

САВЕЛЬЕВА ИНГА ЮРЬЕВНА

**РАЗРАБОТКА НЕКЛАССИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ИХ АНАЛИЗ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре прикладной математики  
Московского государственного технического университета  
имени Н.Э. Баумана

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
Кувыркин Георгий Николаевич

Официальные оппоненты: Заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук, профессор  
Формалев Владимир Федорович

доктор технических наук,  
старший научный сотрудник  
Товстоног Валерий Алексеевич

Ведущая организация: НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита состоится « 18 » октября 2011 года в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: 105082, г. Москва, Рубцовская наб., д. 2/18, ауд. 1006.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, учёному секретарю диссертационного совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат диссертации разослан «   » \_\_\_\_\_ 2011г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат технических наук,  
старший научный сотрудник, доцент

Аттетков А.В.

## *Общая характеристика работы*

**Актуальность работы.** Развитие техники постоянно предъявляет новые, более высокие требования к существующим конструкционным и функциональным материалам, чем стимулирует создание новых материалов.

Сегодня улучшение свойств таких материалов связано с синтезированием материалов из структур, имеющих предельные значения свойств (например, предельно прочных, тугоплавких, термостабильных и т.п.). Такие материалы и составляют новый класс конструкционных и функциональных материалов.

Эти материалы получают, в основном, методами порошковой металлургии, кристаллизацией из аморфного состояния и интенсивной пластической деформацией. Особенности структуры таких материалов (размер зерна, значительная доля границ раздела, пористость и другие особенности структуры) определяются методами их получения и оказывают существенное влияние на их физико-механические и теплофизические свойства, которые значительно отличаются от свойств аналогов с крупнозернистой или аморфной структурой.

К настоящему времени нано- и субмикроструктурная структура в ходе интенсивного пластического деформирования получена в алюминии, железе, магнии, вольфраме, никеле, титане и их сплавах.

Таким образом, конструкционные и функциональные материалы с микро- и наноструктурой обладают высокими эксплуатационными характеристиками: прочностью при достаточно высоком уровне пластичности; твердостью; высокой теплоемкостью; низкой теплопроводностью и др. Такие особенности позволяют создавать принципиально новые конструкции, устройства и приборы с параметрами, недостижимыми при использовании традиционных материалов.

Разработка методов получения объемных (массивных) заготовок с равномерной структурой по сечению заготовки, без пор, микротрещин и других дефектов структуры – актуальная задача, решение которой позволит расширить применение микро- и наноструктурных материалов конструкционного назначения

Однако обозначился существенный разрыв между технологиями получения подобных материалов и возможностями теоретического прогнозирования их физико-механических свойств. Особенно это касается влияния локальной структуры среды на ее макросвойства.

К материалам с микро- и наноструктурой в чистом виде не применима методология континуума. Тем не менее допустимо распространение методов механики сплошной среды, занимающейся изучением механического поведения материалов на макроуровне, на микроуровень. Они оказались весьма эффективными. Такой прием распространения методов механики сплошной среды называют методом непрерывной аппроксимации, а область науки, в которой поведение материалов с микро- и наноструктурой изучается при использовании методов непрерывной аппроксимации, называют обобщенной механикой сплошной среды. Ключевым моментом в этом методе является установление связи между характеристиками микро- (нано-) уровня и макроуровня. Математические модели поведения подобных материалов должны учитывать две существующие противоположные концепции описания структуры любого твердого тела – концепции непрерывности и дискретности. Построение

таких математических моделей далеко от завершения. Это утверждение относится и к математическим моделям теплопроводности.

Используемые обычно в прикладных исследованиях классические модели нестационарной теплопроводности, как правило, не учитывают скоростных эффектов и эффектов запаздывания. Известные эмпирические приемы учета таких эффектов не решают проблемы создания адекватных математических моделей теплопроводности при высокоинтенсивных тепловых воздействиях.

Множество исследований было направлено на изучение и решение задач теории теплопроводности. Из работ зарубежных ученых широко известны труды Г. Кирхгофа, С. Пуассона, У. Томсона, М. Планка, Г. Ляме, А. Пуанкаре, Х. Карслоу, Д. Егера и др.

Большой вклад в развитие учения о теплоте сделан советскими теплофизиками и представителями близких направлений. М.В. Кирпичевым, М.А. Михеевым, А.А. Гухманом создана теория подобия теплофизических процессов. А.С. Предводителевым и его учениками выполнены глубокие исследования по теории переноса вещества и теплоты в процессах горения; Н.В. Павлюкевичем – в физической кинетике и процессах переноса при фазовых превращениях; О.Г. Мартыненко – в теории свободноконвективного теплообмена. А.Г. Шашковым выполнены обширные исследования в области изучения термодиффузии в газах и газовых смесях.

Крупный вклад в теорию конвективного теплообмена и общие вопросы теплоты внесли работы С.С. Кутателадзе, В.М. Иевлева, А.В. Лыкова, Б.С. Петухова, А.И. Леонтьева, А.А. Жукаускаса и др. В трудах В.А. Стеклова, И.Г. Петровского, С.Л. Соболева, А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, В.А. Ильина, В.С. Владимирова, Н.С. Кошлякова, Г.А. Гринберга, Э.М. Карташова, В.Ф. Формалева и других выполнены фундаментальные работы по развитию аналитических методов решения дифференциальных уравнений математической физики, представлен широкий спектр краевых задач для уравнений теплопроводности как параболического, так и гиперболического типа, подробно изложены аналитические, асимптотические и численные методы их решения.

В работах В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина изучены вопросы математического моделирования термомеханических процессов с использованием различных моделей сплошной среды, в том числе и с внутренними параметрами состояния; показаны особенности нестационарного поведения сплошной среды в рамках различных моделей.

**Цель и задачи исследования.** Целью данной работы является построение неклассических математических моделей теплопроводности для твердого тела с микро- и наноструктурой, в которых учитывается нелокальность по времени и по пространству, на основе модели среды с внутренними параметрами состояния, а также аналитическое и численное исследование распределения температуры в теле на основе предложенных моделей в зависимости от параметров нагрева. Под нелокальностью по времени в работе подразумевается эффект запаздывания при аккумуляции теплоты и учет конечной скорости ее распространения. Нелокальность по пространству подразумевает учет того, что физические

характеристики микроскопических элементов подвержены влиянию прочих окружающих его элементов.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач.

1. Построение математических моделей теплопроводности среды с внутренними параметрами состояния, учитывающих нелокальность по времени и по пространству.

2. Выбор кинетических уравнений для внутренних параметров состояния.

3. Получение аналитических и численных решений для задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева при различных кинетических уравнениях для внутренних параметров состояния.

4. Разработка и реализация программного комплекса для ЭВМ, предназначенного для получения численных решений и графического представления температурных полей в твердом теле при высокоинтенсивном нагреве.

**Методы исследования.** Для решения задач, поставленных в диссертационной работе, использованы методы теории дифференциальных уравнений, методы вычислительной математики.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечена строгостью используемого математического аппарата механики сплошной среды и подтверждена сравнением результатов с известными из литературы данными.

**Научная новизна.** В диссертационной работе на основе математической модели среды с внутренними параметрами состояния предложена неклассическая модель теплопроводности твердого тела, учитывающая релаксационные эффекты.

Разработана новая математическая модель теплопроводности с внутренними параметрами состояния, учитывающая две существующие противоположные концепции описания структуры любого твердого тела – концепции непрерывности и дискретности.

На основе предложенных математических моделей получены аналитические и численные решения для задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева в одномерном случае.

Исследованы температурные поля в задаче высокоинтенсивного поверхностного нагрева в зависимости от предложенных новых кинетических уравнений внутренних параметров состояния.

**Практическая и теоретическая ценность** разработанных в диссертации неклассических математических моделей теплопроводности твердого тела, учитывающих временную и пространственную нелокальности, состоит в том, что эти модели создают основу для построения новых термодинамических моделей поведения современных конструкционных и функциональных материалов.

Разработан и зарегистрирован программный комплекс «ТСМ-sh – Расчет температурных полей в твердом теле при поверхностном нагреве», предназначенный для получения численных решений и графического

представления температурных полей в твердом теле при высокоинтенсивном нагреве (свидетельство о государственной регистрации № 2011611619).

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Математические модели теплопроводности твердого тела с внутренними параметрами состояния, учитывающие нелокальность по времени и по пространству.

2. Предложенные новые кинетические уравнения для внутренних параметров состояния.

3. Результаты расчетов температурных полей в твердом теле при высокоинтенсивном нагреве в зависимости от предложенных кинетических уравнений внутренних параметров состояния.

4. Метод исследования зависимости температурного поля твердого тела от характерного размера структурного элемента.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на XVI Школе-семинаре «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» под рук. акад. РАН А.И. Леонтьева (Санкт-Петербург, 2007), XVII Школе-семинаре «Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях» под рук. Акад. РАН А.И. Леонтьева (Жуковский, 2009), Международной школе-конференции молодых ученых «Механика 2009» (Ереван, 2009), XIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2009), IV международной школе «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2010), V Российской национальной конференции по теплообмену (Москва, 2010), XXIII международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (Саратов, 2010).

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 печатных работах, в том числе в 3 статьях из Перечня рецензируемых ведущих научных журналов и изданий [2, 8, 10] и 7 тезисах докладов [3-7, 9, 11].

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4-х глав, общих результатов и выводов и списка литературы. Работа представлена на 101 странице и содержит 42 иллюстрации. Список литературы содержит 102 наименования.

**КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, приведен обзор работ по данной теме, сформулированы цель и задачи работы, научная новизна, практическая значимость работы, основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена разработке неклассической математической модели теплопроводности, описывающей релаксационные эффекты в твердом теле. Приведены основные понятия и определяющие соотношения термодинамики необратимых процессов.

Рассмотрена модель сплошной среды с внутренними параметрами, состояние которой в окрестности любой материальной точки определено четырьмя термодинамическими функциями, являющимися активными переменными: массовыми плотностями свободной энергии  $A$  и энтропии  $h$ , тензором напряжений с компонентами  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  и вектором плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  с составляющими  $q_i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Аргументами этих функций приняты следующие реактивные переменные: тензор малой деформации с компонентами  $\varepsilon_{kl} = (\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) / 2$ , где  $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$  – составляющие вектора перемещения;  $k, l = 1, 2, 3$ ; абсолютная температура  $T(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $x_k$  – декартовы прямоугольные координаты,  $t$  – время; градиент температуры  $\vartheta$ , составляющие которого  $\vartheta_k = \partial T / \partial x_k$ ; внутренние параметры состояния: скалярный  $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$  и векторный  $\chi$  с составляющими  $\chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Физический смысл внутреннего параметра  $\Phi$  заключается в следующем. Рассмотрим некоторый объем материала, в котором микро- или наноструктурные элементы свободной формы расположены произвольным образом. В таком материале между элементами будут существовать свободные поверхности. Частицы на таких поверхностях раздела имеют возможность совершать колебания с большей частотой и амплитудой, вследствие чего можно ожидать локального повышения температуры. Введенный внутренний параметр  $\Phi$ , называемый иногда термодинамической температурой, позволяет учесть такие процессы, протекающие на микроуровне.

Векторный параметр с составляющими  $\chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$  характеризует процесс распространения теплоты и может быть ассоциирован с решеточным (фононным), электронным и др. физическими процессами теплопроводности. В работе полагаем, что в материале определяющим является фононный процесс теплопроводности.

На основе представления о движении фононов в кристаллических решетках предложены новые кинетические уравнения для внутренних параметров состояния, в которых учтено, что время релаксации внутреннего параметра, характеризующего процесс распространения теплоты, может зависеть от направления, а также учтено влияние доли поверхностей раздела (а следовательно, размера структурных зерен) на распределение температуры:

$$\tau_{ij}^{(q)} \dot{\chi}_j + A_{ij} \chi_j = \bar{\chi}_i, \quad \tau_T \dot{\Phi} + A_{44} \Phi = \bar{\Phi}, \quad (1)$$

где  $\bar{\chi}_i$ ,  $\bar{\Phi}$  – функции, определяющие равновесные значения внутренних параметров состояния;  $\tau_{ij}^{(q)}$  – компоненты матрицы времен релаксации внутреннего параметра  $\chi$  (предполагается, что время релаксации внутреннего параметра, характеризующего процесс распространения теплоты, может зависеть от направления),  $\tau_{ij}^{(q)} = \tau_q \tau_{ij}^0$ ,  $\tau_{ij}^0$  – компоненты симметрической матрицы  $T^{(0)}$ ,  $\|T^{(0)}\| = 1$ ,  $\tau_q$  – некоторый коэффициент при матрице времен релаксации,  $A_{ij}$  –

компоненты матричного коэффициента, характеризующего взаимное влияние направлений распространения теплоты,  $A_{ij} = A_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\det A_{ij} > 0$ ,  $\tau_T$  – время релаксации внутреннего параметра  $\Phi$ ,  $A_{44}$  – коэффициент, зависящий от доли свободной поверхности в материале,  $0 < A_{44} \leq 1$ .

Равновесные функций  $\bar{\chi}_i$ ,  $\bar{\Phi}$  и вектор плотности теплового потока  $q$  выбраны следующим образом:

$$q_i = \varphi_{ij} \chi_j, \quad \bar{\Phi} = T, \quad \bar{\chi}_i = -Z_{ij}^{(1)} \partial T / \partial x_j - Z_{ij}^{(2)} \partial \Phi / \partial x_j. \quad (2)$$

На основе соотношений рациональной термодинамики получена система определяющих уравнений:

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c'_\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -T C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - D_{ijkl} \beta_{kl}. \quad (4)$$

Здесь  $c_\varepsilon$  и  $c'_\varepsilon$  – удельные массовые теплоемкости при постоянной деформации, определяющие изменение свободной энергии пропорционально  $\dot{T}$  и  $\dot{\Phi}$  соответственно;  $\rho$  – плотность материала;  $C_{ijkl}$ ,  $D_{ijkl}$  – компоненты тензоров, характеризующих термомеханические свойства твердого тела;  $q_V$  – объемная плотность мощности источников тепловыделения;  $\delta$  – диссипативная функция.

Уравнение теплопроводности (3), соотношения (2) и (4) и кинетические уравнения (1) описывают релаксационные эффекты в твердом теле применительно к достаточно широкому классу термомеханических процессов. Второй член в левой части уравнения (3) и второй член в правой части уравнения (4) отражают запаздывание процесса аккумуляции теплоты при быстром нагревании или охлаждении. Первый член в правой части уравнения (3) учитывает эффекты связанности полей температуры и деформации.

В частных случаях построенный вариант термомеханической модели твердого тела переходит в известные модели сплошной среды. При  $\tau_T \rightarrow 0$  и  $\tau_q \rightarrow 0$  уравнения (3), (4) описывают поведение термоупругой линейной среды, причем уравнение (3) переходит в параболическое уравнение теплопроводности, учитывающее эффекты термомеханической связанности. Если  $\tau_T \neq 0$  и  $\tau_q \rightarrow 0$ , то процесс переноса теплоты происходит с бесконечной скоростью и присутствует аккумуляция теплоты с запаздыванием, зависящим от значения  $\tau_T$ . При  $\tau_T \rightarrow 0$  и  $\tau_q \neq 0$  аккумуляция теплоты происходит без запаздывания, но процесс переноса теплоты имеет волновой характер.

Получены условия на поверхности разрыва искомых функций, а также соотношения для скорости переноса теплоты в предложенной математической модели.

Во второй главе выполнен анализ влияния внутренних параметров и параметров нагрева при различных кинетических уравнениях на распределение температуры в материале. Рассмотрена задача высокоинтенсивного поверхностного нагрева. Эффекты связанности полей температуры и деформации и объемного тепловыделения не учитывались. Для анализа использована одномерная расчетная схема – изотропное и однородное полупространство, в



предположении, что температура зависит только от координаты  $x_1$ , направленной в глубь полупространства, и времени  $t$ .

В первом разделе рассмотрены кинетические уравнения вида:

$$\tau_q \dot{\chi}_i = \bar{\chi}_i - \chi_i, \quad \tau_T \dot{\Phi} = \bar{\Phi} - \Phi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Записаны уравнение теплопроводности и краевые условия в одномерном случае в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{D_T^2} \int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{\bar{t}-t'}{D_T^2}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt' &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{\bar{t}-t'}{D_q^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dt', \\ \theta(z, \bar{t})|_{\bar{t}=0} &= 0, \quad \frac{\partial \theta(z, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{t}=0} = 0, \\ -\frac{\partial \theta(z, \bar{t})}{\partial z} + \int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{\bar{t}-t'}{D_q^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \theta(z, t')}{\partial z} dt' \Big|_{z=0} &= q_0, \quad z \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \theta(z, \bar{t})}{\partial z} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь  $z = x_1 / \sqrt{at_0}$ ,  $\bar{t} = t/t_0$ ,  $\theta = (T - T_0)/T^*$ ,  $D_q^2 = \tau_q/t_0$ ,  $D_T^2 = \tau_T/t_0$ ,  $a = \lambda^{(T)}/(\rho c)$ ,

$T^* = Bt_0^m \sqrt{at_0}/\lambda^{(T)}$ ,  $q_0(\bar{t}) = M\bar{t}^m \exp(-m\bar{t})$ ,  $m \geq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $M = m^m/(m-1)!$ , что обеспечивает максимум функции  $q_0(\bar{t})$  при  $\bar{t} = 1$  для всех  $m$  и  $\int_0^{\infty} q_0(\bar{t}) d\bar{t} = 1$ .

Рассмотрены следующие модели:

модель 1 – скорость распространения теплоты конечна, отсутствует запаздывание при аккумуляции теплоты ( $\tau_T \rightarrow 0$ );

модель 2 – скорость распространения теплоты бесконечна ( $\tau_q \rightarrow 0$ ), присутствует запаздывание при аккумуляции теплоты;

модель 3 – скорость распространения теплоты конечна, присутствует запаздывание при аккумуляции теплоты.

В случае модели 1 получено аналитическое решение, в случае моделей 2 и 3 получены приближенные аналитические решения. Для нахождения решений использовался операционный метод, базирующийся на интегральном преобразовании Лапласа.

Показано, что с увеличением параметра  $D_q^2$ , т.е. с уменьшением скорости распространения теплоты, значения температуры в рассмотренных случаях значительно отличаются друг от друга (рис. 1, а, б). Это различие увеличивается с увеличением значения параметра  $D_T^2$ . Таким образом, чем больше скорость запаздывания при аккумуляции теплоты, тем важнее учитывать это явление для получения более точной картины распределения температуры. Глубина проникновения теплоты при учете конечной скорости ее распространения ограничена величиной  $z = \bar{t}/D_q$ .

Во втором разделе выполнена оценка влияния на распределение температуры матричных коэффициентов с компонентами  $\tau_{ij}^{(q)}$  и  $A_{ij}$ .

Вначале рассмотрены кинетические уравнения вида:

$$\tau_{ij}^{(q)} \dot{\chi}_j = \bar{\chi}_i - \chi_i, \quad \tau_T \dot{\Phi} = \bar{\Phi} - \Phi, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

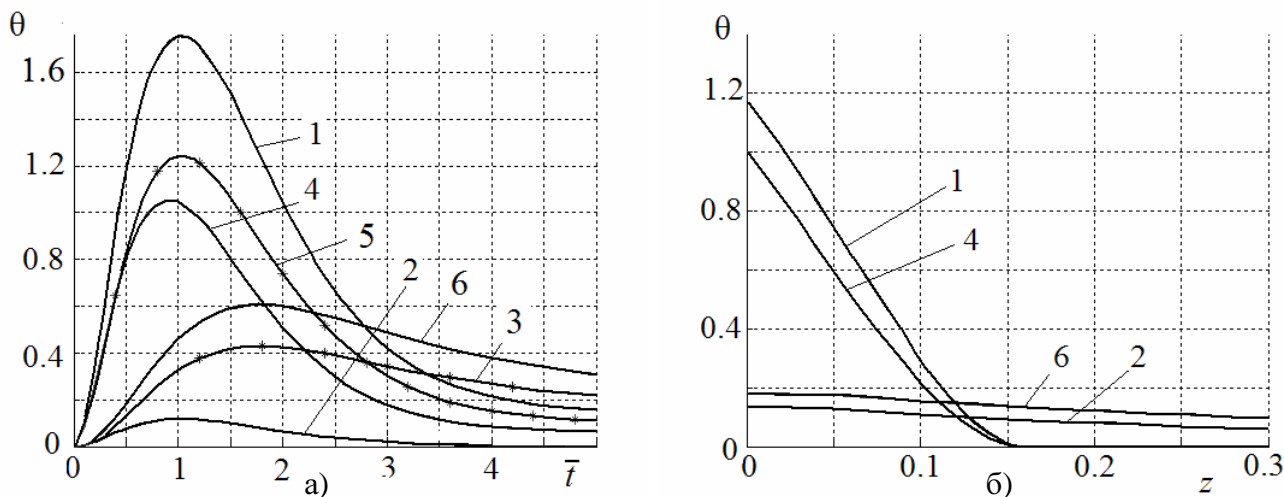


Рис. 1. Изменение температуры поверхности полупространства по времени,  $z = 0$  (а); распределение температуры по глубине полупространства,  $\bar{t} = 0.5$  (б);  $D_q^2 = 10$ ;  $D_T^2 = 0.1$ ; 1 – модель 1; 2 – модель 2,  $\bar{t} \rightarrow 0$ ; 3 – модель 2,  $\bar{t} \rightarrow \infty$ ; 4 – модель 3,  $\bar{t} \rightarrow 0$ ; 5 – модель 3,  $\bar{t} \rightarrow \infty$ ; 6 – параболическое уравнение теплопроводности

В безразмерной форме записаны уравнение теплопроводности и краевые условия в одномерном случае:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{D_T^2} \int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{\bar{t}-t'}{D_T^2}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt' = \sum_{\mu=1,2,3} \left( \tilde{C}_\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \tilde{C}_\mu \int_0^{\bar{t}} \exp(-\lambda_\mu (\bar{t}-t')/D_q^2) \frac{\partial^3 \theta}{\partial t' \partial z^2} dt' \right).$$

$$\theta(z, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta(z, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{t}=0} = 0,$$

$$- \sum_{\mu=1,2,3} \left( \tilde{C}_\mu \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tilde{C}_\mu \int_0^{\bar{t}} \exp(-\lambda_\mu (\bar{t}-t')/D_q^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t' \partial z} dt' \right) \Big|_{z=0} = q_0, \quad z \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \theta(z, \bar{t})}{\partial z} \rightarrow 0.$$

Рассмотрены следующие модели:

модель 4 – скорость распространения теплоты конечна, отсутствует запаздывание при аккумуляции теплоты ( $\tau_T \rightarrow 0$ );

модель 5 – скорость распространения теплоты конечна, присутствует запаздывание при аккумуляции теплоты.

Для оценки влияния на распределение температуры матричного коэффициента с компонентами  $A_{ij}$  рассмотрена модель 6, для которой кинетические уравнения для внутренних параметров состояния записаны следующим образом:

$$\tau_q \dot{\chi}_i + A_{ij} \chi_j = \bar{\chi}_i, \quad \tau_T \dot{\Phi} = \bar{\Phi} - \Phi, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В этом случае задача сводится к задаче в случае модели 5, отличие состоит лишь в расчетных коэффициентах.

Для моделей 4, 5 и 6 получены приближенные аналитические решения с помощью интегральных преобразований Лапласа.

В третьем разделе на основе предложенной в первой главе неклассической модели выполнена оценка теплофизических свойств материала с микро- и наноструктурой.

Для оценки теплоемкости рассмотрен случай, соответствующий стандартным методам измерения теплоемкости материала: медленное нагревание

тела объемом  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ . Тогда, положив  $\chi_i \equiv 0$ ,  $q_v \equiv 0$ , без учета связанности полей температуры и деформации ( $c = c_\varepsilon$ ,  $c' = c'_\varepsilon$ ) при однородной по объему тела температуре получено следующее уравнение:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c' \left( (1 - A_{44}) \frac{T_0}{\tau_T} \exp\left(-\frac{t}{\tau_T / A_{44}}\right) + \frac{1}{A_{44}} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_T / A_{44}}\right) - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T / A_{44}}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial t'^2} dt' \right) = \frac{\tilde{q}(t) S}{V},$$

где  $T_0$  – начальная температура;  $\tilde{q}(t)$  – плотность подводимого к телу теплового потока.

При  $\tau_T \rightarrow 0$  последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$\rho(c + c' / A_{44}) \dot{T} = \tilde{q}(t) S / V,$$

т.е. удельная массовая теплоемкость в предложенной модели может отличаться от соответствующей величины для массивных материалов на  $c' / A_{44}$ . Этот эффект в соответствующей литературе объясняют изменением вида и границ фононного спектра, т.е. изменением функции распределения частот колебаний атомов. При этом в случае малых частиц в теплоемкости присутствует вклад, обусловленный их большой поверхностью, и поэтому можно ожидать увеличение теплоемкости в несколько раз.

Для оценки теплопроводности материала с микро- или наноструктурой положим в (1) и (2)  $Z_{ij}^{(2)} = 0$ ,  $A_{i4} = 0$  и  $\tau_q \dot{\chi}_i \approx 0$ . Тогда из (1)  $\chi_j = B_{ji} \bar{\chi}_i$ ,  $B_{ji} = A_{ij}^{-1}$  и в соответствии с первым равенством в (2) имеем

$$q_i = \varphi_{ik} B_{kj} \bar{\chi}_j = -\varphi_{ik} B_{km} Z_{mj}^{(1)} \partial T / \partial x_j = -\Lambda_{ij} \partial T / \partial x_j,$$

где  $\Lambda_{ij} = \varphi_{ik} B_{km} Z_{mj}^{(1)}$  – компоненты тензора теплопроводности наноструктурных материалов. Показано, что параметры  $B_{ij} = B_{ji}$  позволяют учесть локальную анизотропию теплопроводности материалов с микро- и наноструктурой при изотропии материалов в макромасштабе. Для массивных материалов  $B_{km} = \delta_{km}$ .

Снижение теплопроводности нанометаллов обусловлено рассеянием электронов на межзеренных границах, а для диэлектриков и полупроводников – рассеянием фононов на поверхностях раздела элементов наноструктуры. Введение в определяющие уравнения параметров  $B_{ij}$  позволяет учесть эти процессы при построении феноменологической модели.

Показано, что выражение для теплопроводности изотропного наноструктурного материала можно представить следующим образом:

$$\Lambda_{ij} = \lambda B_0 \delta_{ij},$$

где  $B_0$  – коэффициент, зависящий от размера структурного элемента,  $\lambda$  – теплопроводность массивного материала. Так как теплопроводность наноструктурного материала меньше теплопроводности массивного материала, то  $0 < B_0 < 1$ . Если положить, что такая зависимость для  $B_0$  универсальна для всех материалов, то при известной теплопроводности массивного материала будет возможно прогнозирование теплопроводности наноструктурного материала.

Подтверждение такого рассуждения содержится в работе Янга, Бя, Томсона (H.-S. Yang, G.-R. Bai, L. J. Thompson).

В четвертом разделе показано, что значение коэффициента  $A_{44}$ , отвечающего за размер структурного элемента материала в кинетических уравнениях (1), значительно влияет на значение внутреннего параметра  $\Phi$ , называемого термодинамической температурой. Выполнено сравнение значений абсолютной температуры  $T$  и термодинамической  $\Phi$  для модели 3 при некотором наборе параметров (рис. 2, а, б).

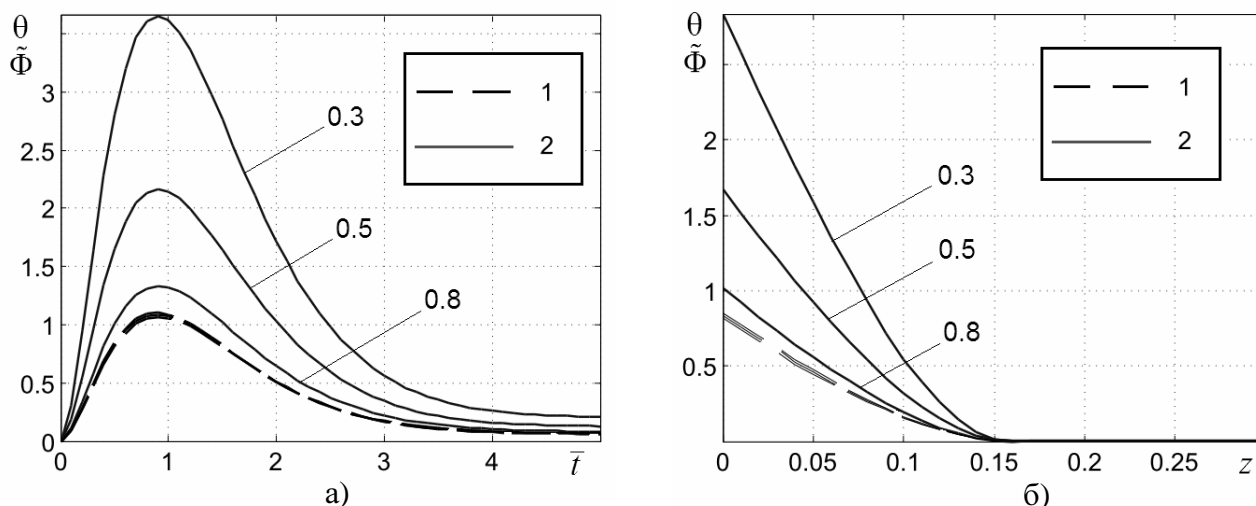


Рис. 2. Сравнение абсолютной и термодинамической безразмерных температур,  $D_q^2 = 10$ ,  $D_T^2 = 0.1$ : распределения температуры во времени для нагреваемой поверхности тела  $z = 0$  (а); распределения температуры по глубине тела  $\bar{t} = 0.5$  (б); 1 – абсолютная  $\theta$ ; 2 – термодинамическая  $\tilde{\Phi}$ ; числа у кривых – значения  $A_{44}$

В третьей главе выполнено численное моделирование процесса теплопроводности в задаче высокоинтенсивного поверхностного нагрева с использованием конечно-элементной процедуры в форме метода Бубнова-Галеркина с линейными координатными функциями. Проведен анализ результатов решения.

В первом разделе в качестве тестовой задачи рассмотрена задача поверхностного нагрева, описываемая моделью 1, для которой во второй главе было получено точное аналитическое решение. Для этой модели получена система интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных узловых значений температуры:

$$[C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} - \int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{\bar{t}-t'}{D_q^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} [K]\{\theta\} dt' = \{F\}. \quad (5)$$

В этой системе компоненты безразмерных матриц теплоемкости  $[C]$ , теплопроводности  $[K]$  и вектора тепловой нагрузки  $\{F\}$  определяются соотношениями

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} N_i N_j dV, \quad K_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV, \quad F_i = q_0(\bar{t}) \delta_{i1}, \quad (6)$$

где  $N_i, N_j$  – линейные координатные функции,  $E$  – количество конечных элементов,  $V^{(e)}$  – длина конечного элемента.

Отмечено, что при использовании традиционной формулировки МКЭ в виде (5), (6) в начальные моменты времени нестационарного процесса теплопроводности могут возникнуть осцилляции решения в точках конечно-элементной сетки вблизи нагреваемой поверхности. Эти осцилляции могут быть объяснены проявлением неконсервативности схемы МКЭ для одного элемента при консервативности всей системы в целом. Наиболее ярко этот эффект заметен в тех случаях, когда велики тепловые нагрузки на нагреваемой поверхности. Избавиться от осцилляций решения можно путем диагонализации матрицы теплоемкости  $[C]$ . В работе матрица  $[C]$  приводилась к диагональной форме следующим образом:  $C_{ii}^{*(e)} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(e)}$ .

На рис. 3 представлены в сравнении аналитические и численные решения для модели 1. Очевидно, что шаг интегрирования существенно влияет на точность получаемых результатов.

На рис. 4, а изображены кривые, характеризующие изменение абсолютной величины ошибки  $\xi = |\theta_{\text{числ}} - \theta_{\text{анал}}|$  расчета температуры нагреваемой поверхности в момент времени  $\bar{t} = 5$  для ряда значений  $D_q^2$  в зависимости от шага интегрирования  $\Delta \bar{t}$ .

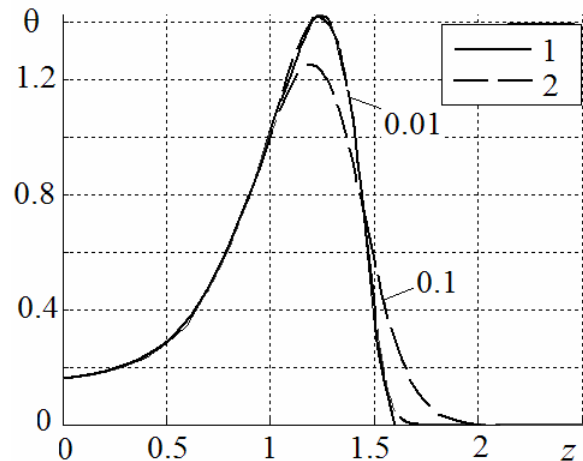


Рис. 3 Сравнение аналитического и численного решений для модели 1,  $\bar{t} = 5$ ,  $D_q^2 = 10$ , цифры у кривых - значения  $\Delta \bar{t}$ ; 1 – аналитическое решение, 2 – численное решение

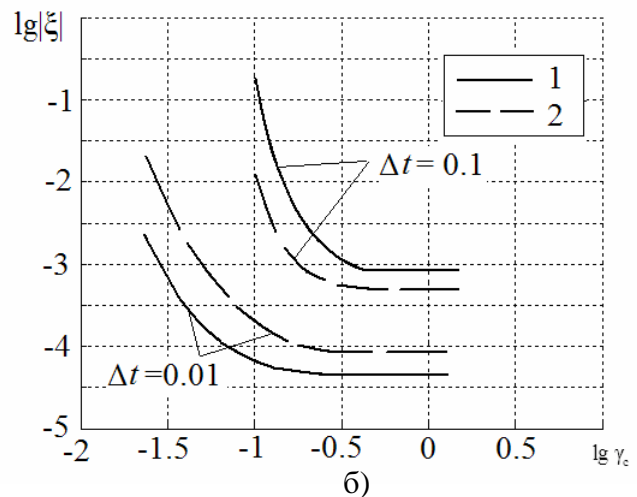
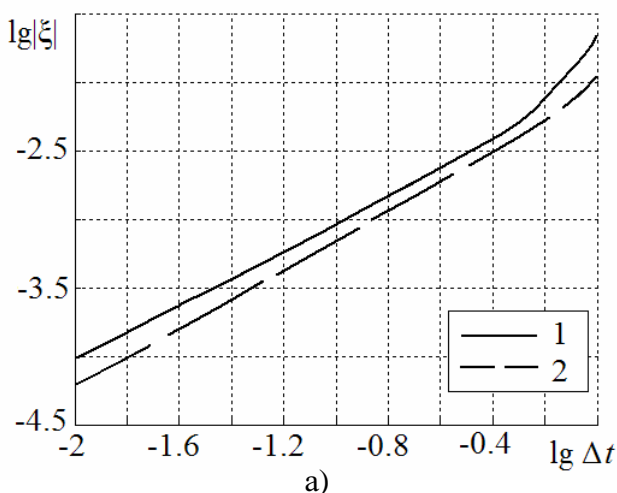


Рис. 4. Зависимость абсолютной ошибки расчета температуры нагреваемой поверхности для модели 1 от  $\Delta \bar{t}$  при  $\bar{t} = 5$  и  $\gamma_c = 1$  (а) и от  $\gamma_c$  при  $\bar{t} = 5$  (б); цифры у кривых – значения  $\Delta \bar{t}$ ; 1 –  $D_q^2 = 10$ , 2 –  $D_q^2 = 1$

Из приведенных результатов следует, что с увеличением шага интегрирования погрешность численного решения возрастает, что объясняется ухудшением временной аппроксимации. Очевидна также зависимость  $\xi$  от параметра  $D_q^2$ : погрешность численного решения тем больше при заданном шаге

интегрирования  $\Delta \bar{t}$ , чем больше значение  $D_q^2$ . Уменьшение  $\Delta \bar{t}$  при заданном  $D_q^2$  приводит к уменьшению абсолютной величины ошибки, но время счета на ЭВМ при этом значительно возрастает.

Было проведено также исследование влияния параметра Куранта  $\gamma_c$  на точность численного решения задачи. В процессе численного эксперимента было показано (рис. 4, б), что уменьшение  $\gamma_c$  приводит к возрастанию абсолютной величины ошибки  $\xi$ . Причина этого явления заключается в ухудшении пространственной аппроксимации при заданном шаге интегрирования  $\Delta \bar{t}$ . В то же время увеличение  $\gamma_c$ , как следует из представленных на рис. 4, б кривых, не приводит к уменьшению ошибки численного решения, а время счета возрастает.

Во втором разделе по аналогии получены разностные схемы для остальных моделей, предложенных во второй главе. Представлены в сравнении приближенные аналитические и численные решения для различных моделей.

**Четвертая глава** посвящена неклассической математической модели теплопроводности для сплошной среды с внутренними параметрами состояния, учитывающей еще и нелокальность по пространству. Ключевым моментом здесь стало установление связи между характеристиками микро-(нано-)уровня и макроуровня.

В первом разделе, как и ранее, рассмотрены два внутренних параметра состояния: скалярный  $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$  и векторный с составляющими  $\chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ . В линейном приближении кинетические уравнения, описывающие изменения внутренних параметров состояния во времени, записаны следующим образом:

$$\tau_T \dot{\Phi} + A_{44} \Phi = \bar{\Phi}, \quad \tau_q \dot{\chi}_i + A_{ij} \chi_j = \bar{\chi}_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

При больших флуктуациях физических характеристик микроскопических элементов материала с микроструктурой его уже нельзя считать простым, а физические характеристики микроскопических элементов подвержены влиянию прочих окружающих элементов структуры, т.е. имеет место так называемая нелокальность частиц.

Положив, что составляющие вектора плотности теплового потока линейно зависят от  $\chi_i$ , и вектор  $\chi$  характеризует процесс переноса энергии на молекулярном и субмолекулярном уровне, а  $q$  - на макроуровне, представлен учет перехода от одного уровня к другому в интегральной форме:

$$q_i = \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \chi_j(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'), \quad (7)$$

где  $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$  при  $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$  и  $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = 0$  при  $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \notin V'$ ,  $\mathbf{x}' \in V'$ ,  $V'$  - область частицы структуры,  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ ;  $V$  - характерный объем тела.

Равновесные значения переменных микроуровня  $\bar{\Phi}$  и  $\bar{\chi}_i$  представлены следующим образом:

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) T(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'), \quad \bar{\chi}_i(\mathbf{x}, t) = - \int_V Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_j} dV(\mathbf{x}'), \quad (8)$$

где  $\varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$  и  $Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$  только при  $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$  и  $\mathbf{x}' \in V'$ .

Соотношения, аналогичные (7) и (8), используют в механике деформируемого твердого тела при построении нелокальных зависимостей

компонент тензора напряжений от компонент тензора деформации. Похожее соотношение использует в своих работах К. Эринген, однако без применения представлений о физико-механических процессах переноса теплоты с использованием внутренних параметров состояния.

Для предложенной модели записано уравнение теплопроводности при условии, что рассматриваются только равновесные процессы и сравнительно небольшие отклонения значений абсолютной температуры от температуры  $T_0$  естественного состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial t} dV(\mathbf{x}') = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \int_V Y_{jk}(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t)}{\partial x_k} dV(\mathbf{x}'') dV(\mathbf{x}') + q_v, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $Y_{jk}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = B_{ji} Z_{ik}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ ,  $B_{ji} = (A_{ij})^{-1}$ .

Уравнение (9) принципиально отличается от рассмотренного ранее, оно позволяет рассматривать процесс теплопроводности на макроуровне с учетом процессов микроуровня. При этом интегрально учтено взаимное влияние процессов макро- и микроуровня.

В работе показан предельный переход от предложенной модели теплопроводности к хорошо известной модели, описываемой уравнением параболического типа, в предположении, что функции влияния можно представить в виде:

$$\varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_T^0 \varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \quad \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_{ij}^0 \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|),$$

$$Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Z_{ij}^0 \varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad \text{и} \quad Y_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Y_{ij}^0 \varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|),$$

где  $\varphi_T^0$ ,  $\varphi_{ij}^0$ ,  $Z_{ij}^0$ ,  $Y_{ij}^0$  – константы;  $\varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ ,  $\varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ ,  $\varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ ,  $\varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$  – единичные функции влияния такие, что  $\int_{V'} \varphi_\mu(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ;

$(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$ ,  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ .

Во втором разделе выполнена оценка зависимости распространения теплоты в твердом теле от функций влияния на примере одномерной задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева.

Функции влияния в одномерном случае выбраны следующим образом:

$$\varphi_\mu(|x' - x|) = \varphi(|x' - x|) = (1 - |x' - x|/a)/a, \quad |x' - x| \leq a, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

где  $a$  – характерный размер структурного элемента.

Записаны уравнение теплопроводности и краевые условия для задачи поверхностного нагрева:

$$\rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi(|x' - x|) \frac{\partial T(x', t)}{\partial t} dV(x') = \lambda^{(T)} \frac{\partial}{\partial x} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x'),$$

$$t = 0 \quad T(x, 0) = T_0,$$

$$x = 0 \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x') = q_s,$$

$$x \rightarrow \infty \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x') = 0,$$

где  $\lambda^{(T)}$  – теплопроводность тела,  $q_S = VMt^m \exp(-mt/t_0)$ .

С помощью конечно-элементной процедуры в форме метода Бубнова-Галеркина, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\},$$

где компоненты  $F_p$  вектора  $\{F\}$  и  $C_{pq}$ ,  $K_{pq}$  матриц  $[C]$ ,  $[K]$  определяются следующими соотношениями:

$$F_p = q_S(t)\delta_{p1}, \quad C_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{\rho c}{A_{44}} \left( \int_V \varphi(|x' - x|) N_q(x') dx' \right) N_p(x) dx,$$

$$K_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \lambda^{(T)} \left( \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{dN_q(x'')}{dx''} dx'' dx' \right) \frac{dN_p(x)}{dx} dx,$$

где  $E$  – число конечных элементов,  $V^{(e)}$  – длина конечного элемента,  $N_p$ ,  $N_q$  – зависящие от координаты  $x$  одномерные квадратичные функции формы,  $p, q = \overline{1, n}$  – номера узлов сетки.

Показано, что использование линейных функций формы приведет к исчезновению зависимости элементов  $K_{pq}$  от функций влияния  $\varphi(|x' - x|)$  и, соответственно, от характерного размера структурного элемента  $a$ , что не соответствует реальным сведениям о теплопроводности наноструктурных материалов.

Для вычисления элементов  $C_{pq}$ ,  $K_{pq}$  предложены два варианта расположения функции влияния относительно конечного элемента (рис. 5, а, б). В первом варианте максимальное значение функция влияния достигает в центре структурного элемента, во втором варианте – на границах структурного элемента. Для оценки влияния характерного размера  $a$  на распределение температуры рассмотрены случаи  $a = a_1 = d$ ;  $a = a_2 = d/2$ ;  $a = a_3 = d/4$ .

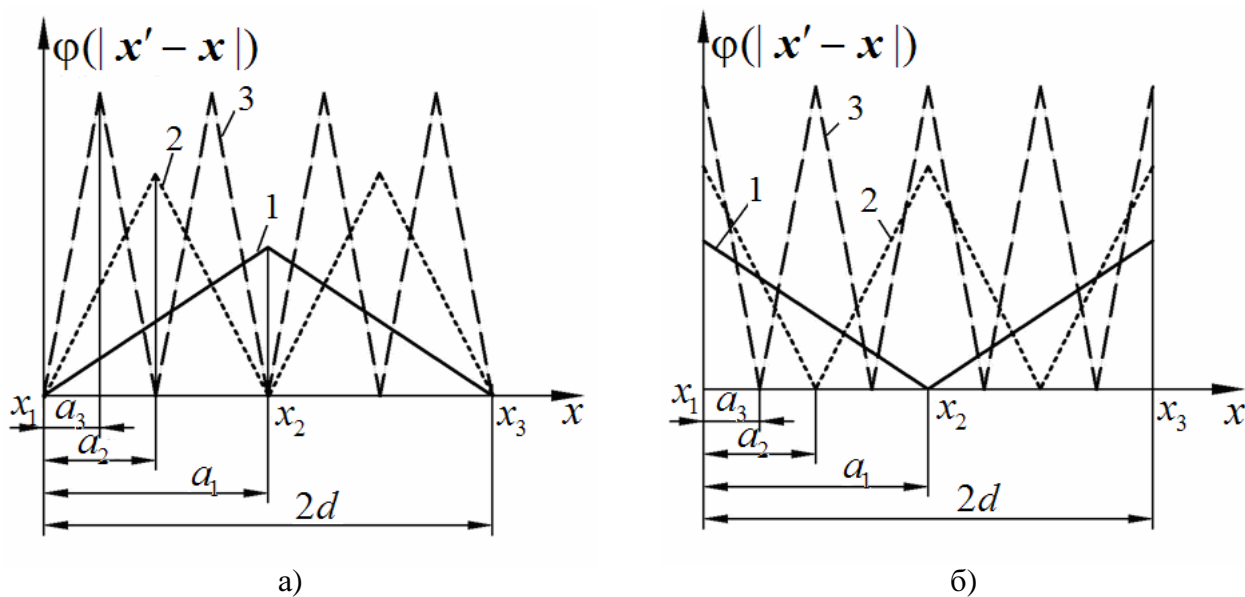


Рис. 5. Расположение функций влияния относительно конечного элемента:  
1 –  $a = a_1$ , 2 –  $a = a_2$ , 3 –  $a = a_3$



Показано (рис. 6, а, б), что распределение температуры в теле зависит от расположения функций влияния относительно функций формы. При этом для обоих вариантов с уменьшением характерного размера  $a$  уменьшаются и значения температуры. В наноструктурном материале уменьшение характерного размера зерна приводит к увеличению доли границ раздела и, следовательно, к увеличению рассеяния энергии на границах раздела, что соответствует понижению температуры тела.

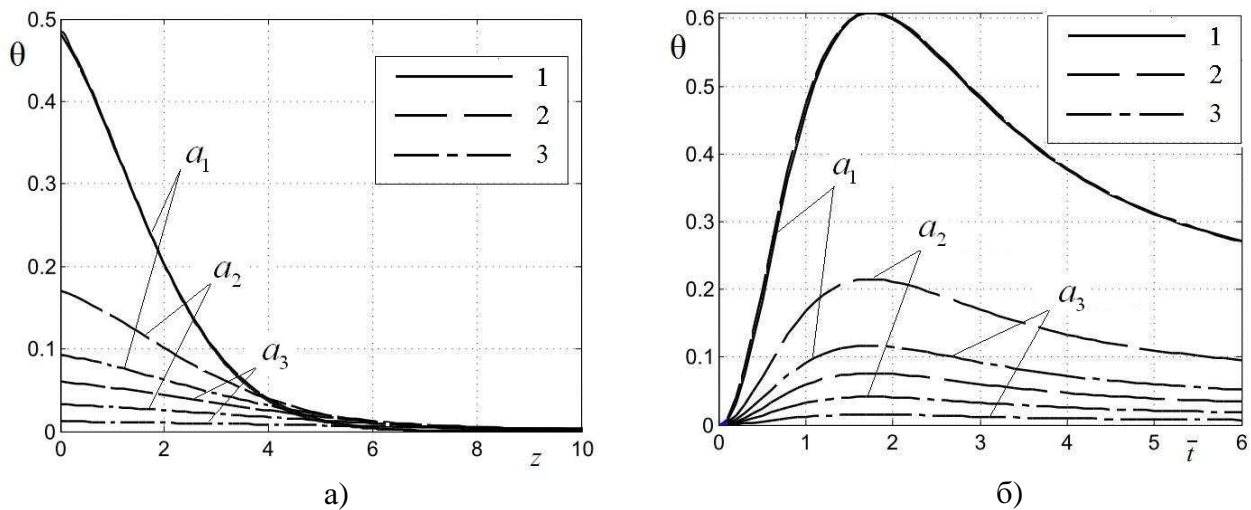


Рис. 6. Распределения температуры по глубине тела при  $\bar{t} = 3$  (а); распределения температуры во времени для нагреваемой поверхности тела  $z = 0$  (б): 1 – параболическое уравнение теплопроводности; 2 – первый вариант расположения функций влияния относительно функций формы (см. рис. 5, а); 3 – второй вариант (см. рис. 5, б)

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработаны неклассические математические модели теплопроводности среды с внутренними параметрами состояния, учитывающие нелокальность по времени и по пространству.

2. Показано, что предложенные новые кинетические уравнения для внутренних параметров состояния позволяют учесть эффекты запаздывания при аккумуляции и распространении теплоты, а также влияние размера структурного элемента на температурное поле.

3. Получены аналитические и численные решения для задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева в одномерном случае и проведен анализ, позволяющий оценить влияние параметров нагрева и свойств материала на температурные поля при различных кинетических уравнениях для внутренних параметров состояния.

4. Разработан программный комплекс «ТСМ-sh – Расчет температурных полей в твердом теле при поверхностном нагреве», позволяющий выполнять численные расчеты и получать графическое представление распределения температуры в теле. Свидетельство о государственной регистрации № 2011611619 от 17 февраля 2011 г.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ

### В РАБОТАХ

1. Свидетельство о государственной регистрации программы № 2011611619. TCM-sh – Расчет температурных полей в твердом теле при поверхностном нагреве / Савельева И.Ю. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 17.02.11.

**2. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Моделирование температурных полей в твердом теле при поверхностном нагреве // Тепловые процессы в технике. М., 2009. Т.1, № 9. С. 375-378.**

3. Савельева И.Ю. Моделирование нестационарной теплопроводности с учетом особенностей строения материала // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях: Труды XVII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под рук. академика РАН А.И. Леонтьева. М., 2009. Т.1. С. 241-244.

4. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Релаксационные модели деформируемого твердого тела // Механика: Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых. Ереван, 2009. С. 66-75.

5. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Некоторые релаксационные модели наноструктурных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XIII международной конференции. Ростов-на-Дону, 2009. С. 116-120.

6. Савельева И.Ю. О теплопроводности наноструктурных материалов // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов IV международной школы. Саров, 2010. С. 96-98.

7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическое моделирование термомеханических процессов в наноструктурных материалах // Труды V Российской национальной конференции по теплообмену. М., 2010. Т.1. С. 207-210.

**8. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель теплопроводности новых конструкционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. М., 2010. №3. С. 72-85.**

9. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Одна математическая модель теплопроводности наноструктурных материалов // Математические методы в технике и технологиях: Сборник трудов XXIII международной научной конференции. Саратов, 2010. Т.3. С. 13-14.

**10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Нелокальная математическая модель теплопроводности в твердых телах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. М., 2011. №3. С. 20-30.**

11. Чалая И.Ю. (Савельева И.Ю.) Моделирование температурных полей в твердом теле при импульсном нагреве // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под рук. академика РАН А.И. Леонтьева. М., 2007. Т.2. С. 193-196.