

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

А.С.Газарян, Г.П.Клюева, Н.А.Сухова

Утверждена
редакцией МВТУ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Методическая разработка

ИЗГИБ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ

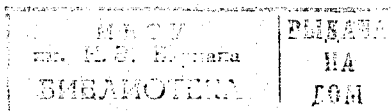
Под редакцией Э.М.Конюшко

МВТУ им. Н.Э.Баумана



126251R

Ретросонд



Данная методическая разработка издаётся в соответствии с учебным планом.
Рассмотрена и одобрена кафедрой К-5 30.II.79 г., Методической комиссией факультета К и Учебно-методическим управлением.

Рецензент к.т.н. доц. В.В.Трофимов

Графические работы выполнены И.Д.Кисенко.

© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

В настоящей методической разработке представлены образцы расчетно-графических домашних заданий по разделу "Изгиб балок и плоских рам". При работе над домашним заданием следует учитывать общие рекомендации и указания по методике выполнения расчетно-графических работ по курсу "Сопротивление материалов", изложенные в методической разработке тех же авторов "Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов. Растяжение-сжатие." - М.: изд. МВТУ, 1980.

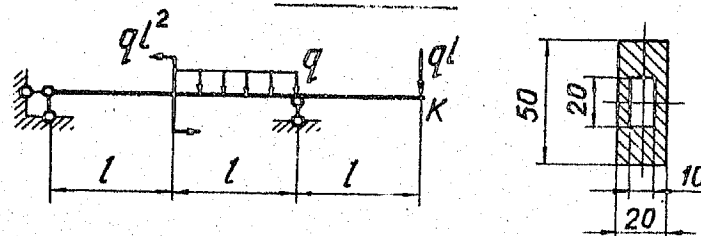
Корректор В.Т.Карасева

Заказ 881 Объем 2,1 п.л. (2 уч.-изд.л.) Тираж 2000 экз.
Бесплатно Подписано к печати 23.03.80г. План 1980 г., №7 доп.

Ротапринт МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

1. Статически определимые задачи изгиба

Задача 1.1

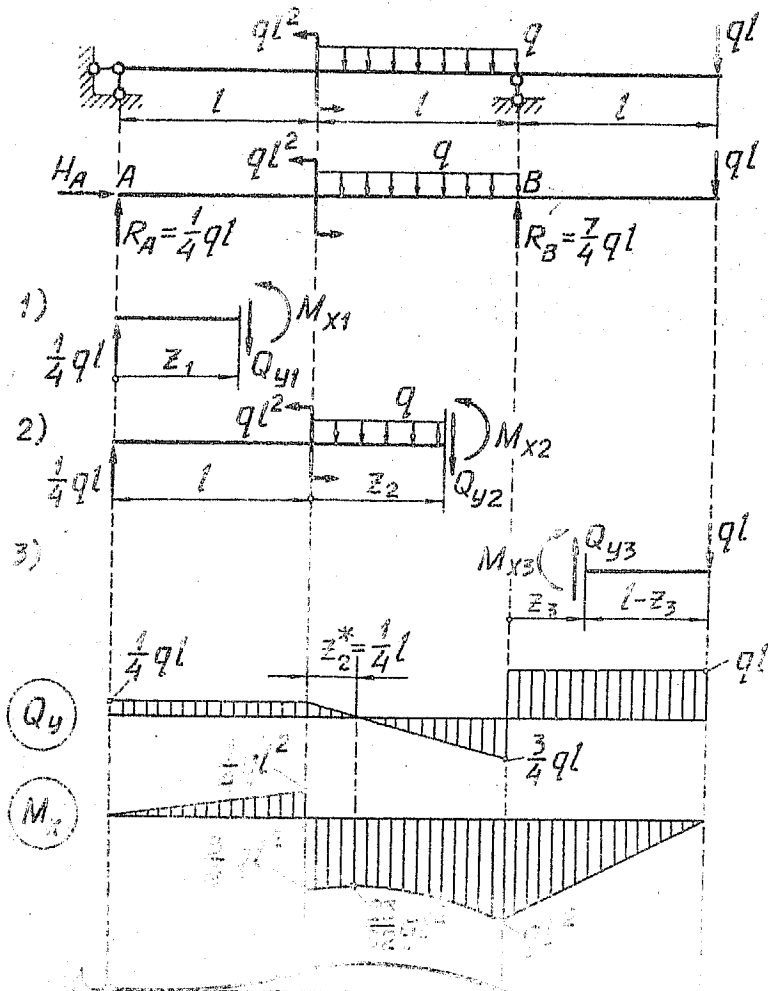


Для заданной балки постоянной жесткости требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x ;
- 2) определить коэффициент запаса по текучести при $q = 5 \text{ кН/м}$, $l = 0,5 \text{ м}$, $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 280 \text{ МПа}$ (размеры поперечного сечения даны в мм);
- 3) определить угол поворота сечения К ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$);
- 4) изобразить вид оси изогнутой балки.

Решение

1. Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x



Уравнения статического равновесия:

$$\sum \text{топ} A = 0, \quad ql^2 - ql \cdot \frac{3}{2}l - ql \cdot 3l + R_B \cdot 2l = 0, \quad R_B = \frac{7}{4}ql;$$

$$\sum \text{топ} B = 0, \quad -ql \cdot l + ql^2 + ql \cdot \frac{1}{2} - R_A \cdot 2l = 0, \quad R_A = \frac{1}{4}ql.$$

Поперечные силы и изгибающие моменты:

$$1) \quad 0 \leq z_1 \leq l, \quad Q_{y1} = \frac{1}{4}ql, \quad M_{x1} = \frac{1}{4}qlz_1;$$

$$2) \quad 0 \leq z_2 \leq l, \quad \frac{1}{4}ql - qz_2 - Q_{y2} = 0, \quad Q_{y2} = \frac{1}{4}ql - qz_2;$$

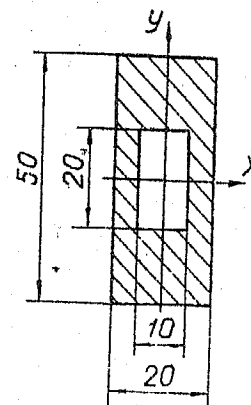
$$M_{x2} = \frac{1}{4}ql(l + z_2) - ql^2 - \frac{qz_2^2}{2},$$

$$\frac{dM_{x2}}{dz_2} = \frac{1}{4}ql - qz_2^* = 0, \quad z_2^* = \frac{1}{4}l,$$

$$M_{x2}^{\text{экстр}} = \frac{1}{4}ql\left(l + \frac{1}{4}l\right) - ql^2 - \frac{q}{2}\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = -\frac{23}{32}ql^2;$$

$$3) \quad 0 \leq z_3 \leq l, \quad Q_{y3} = ql, \quad M_{x3} = -ql(l - z_3).$$

2. Определение коэффициента запаса по текучести



Коэффициент запаса $n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{max}}}$.

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{x \text{ max}}}{W_x}, \quad W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}}$$

Осей момент сопротивления W_x вычисляем в см^3 :

$$J_x = \frac{2 \cdot 5^3}{12} - \frac{1 \cdot 2^3}{12} = 20,2 \text{ см}^4,$$

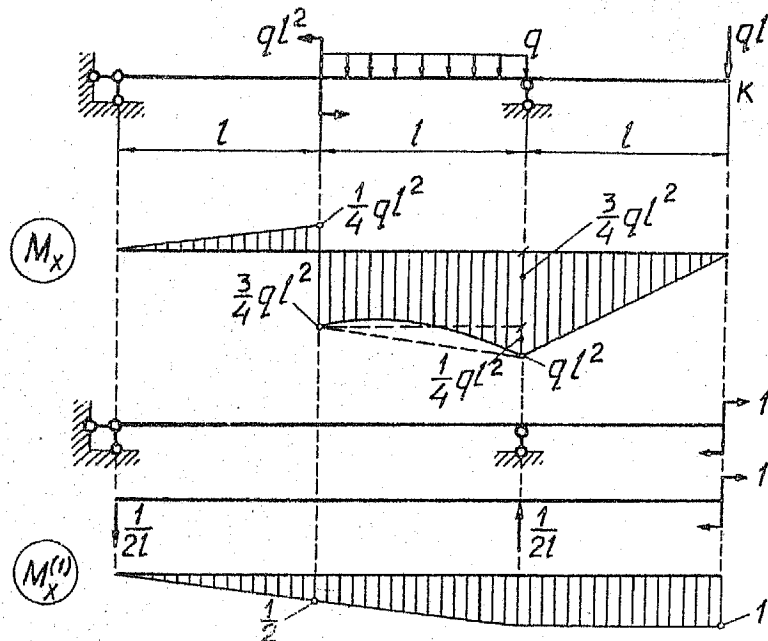
$$W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}} = \frac{20,2}{2,5} = 8,07 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{ql^2}{W_x} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{8,07 \cdot 10^{-6}} = 154,9 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{\max} = 154,9 \text{ МПа}.$$

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{280}{154,9} = 1,8.$$

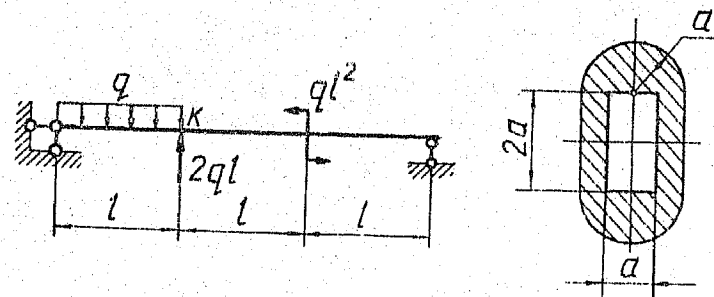
3. Определение угла поворота сечения К



$$\theta_K = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} ql^2 \cdot l \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{6} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} ql^2 \cdot l \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot 1 \right) = \frac{17}{16} \frac{ql^3}{EJ_x},$$

$$\theta_K = \frac{17}{16} \frac{ql^3}{EJ_x} = \frac{17 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3}{16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 20,2 \cdot 10^{-8}} = 0,0164 \text{ рад}.$$

Задача 1.2

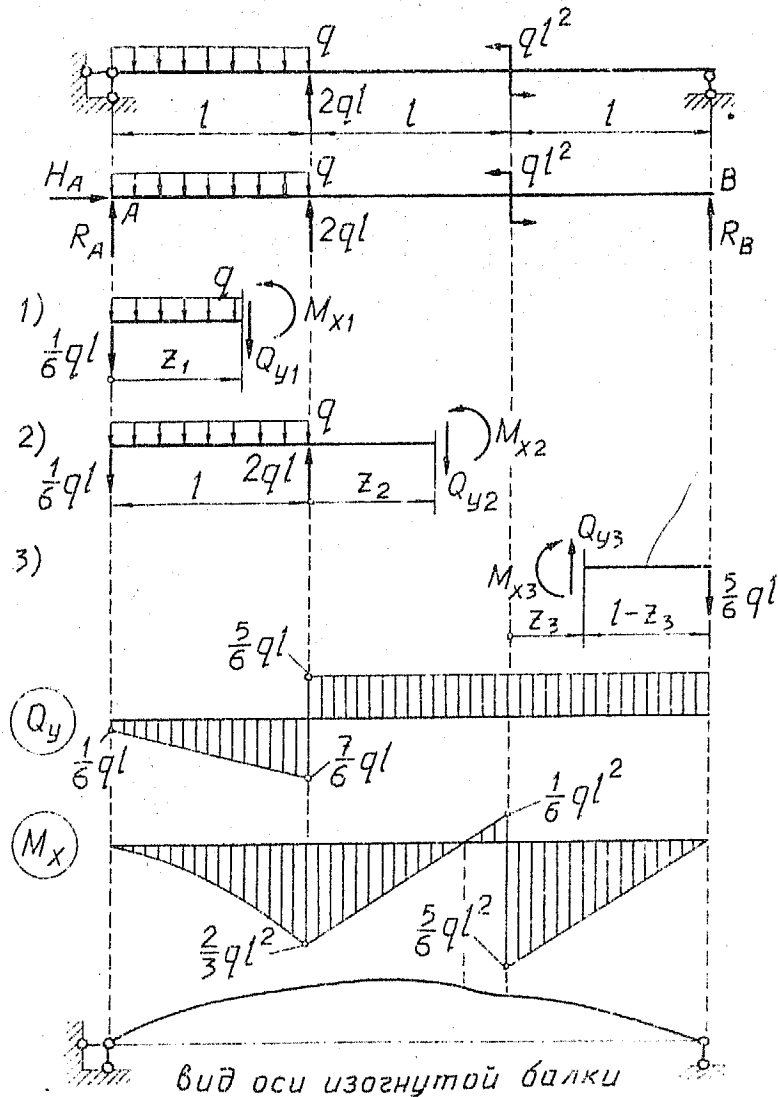


Для заданной балки постоянной жесткости требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x ;
- 2) определить размер a поперечного сечения при $q = 8 \text{ кН/м}$, $l = 0,5 \text{ м}$, $\sigma_{\text{ТР}} = \sigma_{\text{ТС}} = 320 \text{ МПа}$, $n_T = 1,5$;
- 3) определить прогиб балки в сечении К ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$);
- 4) изобразить вид оси изогнутой балки.

Решение

- Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x



Уравнения статического равновесия:

$$\Sigma \text{тот } A = 0, -ql \cdot \frac{1}{2} + 2ql \cdot l + q \cdot l^2 + R_B \cdot 3l = 0, \quad R_B = -\frac{5}{6}ql;$$

$$\Sigma \text{тот } B = 0, ql^2 - 2ql \cdot 2l + ql \cdot \frac{5}{2}l - R_A \cdot 3l = 0, \quad R_A = -\frac{1}{6}ql.$$

Поперечные силы и изгибающие моменты

$$1) 0 \leq z_1 \leq l, \quad -\frac{1}{6}ql - qz_1 - Q_{y1} = 0, \quad Q_{y1} = -\frac{1}{6}ql - qz_1;$$

$$M_{x1} = -\frac{1}{6}qlz_1 - \frac{qz_1^2}{2}, \quad \frac{dM_{x1}}{dz_1} = -\frac{1}{6}ql - qz_1^* = 0,$$

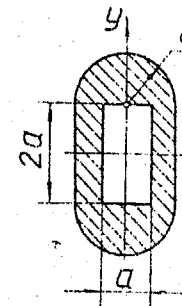
$$z_1^* = -\frac{1}{6}l;$$

$$2) 0 \leq z_2 \leq l, \quad -\frac{1}{6}ql - ql + 2ql - Q_{y2} = 0, \quad Q_{y2} = \frac{5}{6}ql;$$

$$M_{x2} = -\frac{1}{6}ql(l + z_2) - ql(\frac{l}{2} + z_2) + 2qlz_2;$$

$$3) 0 \leq z_3 \leq l, \quad Q_{y3} = \frac{5}{6}ql, \quad M_{x3} = -\frac{5}{6}ql(l - z_3).$$

- Определение размера a поперечного сечения



Условие прочности $\sigma_{\max} = \frac{\sigma_T}{n_T}$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x}, \quad W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

Осей момент инерции

$$J_x = \frac{(2a)^4}{12} - \frac{a(2a)^3}{12} + 2 \left[\frac{\pi a^4}{8} - \left(\frac{4a}{3\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi a^2}{2} + \left(\frac{4a}{3\pi} + a \right)^2 \cdot \frac{\pi a^2}{2} \right] = a^4 \left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{16}{9\pi} + \frac{(4+3\pi)^2}{9\pi} \right],$$

$$J_x = 7,26a^4$$

Осей момент сопротивления

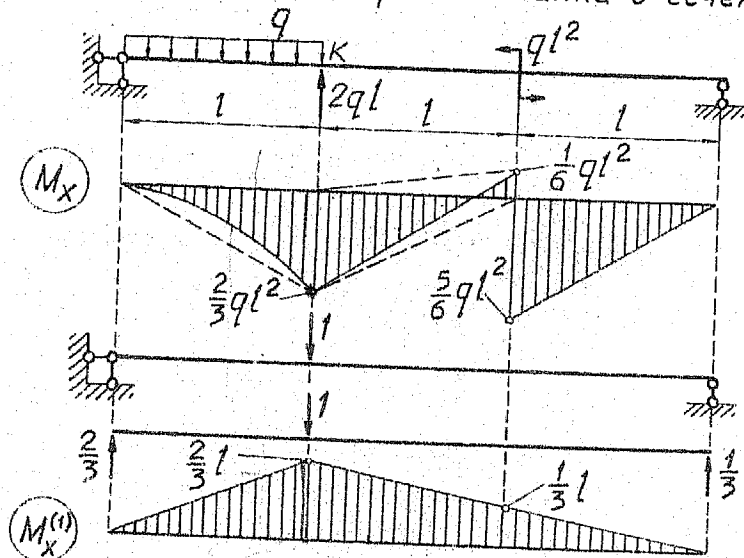
$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{7,26a^4}{2a} = 3,63a^3$$

$$M_{x \max} = \frac{5}{6} q l^2, \quad \frac{5}{6} \frac{q l^2}{3,63 a^3} = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{5 q l^2 n_T}{6 \cdot 3,63 \sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2 \cdot 1,5}{6 \cdot 3,63 \cdot 320 \cdot 10^6}} = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$a = 1,3 \text{ см.}$$

3. Определение прогиба балки в сечении К



$$V_K = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} q l^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{2}{3} \frac{q l^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l + \right.$$

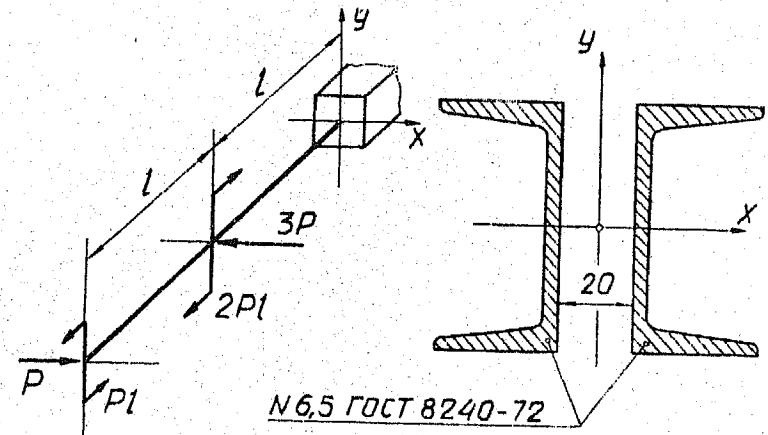
$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} q l^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{q l^4}{EJ_x} \left(-\frac{4}{27} + \frac{1}{36} + \frac{1}{27} - \frac{5}{27} - \frac{5}{27 \cdot 2} \right) = -\frac{13}{36} \frac{q l^4}{EJ_x},$$

$$V_K = -\frac{13}{36} \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,5^4}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^6 \cdot 7,26 \cdot 13^4 \cdot 10^{-8}} = -4,35 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Сечение К перемещается вверх на 4,35 мм.

Задача 1.3



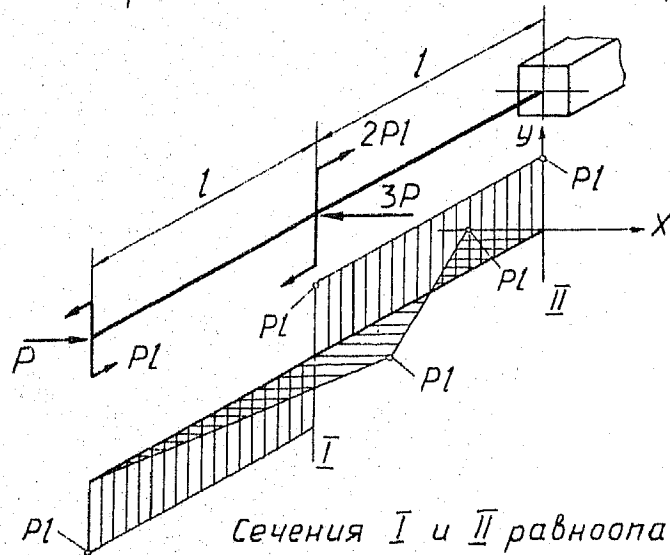
Для заданной балки требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов;
- 2) определить положение нейтральной линии и построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении;
- 3) вычислить коэффициент запаса по текучести;
- 4) определить линейное перемещение свободного конца балки.

Дано: $P = 4 \text{ кН}$, $l = 0,5 \text{ м}$,
 $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_T = 200 \text{ МПа}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение

1. Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y



Сечения I и II равноопасны.

2. Определение положения нейтральной линии и построение эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении II

Уравнение для определения напряжений

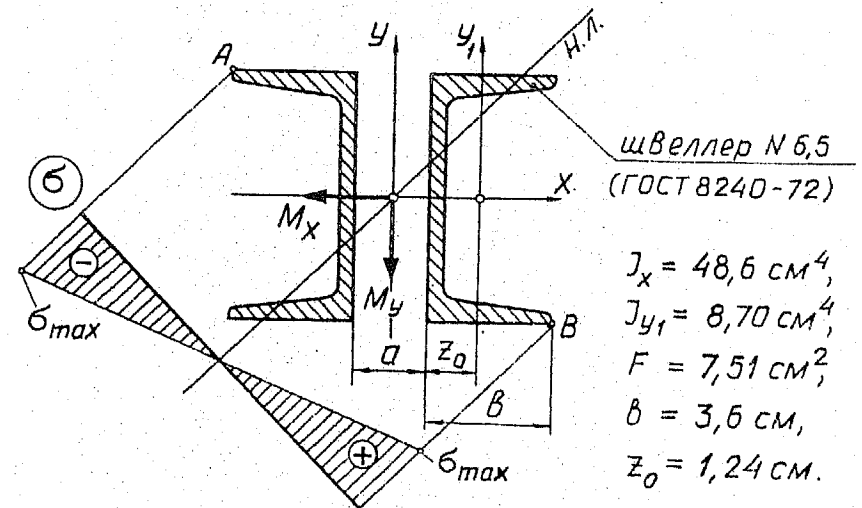
$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x.$$

Уравнение нейтральной линии

$$\sigma = 0 \rightarrow y = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} x;$$

так как в сечении II $M_x = Pl$, $M_y = Pl$, то

$$y = \frac{J_x}{J_y} x.$$



Осевые моменты инерции поперечного сечения:

$$J_x = 2J_x^c = 2 \cdot 48,6 = 97,2 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 2J_y^c = 2 \left[J_{y_1} + \left(\frac{a}{2} + z_0 \right)^2 F \right] =$$

$$= 2 \left[8,70 + (1 + 1,24)^2 \cdot 7,5 \right] = 92,8 \text{ см}^4.$$

Уравнение нейтральной линии

$$y = \frac{J_x}{J_y} x = \frac{97,2}{92,8} x = 1,047x.$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = |\sigma_A| = -\frac{M_x}{J_x} y_B + \frac{M_y}{J_y} x_B,$$

$$x_B = 4,6 \text{ см}, y_B = -3,25 \text{ см},$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{97,2 \cdot 10^{-8}} (-3,25 \cdot 10^{-2}) + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{92,8 \cdot 10^{-8}} \cdot 4,6 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 166 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

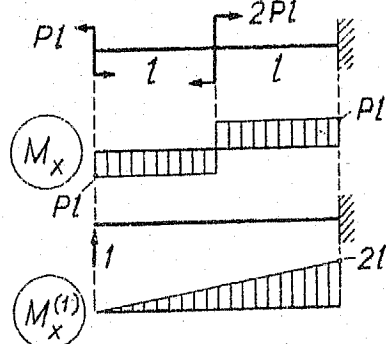
$$\sigma_{\max} = 166 \text{ МПа}.$$

3. Вычисление коэффициента запаса по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{200}{166} = 1,2.$$

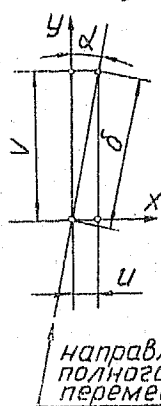
4. Определение линейного перемещения свободного конца балки

а) Вертикальное перемещение V



$$а) V = \frac{1}{EJ_x} \left(-Pl \cdot l \cdot \frac{1}{2} + Pl \cdot l \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{Pl^3}{EJ_x} \text{ (вверх);}$$

$$б) u = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} 2Pl \cdot 2l \cdot \frac{4}{3} l - \frac{1}{2} 3Pl \cdot l \cdot \frac{5}{3} l \right) = \frac{1}{6} \frac{Pl^3}{EJ_y} \text{ (вправо);}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{V} = \frac{J_x}{6J_y} = \frac{97,2}{6 \cdot 92,8} = 0,175,$$

$$\alpha = 9,9^\circ;$$

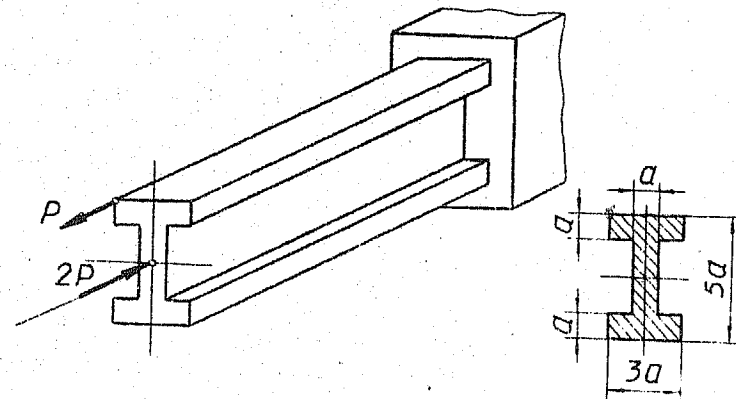
в) полное линейное перемещение

$$\delta = \sqrt{V^2 + u^2} = V \sqrt{1 + \left(\frac{u}{V}\right)^2} = \frac{Pl^3}{EJ_x} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\delta = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 97,2 \cdot 10^8} \sqrt{1 + 0,175^2} = 2,61 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\delta = 2,61 \text{ мм.}$$

Задача 1.4



Для заданного бруса требуется:

1) определить положение нейтральной линии и построить эпюру напряжений в поперечном сечении;

2) определить коэффициент запаса по текучести.

Дано: $P = 9 \text{ кН}$, $a = 10 \text{ мм}$,

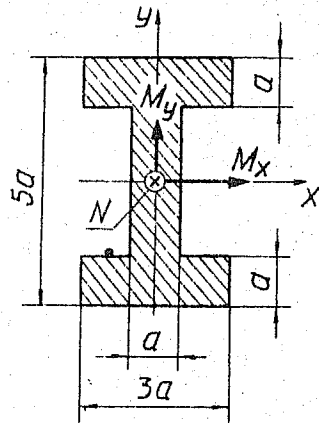
$\sigma_{Tr} = \sigma_{TC} = 200 \text{ МПа}$.

$$J_x = 3,68 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$J_y = 1,51 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

Решение

1. Определение напряжений в поперечном сечении бруса



Внутренние силовые факторы (во всех поперечных сечениях одинаковы):

$$M_x = 2,5 Pa,$$

$$M_y = 1,5 Pa,$$

$$N = -P.$$

Уравнение для определения напряжений

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{N}{F}.$$

Геометрические характеристики сечения:

$$J_x = \frac{3a(5a)^3}{12} - \frac{2a(3a)^3}{12} = \frac{107}{4} a^4,$$

$$J_y = 2 \frac{a(3a)^3}{12} + \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{19}{4} a^4,$$

$$F = 9a^2.$$

Уравнение нейтральной линии

$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{N}{F} = 0,$$

$$\frac{5}{2} \frac{Pa}{107 a^4} y - \frac{3}{2} \frac{Pa}{19 a^4} x - \frac{P}{9a^2} = 0.$$

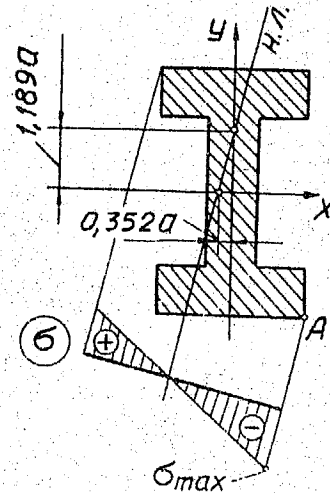
Уравнение нейтральной линии приведем к виду

$$\frac{x}{-19/54 a} + \frac{y}{107/90 a} = 1$$

или

$$\frac{x}{-0,352 a} + \frac{y}{1,189 a} = 1.$$

Наиболее удалена от нейтральной линии точка A (1,5a; -2,5a).



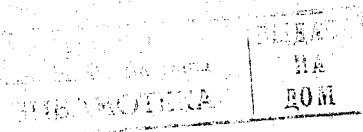
Наибольшее по абсолютной величине напряжение в точке A

$$\sigma_{max} = |\sigma_A| = \left| \frac{5}{2} \frac{Pa}{107 a^4} \cdot (-5a) - \frac{3}{2} \frac{Pa}{19 a^4} \cdot \frac{3}{2} a - \frac{P}{9a^2} \right| = 0,818 \frac{P}{a^2};$$

$$\sigma_{max} = 0,818 \frac{P}{a^2} = 0,818 \frac{9 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = 73,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 73,6 \text{ МПа}.$$

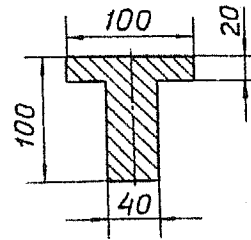
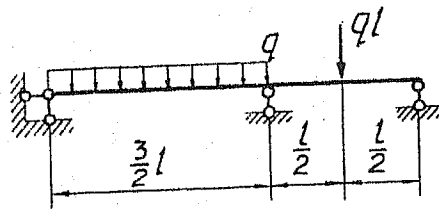
2. Определение коэффициента запаса по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{200}{73,6} = 2,7.$$



2. Статически неопределимые задачи изгиба

Задача 2.1



Для заданной балки постоянной жесткости требуется:

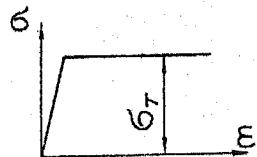
I. Выполнить расчет при упругих деформациях:

- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x , изобразить вид оси изогнутой балки;
- 3) определить допускаемую нагрузку $q_{доп}$, приняв $n_T = 1,5$, $l = 1 \text{ м}$.

II. Определить коэффициент запаса по предельным нагрузкам при $q = q_{доп}$.

Материал балки идеальный упруго-пластичный,

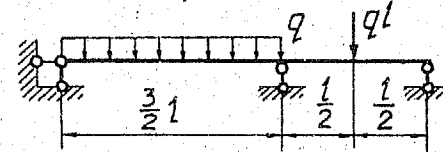
$\sigma_{ТР} = \sigma_{ТС} = \sigma_T = 350 \text{ МПа}$.



Решение

I. Расчет при упругих деформациях

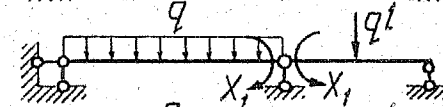
1. Раскрытие статической неопределимости



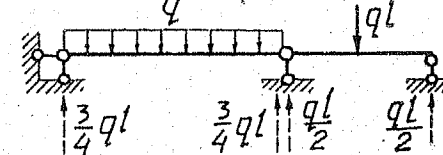
заданная система



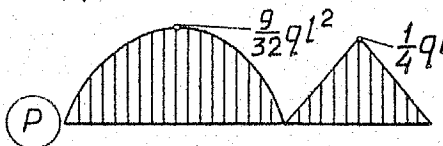
основная система



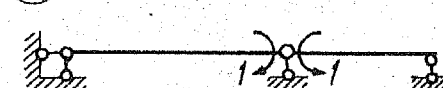
эквивалентная система



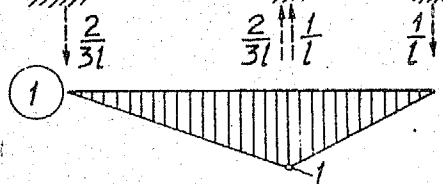
Условие эквивалентности (каноническое уравнение метода сил)



$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0;$$



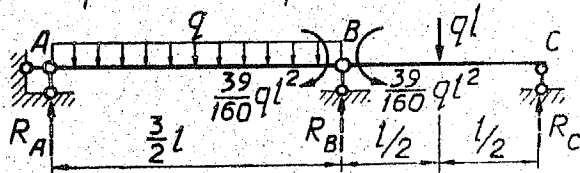
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{6} \frac{l}{EJ_x};$$



$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{9}{32} q l^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q l \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{13}{64} \frac{q l^3}{EJ_x};$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{13 \cdot 6}{64 \cdot 5} q l^2 = \frac{39}{160} q l^2.$$

Определение реакций



Уравнения статического равновесия:

для левого пролета $\sum \text{mom B} = 0$,

$$-R_A \cdot \frac{3}{2}l - \frac{39}{160}ql^2 + \frac{3}{2}ql \cdot \frac{3}{4}l = 0, \quad R_A = \frac{47}{80}ql;$$

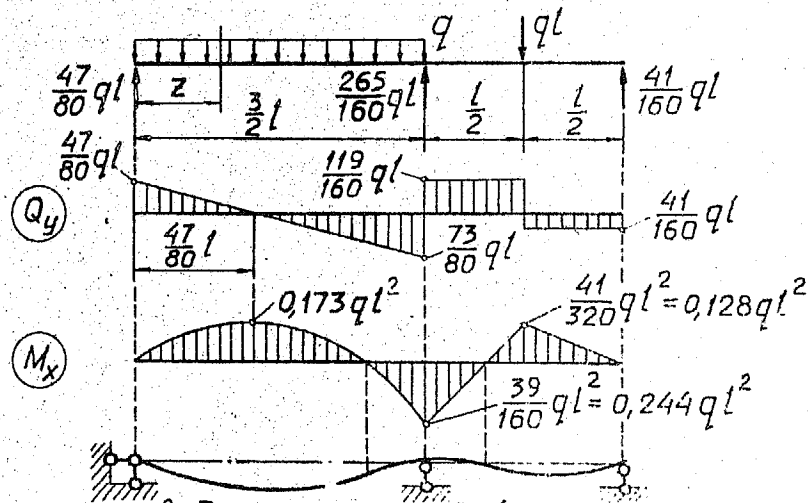
для правого пролета $\sum \text{mom B} = 0$,

$$R_C l + \frac{39}{160}ql^2 - ql \cdot \frac{l}{2} = 0, \quad R_C = \frac{41}{160}ql;$$

для всей балки $\sum \text{mom A} = 0$,

$$-\frac{3}{2}ql \cdot \frac{3}{4}l - ql \cdot 2l + \frac{41}{160}ql \cdot \frac{5}{2}l + R_B \cdot \frac{3}{2}l = 0, \quad R_B = \frac{265}{160}ql.$$

2. Построение эпюр Q_y и M_x



вид оси изогнутой балки

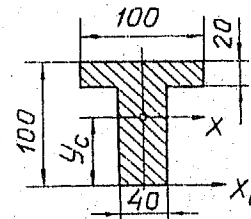
В сечении с абсциссой z ($0 \leq z \leq \frac{3}{2}l$)

$$Q_y = \frac{47}{80}ql - qz, \quad M_x = \frac{47}{80}qlz - \frac{qz^2}{2};$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y = 0 \text{ при } z^* = \frac{47}{80}l,$$

$$M_{x_{\text{экстр}}} = \frac{47}{80}ql \cdot \frac{47}{80}l - \frac{q}{2} \left(\frac{47}{80}l \right)^2 = 0,173ql^2.$$

3. Определение допускаемой нагрузки



Ордината центра тяжести.

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{F} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 9}{4 \cdot 8 + 10 \cdot 2} = 5,92 \text{ см} = 5,92 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Определение осевого момента инерции

$$J_x = J_{x_0} - y_c^2 F = \left(\frac{10^4}{3} - 2 \frac{3 \cdot 8^3}{3} \right) - 5,92^2 \cdot 52 = 487 \text{ см}^4 = 0,487 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Условие прочности $\sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_T}{n_T};$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{x_{\text{max}}}}{J_x} y_{\text{max}},$$

$$\frac{M_{x_{\text{max}}}}{J_x} y_{\text{max}} = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad \frac{0,244ql^2}{J_x} y_{\text{max}} = \frac{\sigma_T}{n_T};$$

$$q_{\text{доп}} = \frac{J_x \sigma_T}{0,244l^2 \cdot y_{\text{max}} \cdot n_T} = \frac{0,487 \cdot 10^{-5} \cdot 350 \cdot 10^6}{0,244 \cdot 1^2 \cdot 5,92 \cdot 10^{-2} \cdot 1,5} = 78,7 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

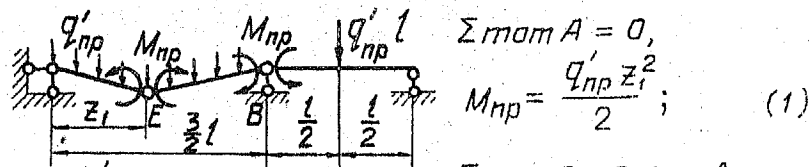
$$q_{\text{доп}} = 78,7 \text{ кН/м}.$$

II. Расчет по предельным нагрузкам

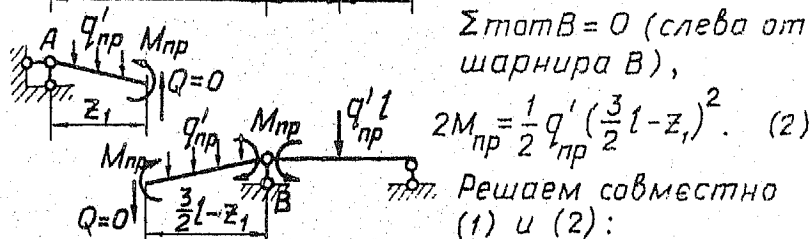
1. Определение предельной нагрузки

Заданная балка теряет несущую способность при возникновении двух пластических шарниров. Исследуем кинематически возможные варианты исчерпания несущей способности.

а) Пластические шарниры в сечениях В и Е



$$\sum \text{тот } A = 0, \quad M_{np} = \frac{q' z_1^2}{2}; \quad (1)$$



$$\sum \text{тот } B = 0 \text{ (слева от шарнира B)},$$

$$2M_{np} = \frac{1}{2} q' \left(\frac{3}{2} l - z_1 \right)^2. \quad (2)$$

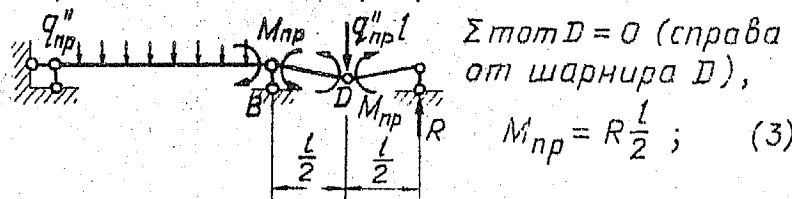
Решаем совместно (1) и (2):

$$q' z_1^2 = \frac{1}{2} q' \left(\frac{3}{2} l - z_1 \right)^2, \quad z_1^2 + 3l z_1 - \frac{9}{4} l^2 = 0,$$

$$z_1 = -\frac{3}{2} l \pm \sqrt{\frac{9}{4} l^2 + \frac{9}{4} l^2}, \quad z_1 = \frac{3}{2} (\sqrt{2} - 1) l = 0,621 l;$$

$$q'_{np} = \frac{2M_{np}}{z_1^2} = \frac{2M_{np}}{(0,621 l)^2} = 5,19 \frac{M_{np}}{l^2}.$$

б) Пластические шарниры в сечениях В и D



$$\sum \text{тот } D = 0 \text{ (справа от шарнира D)},$$

$$M_{np} = R \frac{1}{2}; \quad (3)$$

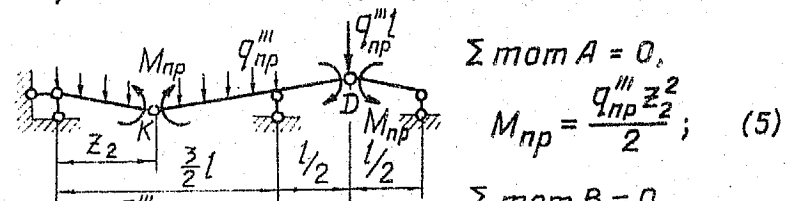
$$\sum \text{тот } B = 0 \text{ (справа от шарнира B)},$$

$$Rl + M_{np} = q'' l \cdot \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Решаем совместно (3) и (4):

$$3M_{np} = \frac{1}{2} q'' l^2, \quad q''_{np} = 6 \frac{M_{np}}{l^2}.$$

в) Пластические шарниры в сечениях К и D



$$\sum \text{тот } A = 0, \quad M_{np} = \frac{q''' z_2^2}{2}; \quad (5)$$

$$\sum \text{тот } B = 0, \quad \frac{1}{2} q''' \left(\frac{3}{2} l - z_2 \right)^2 - R'l - \frac{q''' l^2}{2} - M_{np} = 0; \quad (6)$$

$$\sum \text{тот } D = 0 \text{ (справа от шарнира D)}, \quad M_{np} = \frac{R'l}{2}. \quad (7)$$

Решаем совместно (5), (6), (7):

$$\frac{1}{2} q''' \left(\frac{3}{2} l - z_2 \right)^2 = q''' z_2^2 + \frac{q''' z_2^2}{2} + \frac{q''' l^2}{2},$$

$$\frac{9}{4} l^2 - 3l z_2 + z_2^2 = 3z_2^2 + l^2,$$

$$z_2^2 + \frac{3}{2} l z_2 - \frac{5}{8} l^2 = 0,$$

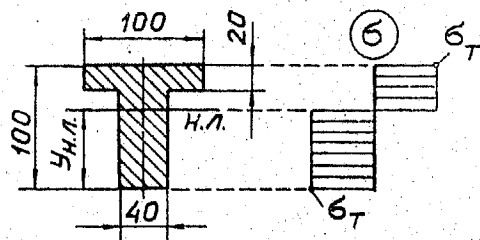
$$z_2 = -\frac{3}{4} l \pm \sqrt{\frac{9}{16} l^2 + \frac{5}{8} l^2}, \quad z_2 = -\frac{3}{4} l + \frac{\sqrt{19}}{4} l = 0,340 l;$$

$$q'''_{np} = \frac{2M_{np}}{z_2^2} = \frac{2M_{np}}{(0,340 l)^2} = 17,30 \frac{M_{np}}{l^2}.$$

Из трех кинематически возможных предельных состояний системы реализуется та, которому соответствует наименьшее значение предельной нагрузки (вариант а):

$$q_{пр} = 5,19 \frac{M_{пр}}{l^2}$$

2. Определение предельного внутреннего момента



$$\begin{aligned} F &= 52 \text{ см}^2, \\ \frac{1}{2} F &= 26 \text{ см}^2, \\ U_{н.л.} \cdot 4 &= 26, \\ U_{н.л.} &= \frac{26}{4} = 6,5 \text{ см}. \end{aligned}$$

Предельный внутренний момент

$$M_{пр} = \sigma_T (10 \cdot 2 \cdot 2,5 + 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} + 4 \cdot 6,5 \cdot \frac{6,5}{2}) \cdot 10^{-6} = 350 \cdot 10^6 \cdot 139 \cdot 10^{-6}$$

$$M_{пр} = 4,86 \cdot 10^4 \text{ Нм}.$$

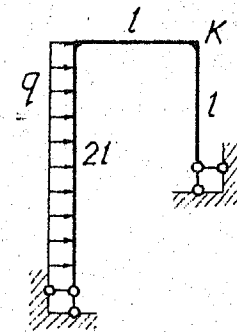
3. Определение коэффициента запаса

$$q_{пр} = 5,19 \frac{M_{пр}}{l^2} = 5,19 \frac{4,86 \cdot 10^4}{1^2} = 2,52 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$q_{пр} = 252 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$n = \frac{q_{пр}}{q_{доп}} = \frac{252}{78,7} = 3,2.$$

Задача 2.2

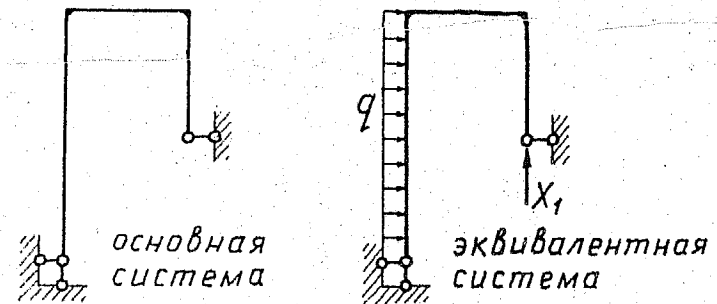


Для заданной рамы ($EJ_x = \text{const}$) требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределенность;
- 2) построить эпюру изгибающих моментов;
- 3) определить горизонтальное линейное перемещение узла К;
- 4) проверить полученное решение.

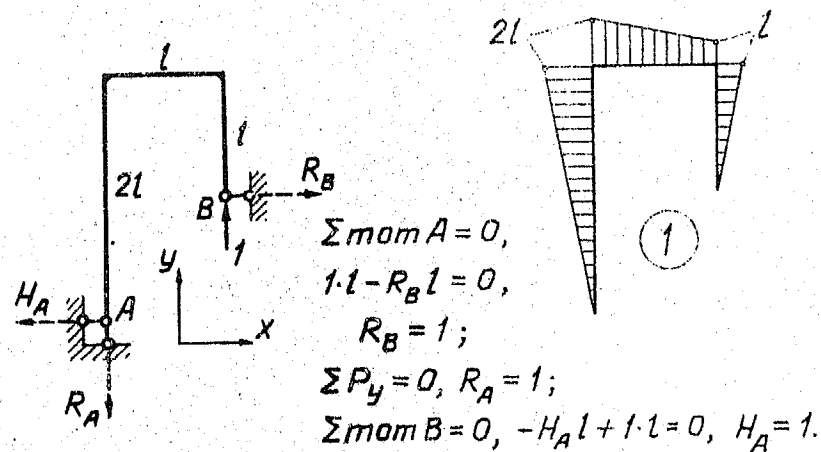
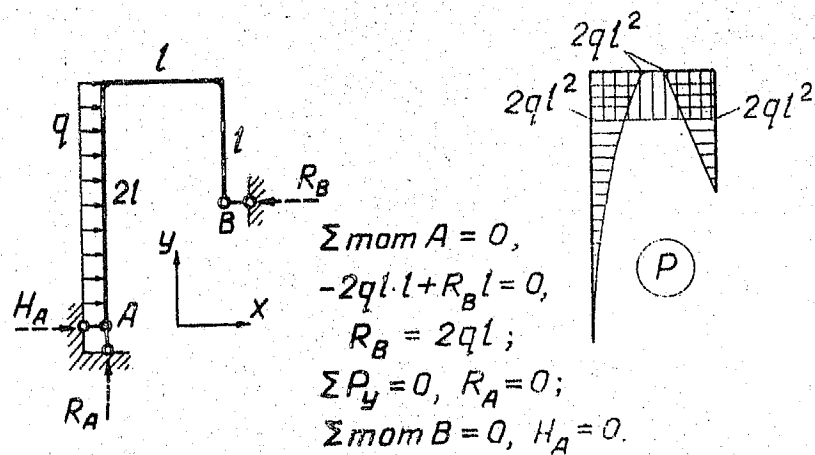
Решение

1. Раскрытие статической неопределенности



Условие эквивалентности (каноническое уравнение метода сил)

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

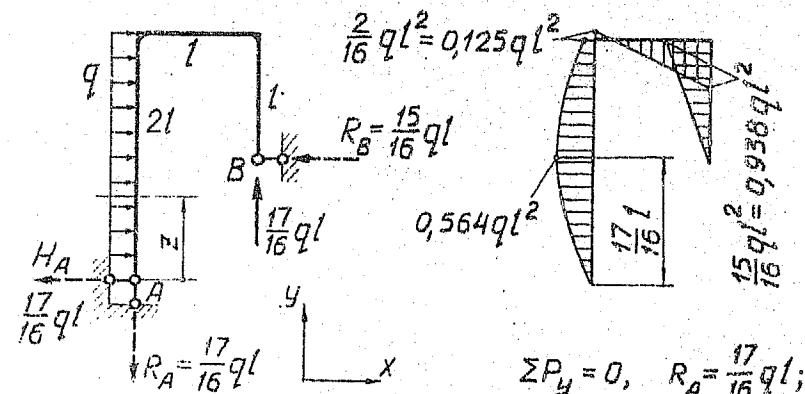


$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + 1 \cdot l \cdot \frac{3}{2} l + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{5}{3} l + \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{4}{3} l \right) = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{3} \cdot 2ql \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} 2l + 2ql \cdot l \cdot \frac{3}{2} l + \frac{1}{2} \cdot 2ql \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = -\frac{17}{3} \frac{ql^4}{EJ_x},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{17}{3} \cdot \frac{3}{16} ql = \frac{17}{16} ql.$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов



$$\sum \text{mom } A = 0, -2ql \cdot l + \frac{17}{16} ql \cdot l + R_B l = 0, R_B = \frac{15}{16} ql;$$

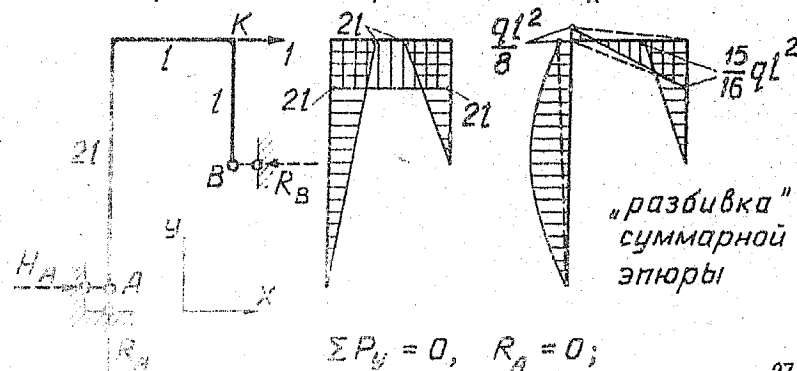
$$\sum \text{mom } B = 0, -H_A l + \frac{17}{16} ql \cdot l = 0, H_A = \frac{17}{16} ql.$$

В сечении с абсциссой z $M_x = \frac{17}{16} ql z - \frac{qz^2}{2};$

$$\frac{dM_x}{dz} = \frac{17}{16} ql - qz = 0 \text{ при } z^* = \frac{17}{16} l;$$

$$M_{x \text{ экстр}} = \frac{17}{16} ql \cdot \frac{17}{16} l - \frac{q}{2} \left(\frac{17}{16} l \right)^2 = \frac{q}{2} \left(\frac{17}{16} l \right)^2 = 0,564 ql^2.$$

3. Определение перемещения $\delta_K^{\text{гор}}$



$$\sum \text{mom } A = 0, \quad -1 \cdot 2l + R_B l = 0, \quad R_B = 2;$$

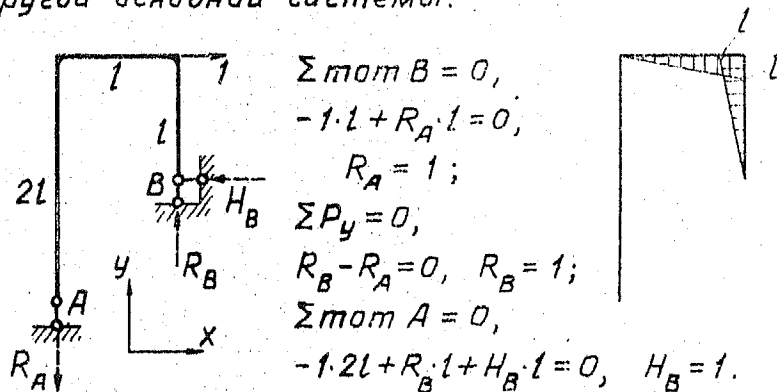
$$\sum \text{mom } B = 0, \quad -1 \cdot l + H_A l = 0, \quad H_A = 1.$$

$$\delta_K^{\text{гор}} = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l - \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \frac{q(2l)^2}{8} l - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot l \cdot 2l + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} q l^2 \cdot l \cdot 2l + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right] = \\ = \frac{q l^4}{EJ_x} \left(-\frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} + \frac{15}{16} + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} \right) = \frac{29}{48} \frac{q l^4}{EJ_x},$$

$$\delta_K^{\text{гор}} = \frac{29}{48} \frac{q l^4}{EJ_x}.$$

4. Проверка

Для проверки найдем $\delta_K^{\text{гор}}$ с помощью другой основной системы.



$$\sum \text{mom } B = 0,$$

$$-1 \cdot l + R_A \cdot l = 0,$$

$$R_A = 1;$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$R_B - R_A = 0, \quad R_B = 1;$$

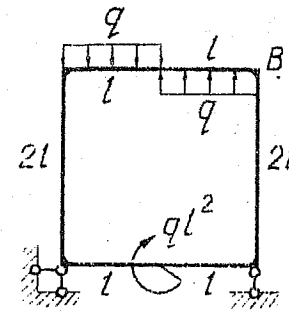
$$\sum \text{mom } A = 0,$$

$$-1 \cdot 2l + R_B \cdot l + H_B \cdot l = 0, \quad H_B = 1.$$

$$\delta_K^{\text{гор}} = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{q l^4}{EJ_x} \left(-\frac{1}{16 \cdot 3} + \frac{15}{16 \cdot 3} \cdot 2 \right) = \frac{29}{48} \frac{q l^4}{EJ_x},$$

следовательно, задача решена верно.

Задача 2.3



Для заданной рамы ($EJ_x = \text{const}$) требуется:

1) раскрыть статическую неопределенность;

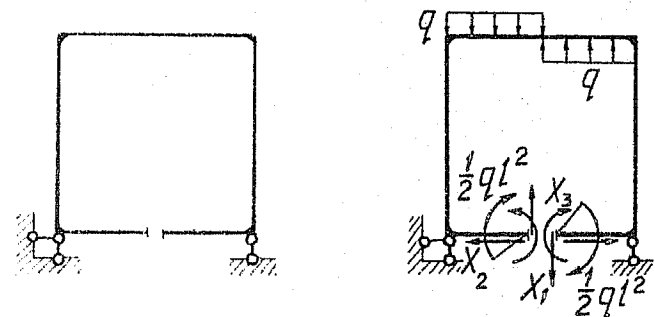
2) построить эпюру изгибающих моментов;

3) определить угол поворота узла B;

4) проверить полученное решение.

Решение

1 Раскрытие статической неопределенности



основная
система

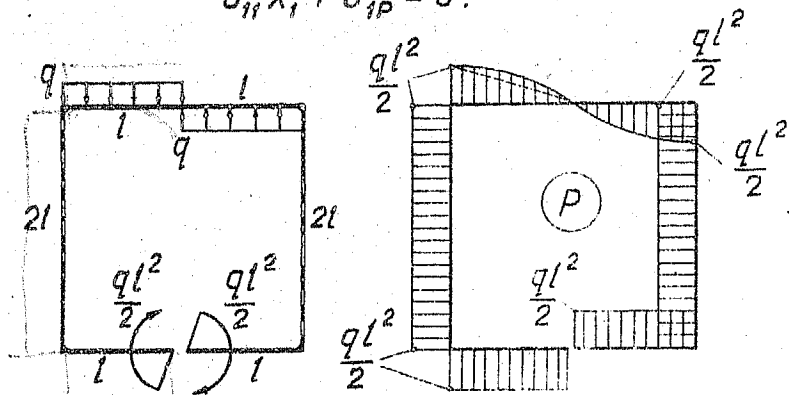
эквивалентная
система

Так как нагрузка косасимметрична, то

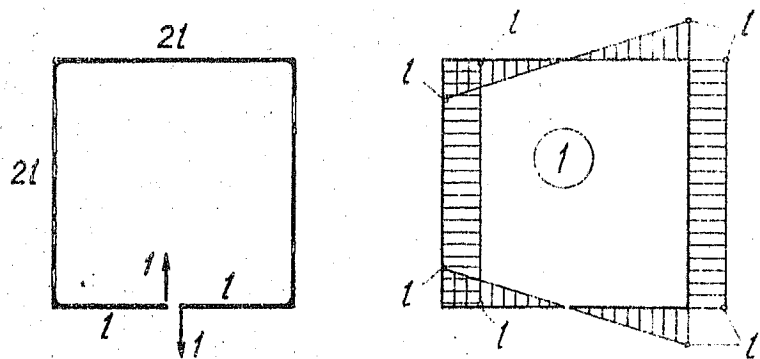
$$X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

Условие эквивалентности (каноническое уравнение метода сил)

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$



Нагрузка самоуравновешена, поэтому реакции опор равны нулю.

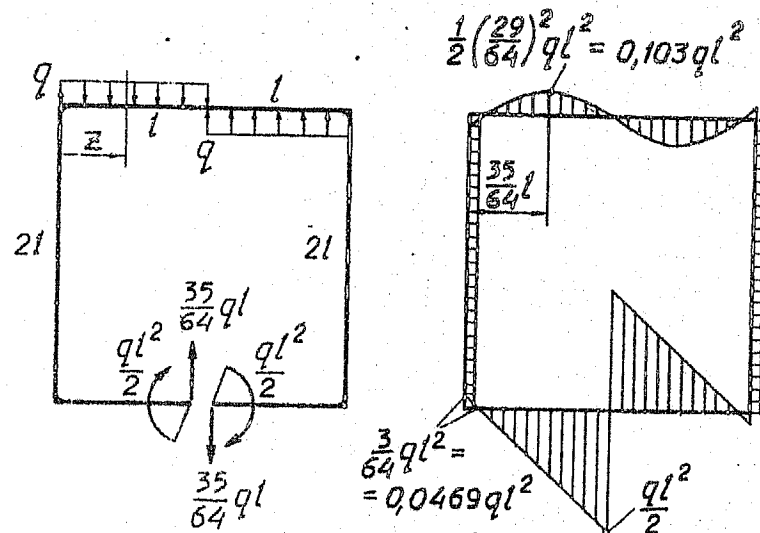


$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_X} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \cdot 4 + l \cdot 2l \cdot l \cdot 2 \right) = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EJ_X},$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_X} \left(-\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{1}{2} ql^2 - l \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 = -\frac{35}{12} \frac{ql^4}{EJ_X};$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{35}{12} \cdot \frac{3}{16} ql = \frac{35}{64} ql.$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов



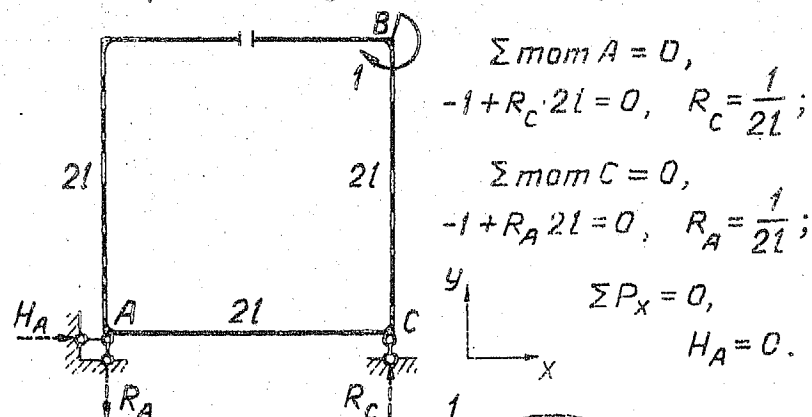
В сечении с абсциссой z

$$M_x = \frac{1}{2} ql^2 - \frac{35}{64} ql(l-z) - \frac{qz^2}{2} = -\frac{3}{64} ql^2 + \frac{35}{64} qlz - \frac{qz^2}{2};$$

$$\frac{dM_x}{dz} = \frac{35}{64} ql - qz = 0 \quad \text{при } z^* = \frac{35}{64} l;$$

$$M_{x_{\text{экстр}}} = -\frac{3}{64} ql^2 + \frac{35}{64} ql \cdot \frac{35}{64} l - \frac{1}{2} q \left(\frac{35}{64} \right)^2 l^2 = \frac{841}{2 \cdot 64^2} ql^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{29}{64} \right)^2 ql^2 = 0,103 ql^2.$$

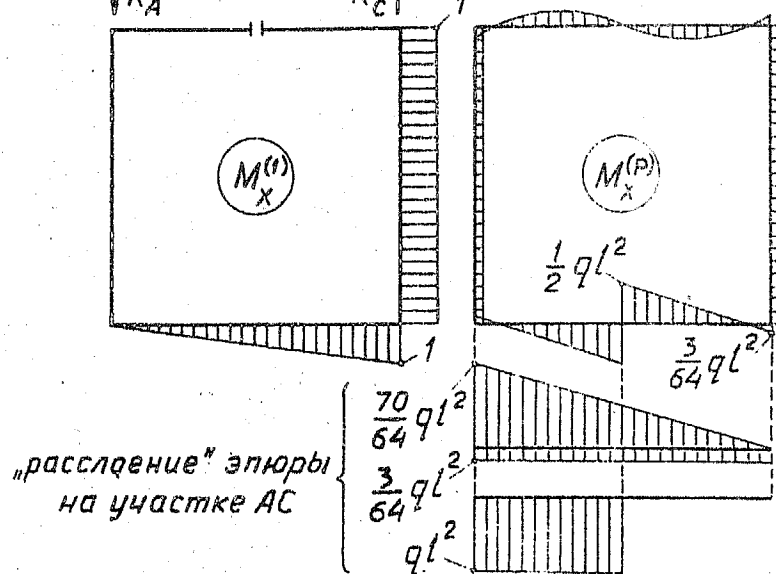
3. Определение угла поворота узла В



$$\sum \text{mom } A = 0, \\ -1 + R_C \cdot 2l = 0, \quad R_C = \frac{1}{2l};$$

$$\sum \text{mom } C = 0, \\ -1 + R_A \cdot 2l = 0, \quad R_A = \frac{1}{2l};$$

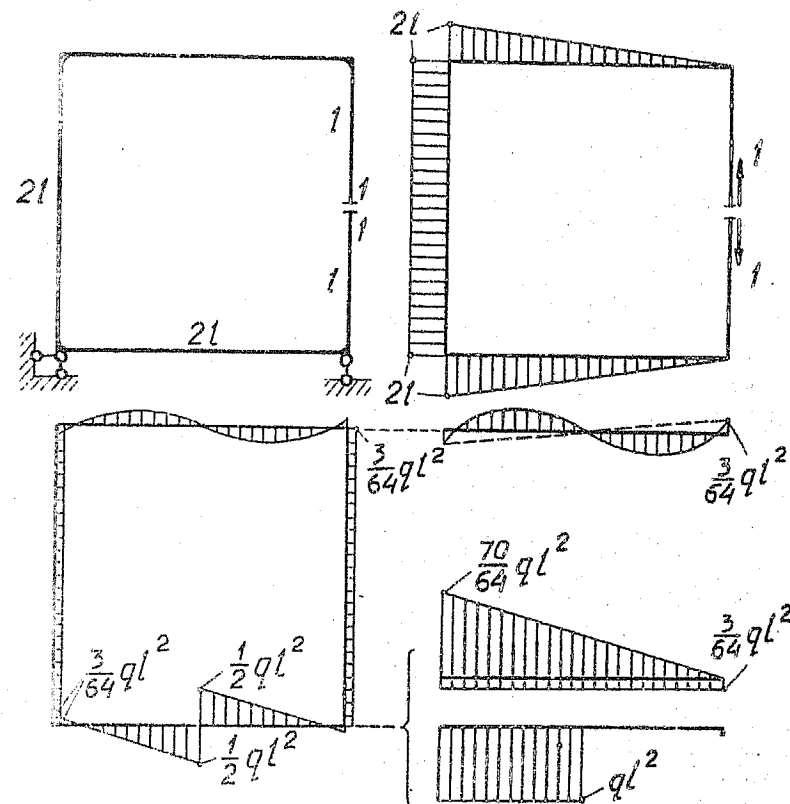
$$\sum P_x = 0, \\ H_A = 0.$$



$$\theta_B = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{3}{64} ql^2 \cdot 2l \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{64} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{64} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{64 \cdot 3} \frac{ql^3}{EJ_x}, \quad \theta_B = 0,0260 \frac{ql^3}{EJ_x}.$$

4. Проверка

Для проверки найдем взаимное линейное перемещение сечений 1-1.



$$\delta_{1-1} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{3} l + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{3}{2} l - \frac{3}{64} ql^2 \cdot 2l \cdot 2l - \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{64} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{4}{3} l + \frac{3}{64} ql^2 \cdot 2l \cdot l + \right. \\ \left. + ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{ql^4}{EJ_x} \left(\frac{1}{2 \cdot 64} - \frac{1}{24} - \frac{5}{2 \cdot 64} + \frac{3}{24} - \frac{35}{16} + \frac{3}{24} + \frac{3}{2} \right) = 0, \\ \text{следовательно, задача решена верно.}$$

Оглавление

1. Статически определимые задачи изгиба	3
2. Статически неопределимые задачи изгиба	18