконечно растущих во времени членов уравнений. Поэтому требуется выбрать начальные условия таким образом, чтобы решение в плоскости  $xu$  было ограниченным. В этом случае решение линеаризованных уравнений может быть записано в виде:

$$x = -A_x \cos(\omega_p t + \phi), y = \kappa A_x \sin(\omega_p t + \phi), z = A_z \sin(\omega_v t + \psi),$$
(8)

где  $\kappa = \frac{\omega_p^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_p} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1 - c_2}$ . Для  $L_1$  системы Земля-Солнце:  $\lambda =$

2.531566528358456;  $\omega_p = 2.085786663029686$ ;  $\omega_v = 2.014528005224145$  и тогда, для случая  $A_z = 110\,000$  км имеем  $A_x = 206\,000$  км и  $A_y = \kappa A_x = 665\,000$  км ( $\kappa = 3.228314863$ ). Для амплитуд гало-орбиты  $A_x$  и  $A_z$  существует

нелинейное соотношение:  $l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta = 0$ . Для  $L_1$  системы Земля-Солнце:  $l_1 = -15.9650314$ ,  $l_2 = 1.740900800$ ,  $\Delta = 0.29221444425$ . Откуда следует, что существует минимальная амплитуда  $A_x$ , при которой  $A_z > 0$ . Так, для  $L_1$  системы Земля-Солнце  $A_{x \min} \cong 200000$  км, что соответствует координате точки пересечения орбитой оси  $x$   $R_x = 0.98856$  а.е.

**В третьей главе** излагается методика расчета плоских гало-орбит и построения двухимпульсных схем перелета в их окрестности; определяются параметры орбит перелета и проводится кластеризация орбит перелета по интегральному параметру.

Метод расчета гало-орбиты основывается на линеаризованном решении в малой окрестности коллинеарной точки либрации  $L_i$ , задающем первое приближение, которое далее методом дифференциальной коррекции и численного продолжения расширяется для заданного энергетического уровня  $e$ . Начальные условия движения в линеаризованной постановке могут быть записаны как:

$$\bar{x}_0 = (x_e, 0, 0, 0) + 2 \operatorname{Re}(\beta w_1) = (x_e - A_x, 0, 0, v_{y0}), \quad (9)$$

$$\text{где } v_{y0} = -A_x v \tau > 0, v = \frac{1}{2} \left( \bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}} \right) > 0, \tau = - \left( v^2 + 2\bar{\mu} + 1 \right) / 2v.$$

Определяемые таким образом условия движения задают начальное приближение для гало-орбиты при  $A_x \ll 1$ . Однако, для задаваемого уровня энергии  $e$  амплитуда  $A_x$  может быть достаточно большой, что противоречит условиям линеаризации уравнений. Поэтому для получения значения начальной скорости при фиксированном положении относительно оси абсцисс для построения гало-орбиты используется метод дифференциальной коррекции. Рассматривается множество фазовых траекторий дифференциального уравнения  $\dot{x} = f(x)$  с  $x(t_0) = x_0$ , обозначенное  $\phi(t, t_0; x_0)$  или  $\phi(t; x_0)$ , где  $t_0$  — начальное время. Возмущенная периодическая орбита с исходным приближением начальных условий  $\bar{x}_0$ , начинающаяся в точке  $\bar{x}_0 + \delta\bar{x}_0$  отклонится за время  $t + \delta t$  от заданного опорного решения  $\bar{x}(t)$  на  $\delta\bar{x}(t + \delta t) = \phi(t + \delta t, t_0; \bar{x}_0 + \delta\bar{x}_0) - \phi(t, t_0; \bar{x}_0)$ . Раскладывая в ряд Тейлора отклонение за время  $t_1 + \delta t_1$  и учитывая, что решение уравнения  $\delta\bar{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \delta\bar{x}_0$ , где  $\Phi(t_1, t_0)$  является переходной матрицей, может быть получено численно, итерационный процесс нахождения начальных условий движения для некоторой заданной точки  $x_d$ , для которой в момент времени  $t_1$ :  $\bar{x}(t_1) = \phi(t_1, t_0; \bar{x}_0) = \bar{x}_1 = x_d - \delta\bar{x}_1$ , причем  $|\delta\bar{x}_1| > d$ , можно записать в виде:

$$\phi(t_1, t_0; \bar{x}_0 + \delta\bar{x}_0) = \phi(t_1, t_0; \bar{x}_0) + \Phi(t_1, t_0) \delta\bar{x}_0 + \Delta = \bar{x}_1 + \delta\bar{x}_1 + \Delta = x_d + \Delta, \quad (10)$$

где  $\Delta$  обозначены члены разложения более высокого порядка. Изменение  $\bar{x}_0$

через посредство  $\delta\bar{x}_0 = \Phi(t_1, t_0)^{-1} \delta\bar{x}_1$  задает первую итерацию коррекции. Итерационный процесс сходится к  $|\phi(t_1, t_0; \bar{x}_0 + \Delta\bar{x}_0) - x_d| < d$ , где  $\Delta\bar{x}_0$  — сумма коррекций  $\delta\bar{x}_0$ , приводящая к конечному значению  $x_d$  с заданной точностью  $d$ .

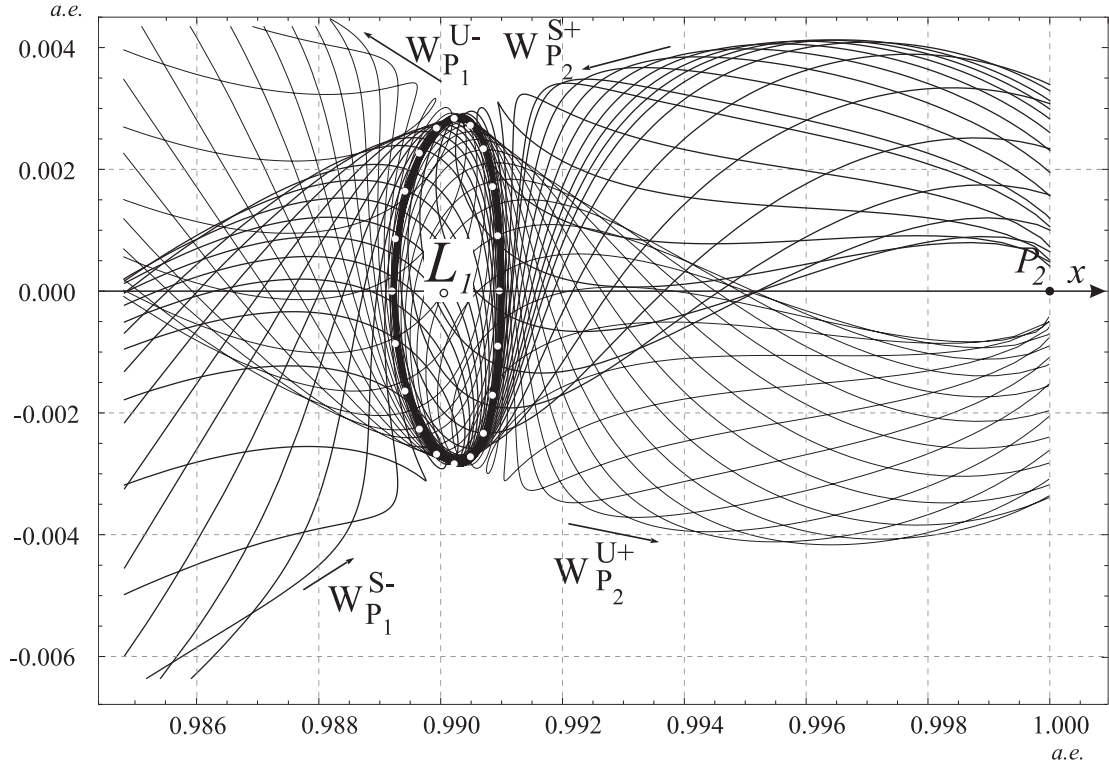


Рис. 2.

Плоская периодическая гало-орбита как пересечение потоков орбит из устойчивого и неустойчивого многообразий притягивающих центров.

Затем дается описание построения многообразий коллинеарных точек либрации на основании теоремы Флоке для уравнений с периодическими коэффициентами. В случае плоских гало-орбит собственные числа матрицы монодромии  $\mathbf{M} = \Phi(T)$  состоят из двух пар, в первой из которых собственные числа действительны, а во второй равны 1:  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ .

Собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1$ , задает неустойчивое направление, а собственный вектор, отвечающий  $\lambda_2$ , — устойчивое. Численным интегрированием в прямом времени собственного вектора неустойчивого многообразия с отклонением  $\pm\epsilon$ , могут быть получены траектории двух ветвей неустойчивого многообразия  $W^{U\pm}$  периодической орбиты. Точно так же, но при интегрировании в обратном времени, могут быть получены и ветви устойчивого многообразия  $W^{S\pm}$  (рис. 2). Для построенного семейства гало-орбит исследуется вопрос устойчивости в линейной постановке круговой ограниченной задачи трех тел, а также определяются старшие показатели Ляпунова для гало-орбит в эллиптической задаче трех тел.

Наконец, рассматривается схема построения двухимпульсных перелетов из

окрестности меньшего притягивающего тела на плоскую периодическую гало-орбиту путем выделения в устойчивом многообразии  $W^{S^\pm}$  орбит с заданными свойствами. Каждая орбита из многообразий может быть представлена как функция времени. Для плоского случая имеем:

$$\begin{bmatrix} x_{to1}^i(t) \\ y_{to1}^i(t) \\ \dot{x}_{to1}^i(t) \\ \dot{y}_{to1}^i(t) \end{bmatrix} = \bar{f}_{to1}^i(t), \quad t = 0, \dots, t_{end}, \quad i = 1, \dots, n \cdot k \cdot m, \quad (11)$$

где  $n$  — количество точек, в которых производится возмущение параметров орбиты по скорости,  $k$  — количество дискрет отклонений угла вектора по скорости,  $m$  — количество дискрет отклонений по модулю вектора скорости. Для всех орбит  $\bar{f}_{to1}^i(t)$  проводится процедура определения минимума импульса характеристической скорости по времени  $t$  при ограничениях на удаление от меньшего притягивающего центра:

$$\Delta V_0^i = \left\{ \left( \left( \dot{x}_{to1}^i(t) - \frac{y_{to1}^i(t)}{\left( y_{to1}^i(t)^2 + (1 - x_{to1}^i(t) + \mu)^2 \right)^{1/2}} \right)^2 + \left( \dot{y}_{to1}^i(t) + \frac{1 - x_{to1}^i(t)}{\left( y_{to1}^i(t)^2 + (1 - x_{to1}^i(t) + \mu)^2 \right)^{1/2}} \right)^2 \right)^{1/2} \right\}_{t=t_0^i} = \min \quad (12)$$

при условии

$$R_E \leq \left\| \begin{array}{c} x_{to1}^i(t_0^i) - 1 + \mu \\ y_{to1}^i(t_0^i) \end{array} \right\| \leq R_m,$$

где  $R_m$  — предельный радиус круговой орбиты ожидания,  $R_E$  — минимальный радиус круговой орбиты ожидания. Отобранные по указанным критериям орбиты перелета задаются своими начальными условиями на время  $t_0^i$  и интегрированием в прямом времени получают орбиты перелета на плоскую периодическую орбиту в окрестности точки либрации. При этом суммарный потребный импульс характеристической скорости может быть определен как:  $\Delta V_\Sigma^i = \Delta V_0^i + \Delta V_1^i$ , где  $\Delta V_1^i$  — импульс в точке входа на гало-орбиту. Для исследования полученных множеств орбит  $\bar{f}_{to}^i(t)$ , удовлетворяющих

наложенным ограничениям, удобно использовать карты параметров, показывающих зависимости характеристик указанных орбит от начальных условий интегрирования дифференциальных уравнений задачи, в том числе таких как точки и направления приложения импульсов, время перелета и т.д. На рис. 3 приводятся некоторые карты параметров 14 248 орбит перелета с круговых орбит ожидания различного радиуса на плоскую периодическую гало-орбиту вокруг точки либрации с параметром  $R_x = 0.9895$  *a.e.* для характеристических импульсов скорости в точке старта  $\Delta V_0$ , в точке выхода на орбиту  $\Delta V_1$ , суммарного импульса характеристической скорости  $\Delta V_\Sigma$ , времени перелета  $t_1$  и расстояния точки старта от меньшего притягивающего центра  $R_{start}$ . Так как статистическое распределение по параметрам не позволяет провести классификацию орбит перелета, была использована функция кластеризации, использующая функцию Якоби в форме, данной Маршалом:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, z, V_x, V_y, V_z) = & \mu \left( (\mu + x - 1)^2 + \frac{2}{\sqrt{(\mu + x - 1)^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + z^2 \right) + \\ & (1 - \mu) \left( (\mu + x)^2 + \frac{2}{\sqrt{(\mu + x)^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + z^2 \right) - \\ & - (e \cos(v) + 1) (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 + z^2) \end{aligned} \quad (13)$$

Рассматривая интеграл по времени от разности функции Якоби для движущейся и покоящейся точек, имеющих одни и те же координаты:

$$\begin{aligned} \Gamma_{to}^i = & \int_{t_0}^{t_1} \left( \Gamma(x_{to}^i(t), y_{to}^i(t), z_{to}^i(t), \dot{x}_{to}^i(t), \dot{y}_{to}^i(t), \dot{z}_{to}^i(t)) - \right. \\ & \left. - \Gamma(x_{to}^i(t), y_{to}^i(t), z_{to}^i(t), 0, 0, 0) \right) dt \end{aligned} \quad (14)$$

являющихся координатами точек рассматриваемых орбит перелета, оказывается возможным провести кластеризацию орбит перелета по параметру  $\Gamma_{to}^i$ .

Пример распределения орбит перелета по параметру  $\Gamma_{to}$  демонстрирует рис. 4. По указанному параметру орбиты перелета четко кластеризуются. Обозначенные точки соответствуют орбитам перелета, приводимым на рис. 5.

Были выделены орбиты перелета, на которые возможен старт с низких круговых орбит ожидания, построены карты параметров, проведена кластеризация орбит. Карты параметров демонстрируют возможность одноимпульсного перелета для гало-орбит с параметром  $R_x < 0.9888$  и возможность достижения сколь угодно малой окрестности точки либрации с выходом на гало-орбиту.

В заключительной части главы приводятся результаты определения импульсов коррекции орбит перелета, наиболее выгодных с энергетической точки зрения.

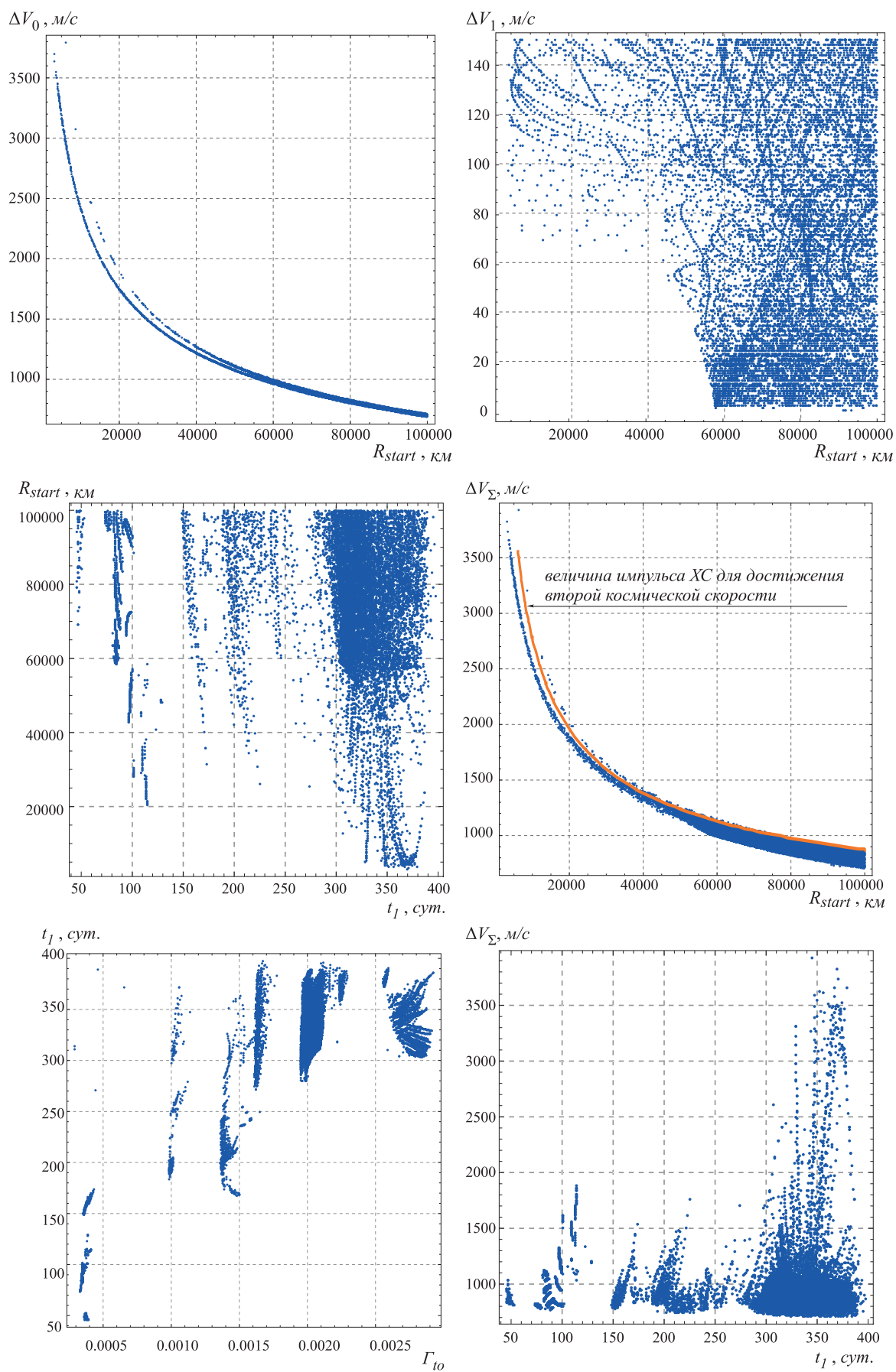


Рис. 3.  
Карты параметров орбит перелета для  $R_x = 0.9895 \text{ a.e.}$

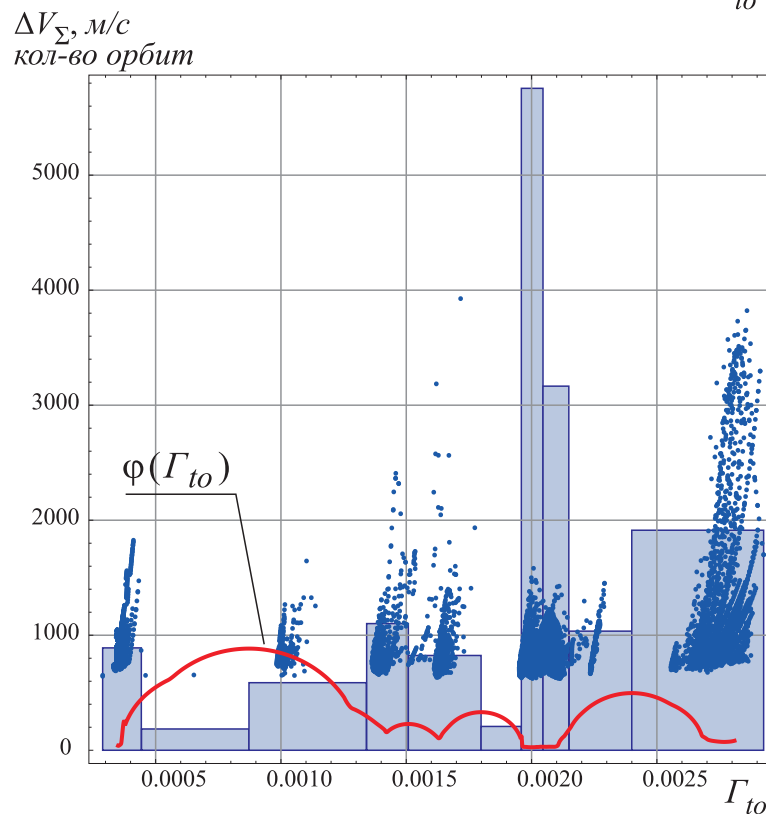
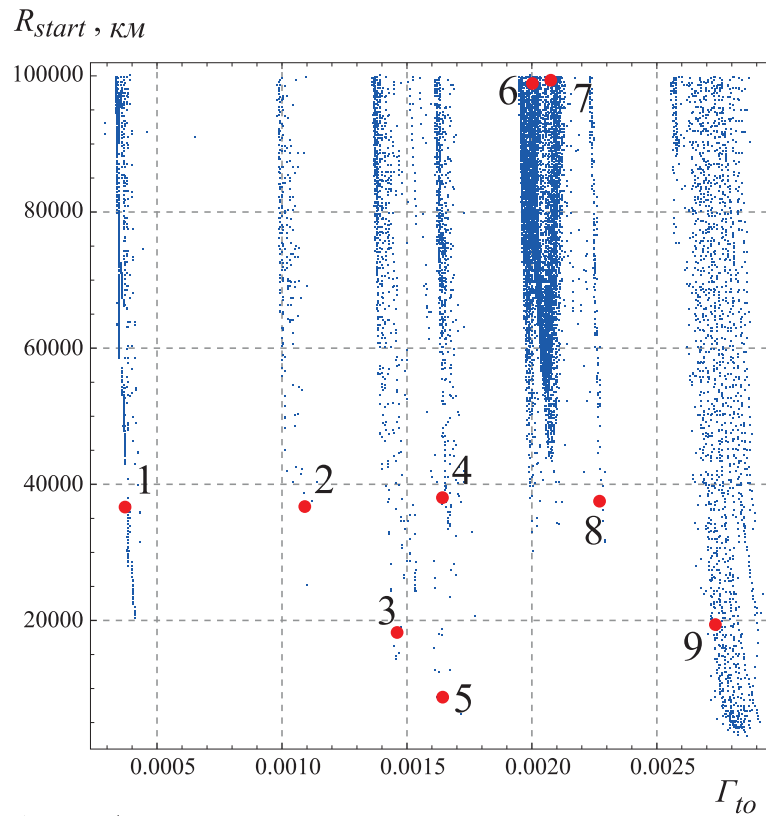
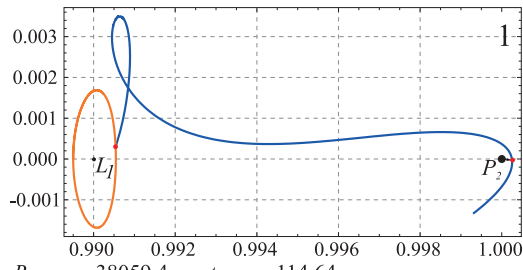
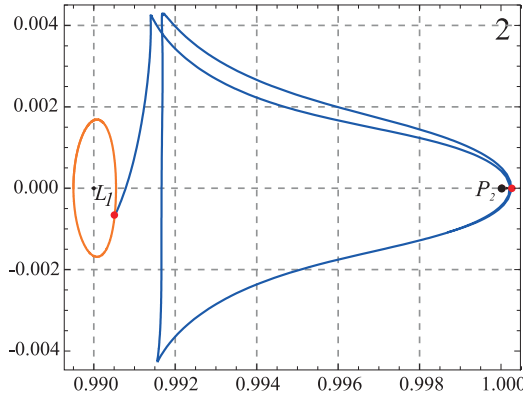


Рис. 4.

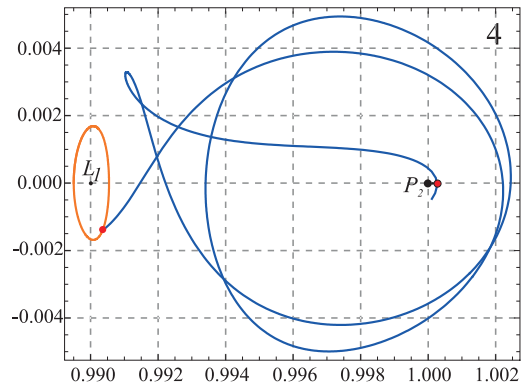
Карта распределения орбит перелета по параметрам расстояния от меньшего притягивающего центра и  $\Gamma_{to}$  (вверху); карта распределения орбит перелета по суммарному потребному импульсу характеристической скорости и  $\Gamma_{to}$ , функция кластеризации  $\varphi(\Gamma_{to})$  и гистограмма распределения орбит по параметру  $\Gamma_{to}$  (внизу).



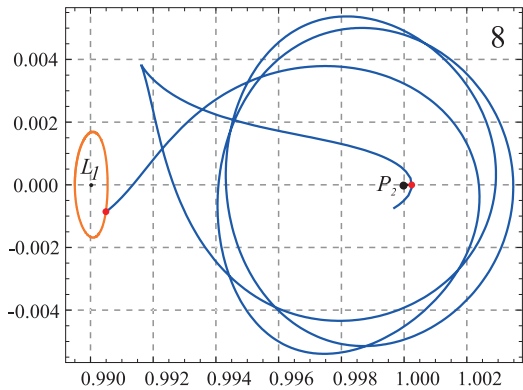
$R_{start} = 38059.4 \text{ км}, t_{end} = 114.64 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 1254.52 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 97.31 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 1351.83 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = 0.000388234$



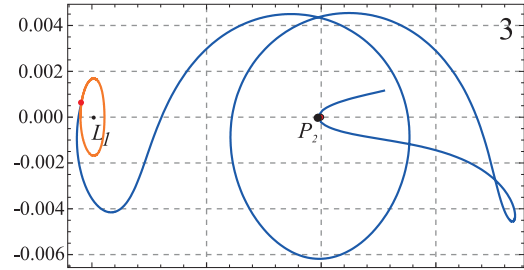
$R_{start} = 37673.0 \text{ км}, t_{end} = 282.763 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 1260.51 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 130.87 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 1391.38 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = 0.00112119$



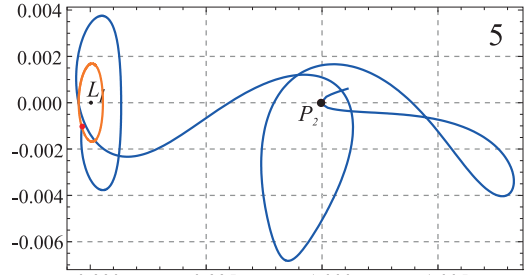
$R_{start} = 39588.3 \text{ км}, t_{end} = 310.74 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 1223.25 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 104.701 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 1327.95 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = 0.00165759$



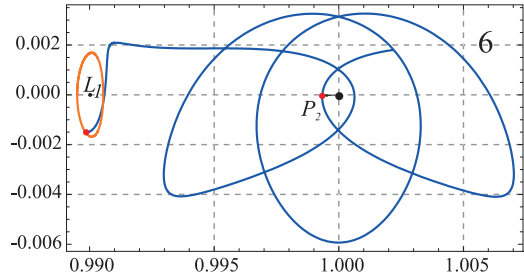
$R_{start} = 37701.7 \text{ км}, t_{end} = 381.161 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 1255.68 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 125.684 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 1381.36 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = 0.00227977$



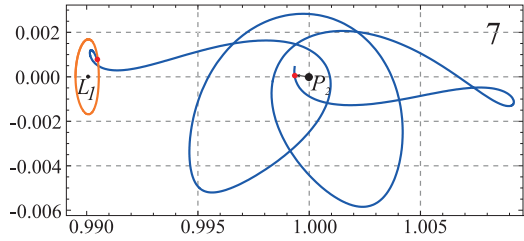
$R_{start} = 18371.4 \text{ км}, t_{end} = 313.325 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 1988.71 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 143.921 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 1988.71 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = -0.00144782$



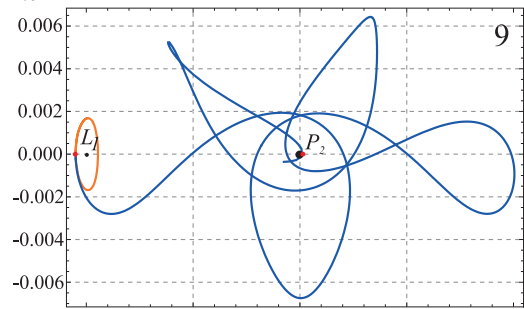
$R_{start} = 8669.31 \text{ км}, t_{end} = 366.536 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 3076.62 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 127.71 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 3204.33 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = -0.00161995$



$R_{start} = 99889.9 \text{ км}, t_{end} = 368.415 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 703.645 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 2.076 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 705.721 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = -0.00200349$



$R_{start} = 99641.2 \text{ км}, t_{end} = 337.522 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 704.331 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 36.524 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 740.855 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = -0.0020707$



$R_{start} = 19911.2 \text{ км}, t_{end} = 370.427 \text{ cym.}$   
 $\Delta V_0 = 1750.6 \text{ м/с}, \Delta V_1 = 98.661 \text{ м/с}, \Delta V_\Sigma = 1849.26 \text{ м/с}$   
 $\Gamma_{to} = 0.00273521$

Рис. 5.

Орбиты перелета. Нумерация соответствует рис. 4.



**В четвертой главе** исследуются особенности орбит F-класса, способы их достижения с круговых околоземных орбит, анализируются возможности их практического применения. В первой части главы приводятся характеристики семейства орбит F-класса: зависимости периода орбиты от ее размера, график изменения значений функции Якоби для рассматриваемого диапазона орбит, а также график изменения значения функции  $\Gamma_F$  орбит F-класса. Далее представлена одна из орбит исследуемого класса в проекции на поверхность Хилла; приведен пример возмущенной орбиты в проекции на плоскость эклиптики.

Исследование устойчивости орбит F-класса осуществляется через расчет статистических характеристик времени возвратов Пуанкаре; вычислен спектр показателей Ляпунова. Показано, что для орбит рассматриваемого класса существует диапазон начальных условий, при которых они являются квазипериодическими с точностью до погрешности вычислений. Существует область минимумов ляпуновских характеристических показателей; орбиты, определяемые значениями начальных условий из этой области, имеют асимптотическую устойчивость по оси аппликат.

Ввиду устойчивости орбит F-класса по Пуассону, одноимпульсные перелеты с околоземных круговых орбит ожидания невозможны, поэтому для расчета двухимпульсных межорбитальных перелетов была использована схема, описанная в третьей главе диссертации. Выделены оптимальные по суммарному импульсу характеристической скорости орбиты перелета, построены карты параметров этих орбит (рис. 6).

Проведен сравнительный анализ перелетов между орбитами F-класса и гало-орбитами с прямым выведением на орбиты F-класса из окрестности Земли. В результате рассмотрения гало-орбит как возможных промежуточных орбит для перехода на орбиты F-класса, показано, что оптимальными для таких переходов являются точки пересечения орбитами оси абсцисс слева от точки либрации для случая  $L_1$  и соответственно, справа, для случая  $L_2$  ввиду того, что в этих точках орбиты касаются друг друга. Минимальный импульс характеристической скорости для перехода с гало-орбиты на орбиту F-класса при этом достигается при значении  $R_x \approx 0.97718 \text{ a.e.}$  и составляет  $104 \text{ м/с}$ . Принимая во внимание данные по потребным суммарным характеристическим импульсам на выведение для различных орбит, построены сравнительные карты параметров прямого выведения и выведения через гало-орбиту на орбиты F-класса для некоторых возможных начальных условий (рис.7). Использование этих карт позволило определить диапазон начальных условий  $R_x$ , лежащих на отрезке  $[0.9785, 0.9845] \text{ a.e.}$  для перехода с гало-орбиты на орбиту F-класса и наоборот, при которых суммарные потребные импульсы для двух рассматриваемых схем выведения отличаются не более чем на  $100 \text{ м/с}$ .

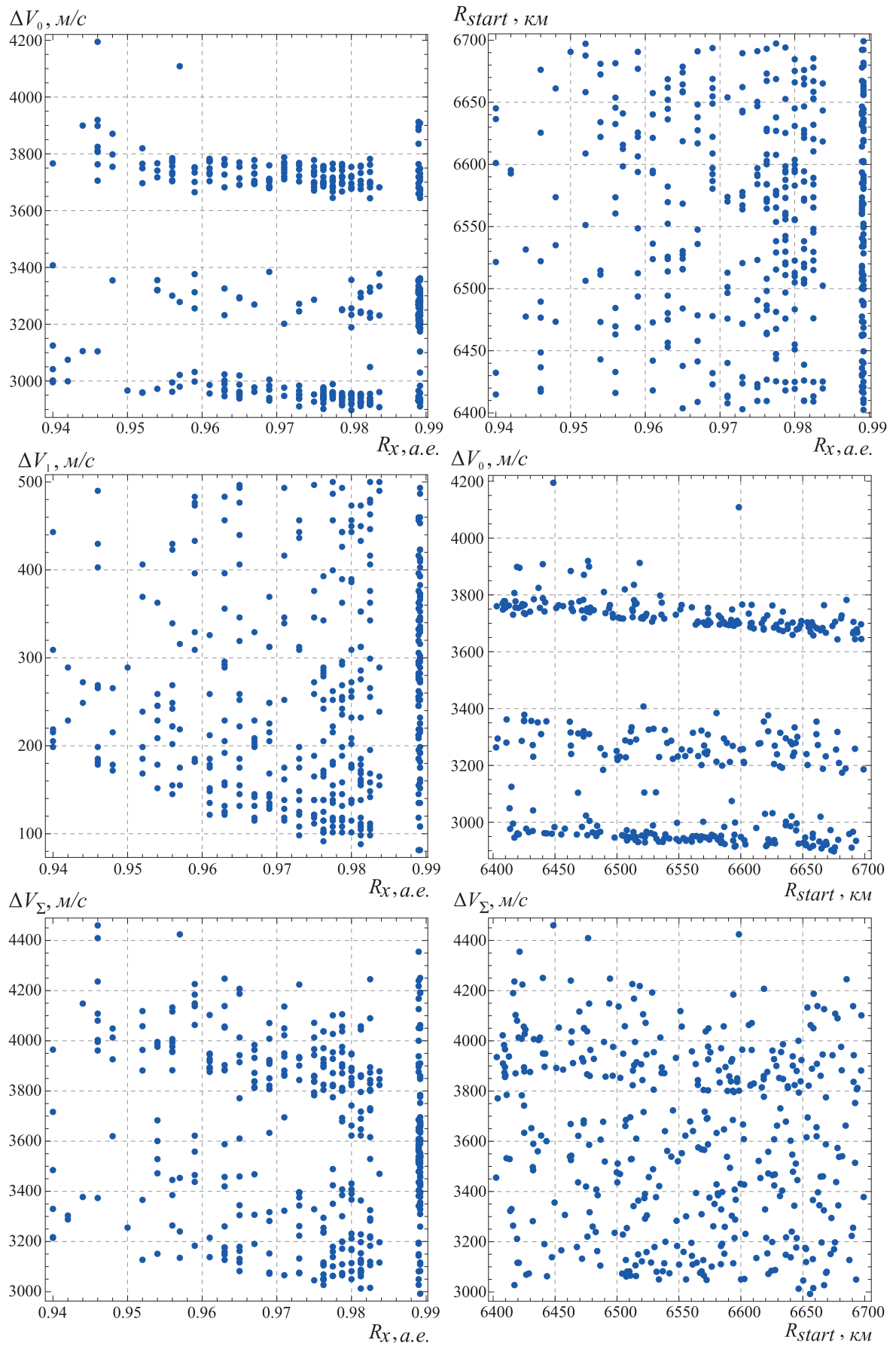


Рис. 6.  
 Карты параметров орбит перелета на орбиты F-класса  
 со стартом с низких круговых орбит ожидания

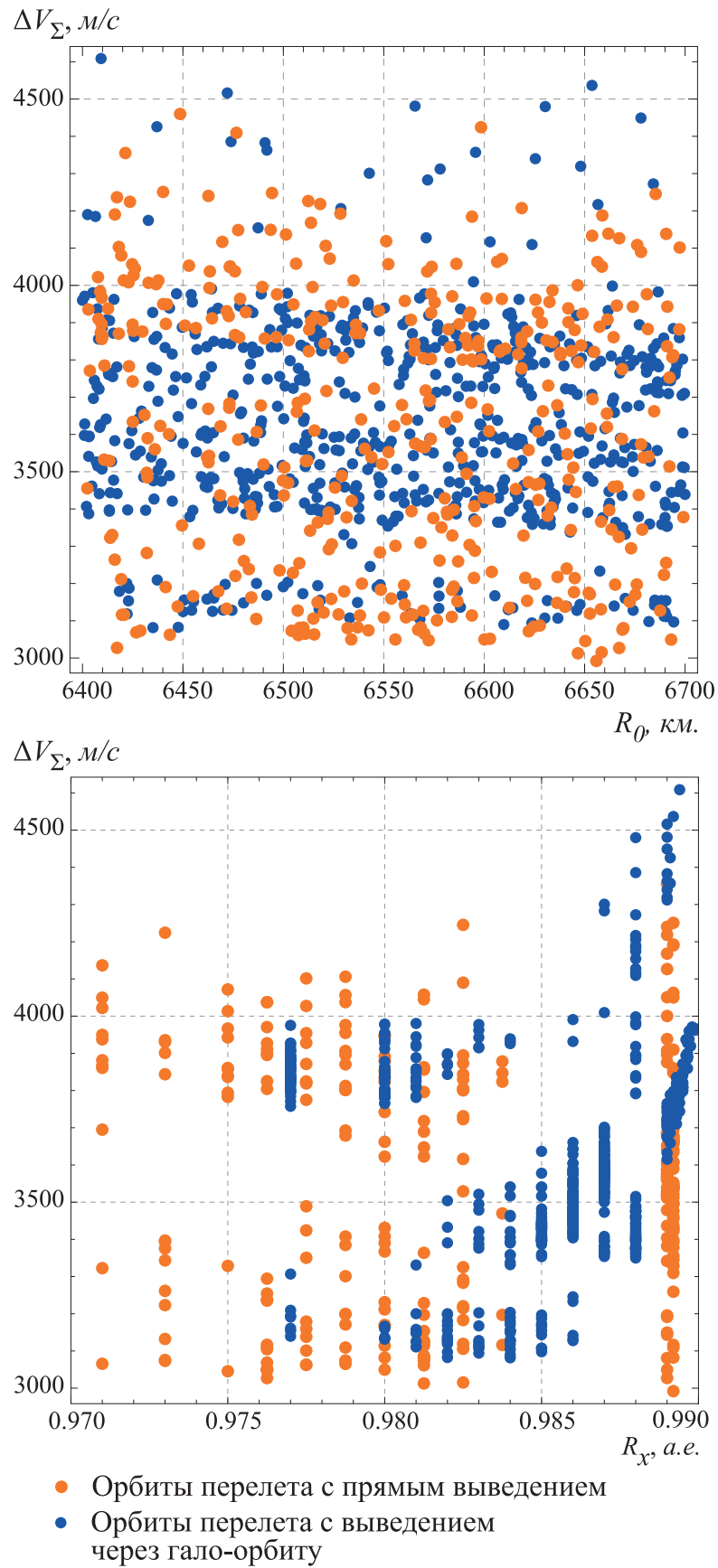


Рис. 7.

Сравнение суммарного потребного импульса характеристической скорости при прямом выведении на орбиту F-класса и при выведении через промежуточную плоскую гало-орбиту

**В заключении** диссертационной работы приводятся общие **выводы** по результатам проведенных исследований в целом.

### **Основные результаты и выводы**

1. В диссертации предложены машинно-ориентированные алгоритмы и методы расчета двухимпульсных межорбитальных перелетов на основе использования гало-орбит и орбит F-класса.

2. Проведено исследование свойств семейств конечных орбит, на которые выводятся КА, определены характеристики устойчивости этих орбит и выделены пригодные для практического применения.

3. Предложен машинно-ориентированный способ кластеризации орбит перелета по интегральному параметру.

4. Исследованы характеристики орбит перелета и получены оценки потребных импульсов характеристических скоростей на коррекцию этих орбит.

5. Выполнен анализ схем выведения на орбиты F-класса, построены графики суммарных потребных импульсов характеристической скорости, которые показывают, что оптимальным является прямое выведение.

6. Существует возможность одноимпульсных переходов КА с гало-орбиты на орбиту F-класса и наоборот с минимумом в области 0.97..0.98 а.е.

7. Характеристики устойчивости орбит F-класса, а также суммарные затраты характеристической скорости на выведение позволяют использовать орбиты F-класса, имеющие точку пересечения оси абсцисс в диапазоне 0.94..0.99 а.е. в качестве основы для проектов длительного времени существования, в том числе для построения интерферометров со сверхбольшими базами.

### **Публикации по теме диссертации**

1. Звягин Ф.В. Об одном классе орбит в задачах трех и четырех тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приборостроение. — 2010. — №2. — С. 105—113.
2. Звягин Ф.В. Об оптимизации орбит перелета в окрестность точки либрации  $L_1$  системы Солнце—Земля // Полет. — 2010. — №4. — С. 19—24.
3. Звягин Ф.В. Об управляемом движении космического аппарата в окрестности коллинеарных точек либрации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приборостроение. — 1997. — №1. — С.62—71.
4. Звягин Ф.В. Об одном классе устойчивых периодических орбит в задачах трех и четырех тел // Материалы 34 академических чтений по космонавтике. — М., 2010. — С. 478.
5. Звягин Ф.В. Об использовании свойств гомоклинических траекторий задач трех и четырех тел // Материалы 34 академических чтений по космонавтике. — М., 2010. — С. 478.
6. Звягин Ф.В. Субоптимальные перелеты на гало-орбиты с околоземных орбит // Материалы 35 академических чтений по космонавтике. — М., 2011. — С. 493.
7. Воробьев А.З., Звягин Ф.В. Система раннего предупреждения природных и техногенных катастроф при контроле солнечной активности с помощью орбитальных космических аппаратов // Авиакосмическое приборостроение. — 2002. — №1. — С. 40—46.