Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ
И ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания
к выполнению курсового задания

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 531.1
ББК 22.21
К41

Рецензент *Г.А. Тимофеев*

К41 **Кинематика точки и простейшие движения твердого тела :** метод. указания к выполнению курсового задания / О.П. Феоктистова, Е.Б. Гартиг, А.А. Пожалостин, А.А. Панкратов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 37, [3] с. : ил.

Представлен комплекс курсовых заданий по теоретической механике. Приведены примеры выполнения курсового задания.

Для студентов первого курса машиностроительных и приборных специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 531.1
ББК 22.21

ВВЕДЕНИЕ

Курсовое задание по разделу теоретической механики «Кинематика точки и простейшие движения твердого тела» является первым при изучении курса «Теоретическая механика». Оно позволяет студенту усвоить основные понятия кинематики точки и простейших движений твердого тела. Курсовое задание содержит 30 вариантов задач (разд. 4). Каждому варианту задания соответствует одна схема механизма (на схемах — *1—5* — звенья механизма).

Указанная на схемах механизма точка M может принадлежать звену или совершать движение относительно него. Начало и положительное направление отсчета координат $s(t), x(t), y(t), r(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ также указаны на схемах.

Кроме того, на схемах механизмов приведены исходные данные для всех вариантов задания и единицы измерения исходных величин: длина — в метрах, время — в секундах, угол — в радианах.

В точках соприкосновения звеньев механизма проскальзывание отсутствует, нити и ремни считаются нерастяжимыми и относительно шкивов не скользят.

Курсовое задание состоит из двух частей: 1) кинематика точки; 2) простейшие движения твердого тела.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

В первой части курсового задания нужно исследовать движение точки M и определить основные характеристики этого движения.

Требуется:

1) по заданному движению механизма (см. варианты заданий) получить уравнения движения точки M координатным способом (в декартовой или полярной системе координат, указанной на схеме варианта);

2) определить траекторию движения точки M для момента времени $t = t_1$;

3) найти скорость $\overline{v}$ и ускорение $\overline{a}$ точки M;

4) определить проекции скорости $\overline{v}$ и ускорения $\overline{a}$ точки M на оси декартовой системы координат;

5) найти касательную $\overline{a}_\tau$ и нормальную $\overline{a}_n$ составляющие ускорения, радиус кривизны ρ траектории в данном положении точки M;

6) найти радиальную v_r и трансверсальную v_ρ составляющие скорости. Начало полярной системы координат нужно поместить в начало декартовой, направив полярную ось по оси Ox;

7) в выбранном масштабе выполнить чертеж с изображением траектории движения точки M. На чертеже указать все составляющие скорости и ускорения точки M в момент времени $t = t_1$.

2. КИНЕМАТИКА ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Во второй части курсового задания требуется определить:

1) вид движения звеньев механизма для момента времени $t = t_1$;

2) угловые скорости $\overline{\omega}$ и угловые ускорения $\overline{\varepsilon}$ звеньев механизма, совершающих вращательное движение, указать на чертеже круговыми стрелками их направления, характер движения тел (замедленный или ускоренный);

3) скорости $\overline{v}$ и ускорения $\overline{a}$ тел при поступательном движении;

4) для точек контакта тел A_i (i — номер звена) скорости, ускорения и изобразить их на схеме механизма в соответствующем масштабе (см. разд. 4).

Примечания. 1. Радиусы ступеней i-го зубчатого колеса обозначены R_i и r_i.

2. Законы движения звеньев в ряде механизмов справедливы для ограниченного промежутка времени, включающего момент $t = t_1$.

3. Для тела при вращении его вокруг оси Oz:

φ — угол поворота тела. Положительное направление отсчета угла φ принято против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz;

$\bar{\omega}$ — угловая скорость тела — скользящий вектор на оси вращения, $\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}_0$, где $\bar{k}_0$ — единичный орт оси Oz; $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ — проекция вектора $\overline{\omega}$ на ось Oz;

$\bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела — скользящий вектор на оси вращения Oz, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}_0$, где ε_z — проекция вектора $\bar{\varepsilon}$ на ось Oz:

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt} = \ddot{\varphi}.$$

3. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ЗАДАНИЯ

Пример 1. Исследовать кинематику движения точки и кинематику движений твердого тела (рис. 1). Определить:

траекторию движения точки M и для момента времени $t = 1$ с:

1) скорость $\overline{v}$ и ускорение $\overline{a}$;

2) радиальные и трансверсальные составляющие скорости и ускорения;

3) касательную $\overline{a}_\tau$ и нормальную $\overline{a}_n$ составляющие ускорения точки M.

Выполнить чертеж с изображением движения траектории точки M. Указать ее положение для момента времени $t = 1$ с, найденные скорости и ускорения, а также их составляющие.

Найти угловые скорости $\overline{\omega}$ и ускорения $\overline{\varepsilon}$ звеньев *1 — 3* механизма (см. рис. 1), скорости и ускорения точек A_i и для момента времени $t = 1$ с указать их на чертеже.

Дано: $r(t) = be^{ht^2-1}$, м; $\varphi(t) = ht^2 - 1$, рад; $b = 1$ м, $h = 1$ рад/с^2; $R_1 = 0{,}4$ м; $R_2 = 0{,}2$ м; $r_2 = 0{,}1$ м.

Исследуем кинематику движения точки M. Движение точки M задано координатным способом (в полярной системе координат).

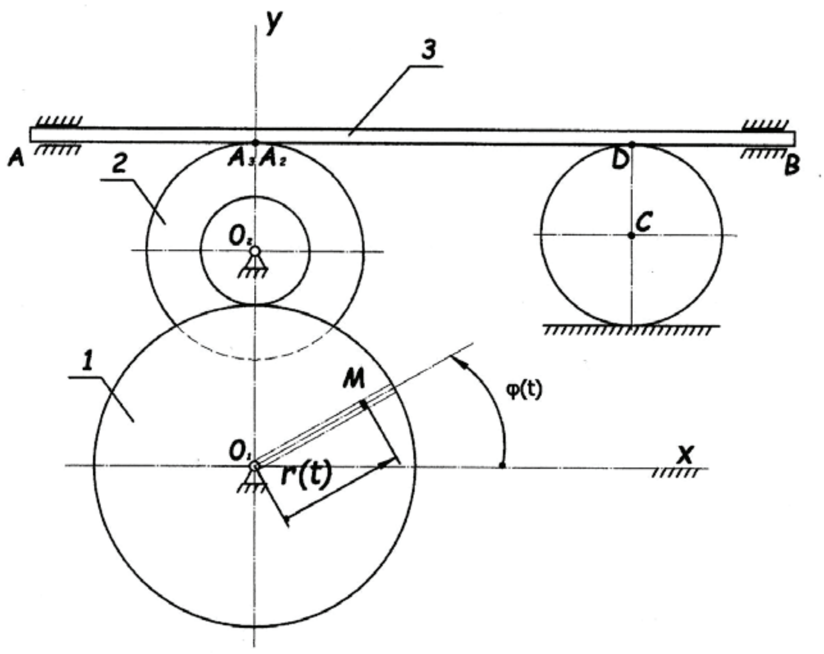


Рис. 1

Полярную ось считаем совмещенной с осью Ox; $OM = r(t)$ — полярный радиус $\varphi(t)$ — полярный угол.

Найдем траекторию точки M. Исключив время t, получим уравнение траектории движения точки M в полярной системе координат:

$$r = e^{\varphi}.$$

Это логарифмическая спираль. Так как $t \geqslant 0$, траекторией движения точки M будет часть логарифмической спирали:

$$r = e^{\varphi}(-1 \leqslant \varphi < \infty; \quad r \geqslant e^{-1}).$$

Координаты точки M при $t = 0$ с:

$$\varphi = -1 \text{ рад} = -57{,}3^\circ; \quad r = 0{,}368 \text{ м}.$$

Координаты точки M при $t = 1$ с:

$$\varphi = 0 \text{ рад} = 0^\circ; \quad r = 1 \text{ м}.$$

Определим скорость точки M:

$$\bar{v} = v_r \bar{r}_0 + v_p \bar{p}_0,$$

где $\bar{r}_0$ — единичный вектор, направленный от полюса O к точке M; $\bar{p}_0$ — единичный вектор, направленный по трансверсали (поворот $\bar{r}_0$ на 90° по направлению круговой стрелки φ).

Проекция вектора скорости $\bar{v}$ на радиальную ось:

$$v_r = \dot{r} = 2te^{t^2-1}.$$

Проекция вектора скорости $\bar{v}$ на трансверсальную ось:

$$v_p = r\dot{\varphi} = 2te^{t^2-1}.$$

Для момента времени $t = 1$ с

$$v_r = v_p = 2 \text{ м/с}; \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = 2\sqrt{2} = 2{,}828 \text{ м/с}.$$

Определим ускорение точки M:

$$\bar{a} = a_r \bar{r}_0 + a_p \bar{p}_0.$$

Проекция ускорения $\bar{a}$ на радиальную ось

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 2e^{t^2-1} + 4t^2e^{t^2-1} - 4t^2e^{t^2-1} = 2e^{t^2-1}.$$

Проекция ускорения $\overline{a}$ на трансверсальную ось

$$a_p = 2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} = 8t^2 e^{t^2-1} + 2e^{t^2-1} = 2e^{t^2-1}(4t^2+1).$$

Для момента времени $t = 1$ с

$$a_r = 2\ \text{м/с}^2;\quad a_p = 10\ \text{м/с}^2;\quad a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = 10{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Радиальную и трансверсальную составляющие скорости и ускорения строим на чертеже с изображением траектории движения точки M (рис. 2).

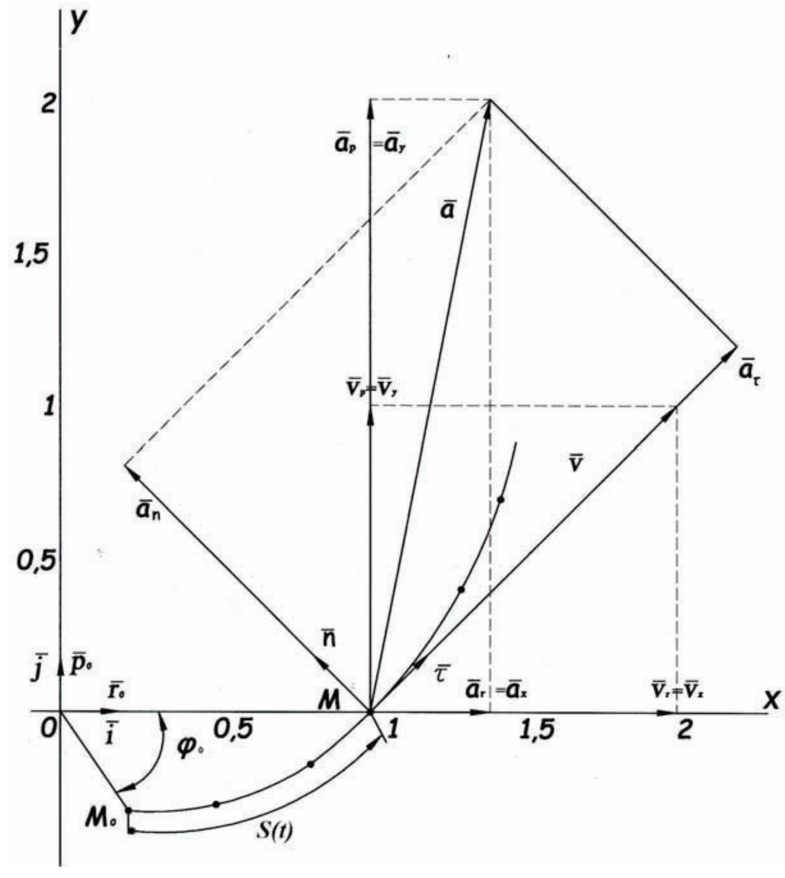


Рис. 2

Зададим движение точки M естественным способом.

Траекторией движения точки M является часть логарифмической спирали:

$$r = e^{\varphi},$$

где $-1 \leqslant \varphi < \infty$; $r \geqslant e^{-1}$.

Начало отсчета дуговой координаты s (натурального параметра) выберем в положении точки M при $t = 0$ с $\varphi_0 = -1$ рад $= -57{,}3^\circ$; $r = 0{,}368$ м. Положительное направление отсчета координаты s выберем в сторону движения точки M от точки M_0. Определим зависимость $s = s(t)$, положив $v_\tau = v$ из соотношения

$$s = \int_0^t v_\tau dt = \int_0^t \sqrt{v_r^2 + v_p^2}\, dt,$$

которое удобно преобразовать к виду

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}\, d\varphi,$$

где $r = e^{\varphi}$; $\dfrac{dr}{d\varphi} = e^{\varphi}$; $s = \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{2e^{2\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\varphi} d\varphi = \sqrt{2}\,(e^{\varphi} - e^{\varphi_0}) = \sqrt{2}\,(e^{\varphi} - e^{-1})$, т. е. $s(t) = \sqrt{2}\,(e^{t^2} - 1)/e$.

Скорость точки M

$$\bar{v} = v_\tau \bar{\tau},$$

где $|\bar{\tau}| = 1$; $\bar{\tau}$ — единичный вектор, направленный в сторону положительных значений s по касательной к траектории движения точки M;

$$v_\tau = \dot{s} = \sqrt{2}\, e^{\varphi} \dot{\varphi} = \sqrt{2}\, e^{t^2 - 1} 2t = 2\sqrt{2}\, t e^{t^2 - 1}$$

— проекция скорости на касательную к траектории движения точки M.

Для $t = 1$ с

$$v_\tau = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки M

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n},$$

где $|\bar{n}| = 1$; $\bar{n}$ — единичный вектор, направленный по главной нормали к траектории движения точки M.

Проекция ускорения на ось, касательную к траектории движения точки M:

$$a_\tau = \ddot{s} = 2\sqrt{2}\, e^{t^2-1} + 4\sqrt{2}\, t^2 e^{t^2-1}.$$

Для момента времени $t = 1$ с

$$a_\tau = 6\sqrt{2} = 8{,}485 \text{ м/с}^2.$$

Проекция ускорения на нормаль к траектории движения точки M:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{104 - 72} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 5{,}675 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ м},$$

где ρ — радиус кривизны траектории движения точки M при $t = 1$ с.

Для проверки полученного значения найдем a_v — проекцию ускорения на ось, совпадающую со скоростью $\bar{v}$ точки M:

$$a_v = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \frac{v_r a_r + v_p a_p}{v}.$$

Для момента времени $t = 1$ с

$$a_v = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 10}{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}46 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_\tau \equiv \bar{a}_v$ направлен по касательной к траектории движения точки M.

Зададим движение точки M в декартовой системе координат:

$$x = r\cos\varphi;$$

$$y = r\sin\varphi.$$

При $t = 1$ с

$$x = 1\cdot\cos 0 = 1 \text{ м}; \quad y = 1\cdot\sin 0 = 0 \text{ м}.$$

Скорость точки M

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j},$$

где $\bar{i}, \bar{j}$ — орты координатных осей Ox, Oy.

Проекции скорости точки M на оси Ox, Oy:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = v_r\cos\varphi - v_p\sin\varphi;$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = v_r\sin\varphi + v_p\cos\varphi.$$

При $t = 1$ с

$$v_x = v_r = 2 \text{ м/с}; \quad v_y = v_p = 2 \text{ м/с}.$$

При $t = 1$ с

$$v_x = 2 \text{ м/с}; \quad v_y = 2 \text{ м/с}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки M

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}.$$

Проекции ускорения точки M на оси Ox, Oy:

$$\begin{aligned}
&a_x = \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi = \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\varphi; \\
&a_x = a_r\cos\varphi - a_p\sin\varphi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_y = \ddot{r}\sin\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\cos\varphi; \\
&a_y = a_r\sin\varphi + a_p\cos\varphi.
\end{aligned}$$

При $t = 1$ с

$$a_x = a_r = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_y = a_p = 10 \text{ м/с}^2; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Исследуем кинематику простейших движений твердого тела.

Звенья *1*, *2* совершают вращательное движение, звено *3* — поступательное движение.

Для звена *1*

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi} = 0{,}5t + 1{,}75.$$

При $t = 1$ с

$$\omega_{1z} = 2{,}25 \text{ рад/с}; \quad \omega_1 = |\omega_{1z}|;$$

$$\varepsilon_{1z} = \ddot{\varphi} = 0{,}5 \text{ рад/с}^2 = \text{const}; \quad \varepsilon_1 = |\varepsilon_{1z}|.$$

При $t = 1$ с $\omega_{1z} > 0$ и $\varepsilon_{1z} > 0$ направления круговых стрелок угловой скорости и углового ускорения соответствуют положительному направлению отсчета угла φ.

Звено *1* вращается равноускоренно. Так как проскальзывание между телами *1* и *2* отсутствует, у точек контакта звеньев *1* и *2* одинаковые скорости и касательные составляющие ускорения. Тогда

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2.$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{r_2} = \frac{2{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}1} = 9 \text{ рад/с}.$$

Направления круговых стрелок угловых скоростей согласованы с направлениями скоростей точек контакта тел.

Модуль угловой скорости тела *2*

$$\omega_2 = 8 \text{ рад/с}.$$

Из равенства касательных составляющих ускорений точек контакта тел *1* и *2* следует

$$\varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 r_2,$$

отсюда

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 R_1}{r_2} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,1} = 8 \text{ рад/с}^2.$$

Направления круговых стрелок угловых ускорений согласованы с направлениями касательных составляющих ускорений точек контакта тел.

Звено *2* вращается равноускоренно (рис. 3).

Точка A_2 принадлежит звену *2*, точка A_3 — звену *3*. У этих точек одинаковые скорости и касательные составляющие ускорения.

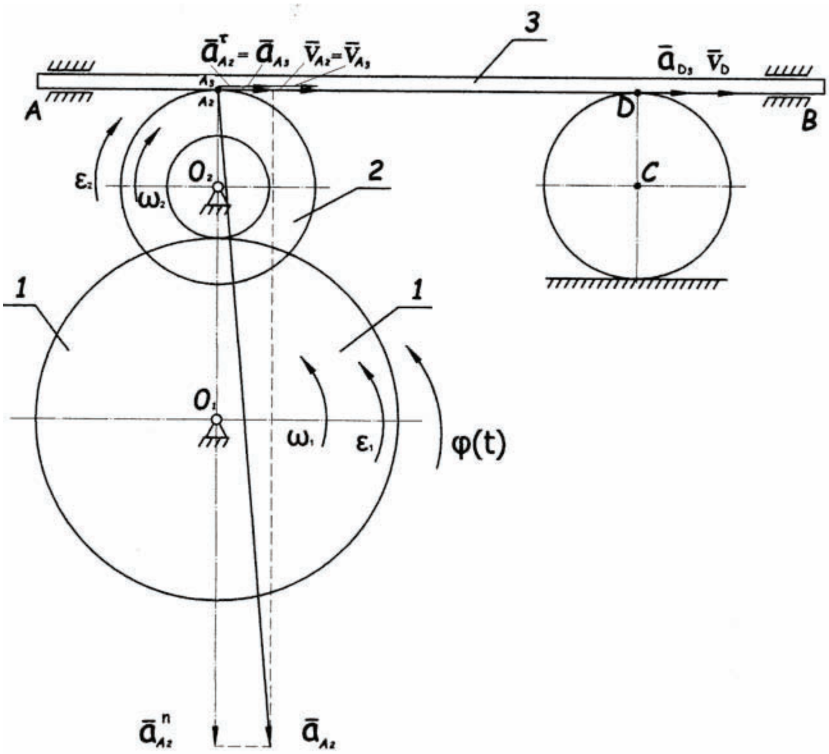


Рис. 3

Скорости точек A_2, A_3 и тела *3*

$$v_{A_2} = \omega_2 R_2 = 9 \cdot 0,2 = 1,8 \text{ м/с} = v_{A_3} = v_3 = v_D.$$

Ускорение точки A_2

$$\bar{a}_{A_2} = \bar{a}^{\tau}_{A_2} + \bar{a}^{n}_{A_2};$$

$$a^{\tau}_{A_2} = \varepsilon_2 R_2 = 8 \cdot 0,2 = 1{,}6 \text{ м/с}^2; \quad a_{A_3} = a_3 = a_{D_3} = |a^{\tau}_{A_2}|;$$

$$a^{n}_{A_2} = \omega_2^2 R_2 = 64 \cdot 0{,}2 = 12{,}8 \text{ м /с}^2;$$

$$a_{A_2} = \sqrt{(a^{\tau}_{A_2})^2 + (a^{n}_{A_2})^2} = \sqrt{1,6^2 + 12{,}8^2} = 12{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Вычисленные угловые скорости тел механизма, совершающих вращательные движения, изобразим на чертеже (см. рис. 3) круговыми стрелками, направляя их в сторону вращения тел при $t = 1$ с. Угловые ускорения тел также обозначим круговыми стрелками, направляя их в сторону круговых стрелок угловых скоростей при ускоренном вращении и в противоположную сторону при замедленном вращении. Найденные скорости и ускорения точек механизма изобразим на схеме (см. рис. 3) в соответствующем масштабе.

Пример 2 (рис. 4).

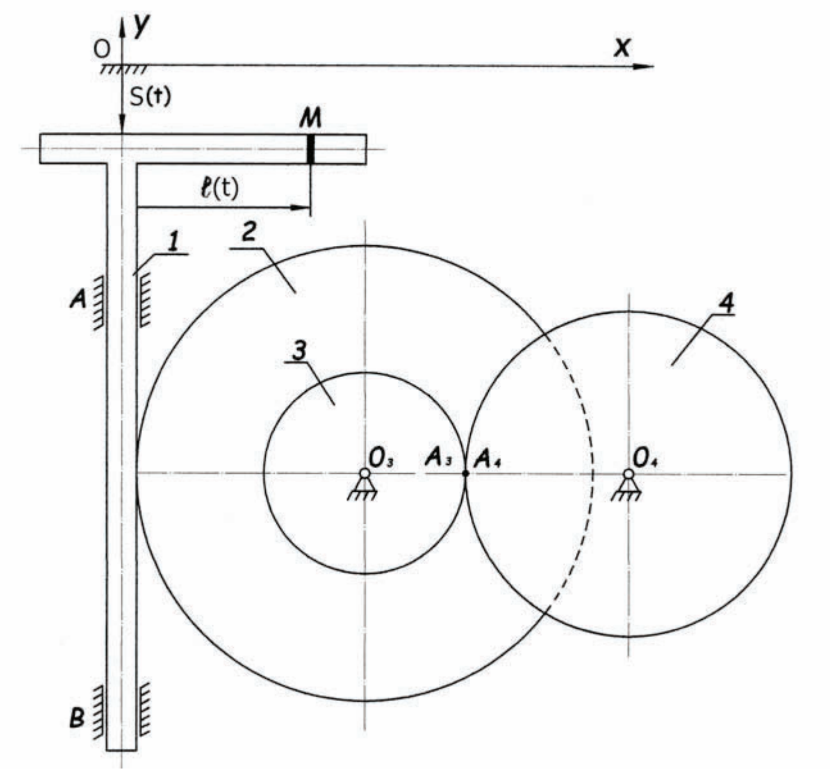


Рис. 4

Дано: $s = D \sin Et$, $l = C \cos 2Et$; $C = 5$ м, $D = -3$ м, $E = \pi/4$ рад/с; $r_2 = 0{,}8$ м, $r_3 = 0{,}4$ м, $r_4 = 0{,}6$ м.

Задать движение точки M координатным способом, найти траекторию точки M и для момента времени $t = 1$ с:

1) определить положение точки M, скорость $\overline{v}$ и ускорение $\overline{a}$ точки M, радиальную и трансверсальную составляющие скорости и ускорения точки M, касательную $\overline{a}_\tau$ и нормальную $\overline{a}_n$ составляющие ускорения точки M;

2) выполнить рисунок с изображением траектории точки M, на котором указать положение точки M при $t = 1$ с и изобразить все найденные составляющие скорости и ускорения точки M;

3) определить вид движения тел механизма, угловые скорости $\overline{\omega}$ и угловые ускорения $\overline{\varepsilon}$ пронумерованных звеньев механизма, скорости и ускорения точек A_3, A_4, указанные на рис. 4;

4) для момента времени $t = 1$ с указать найденные величины на схеме механизма, угловые скорости и угловые ускорения тел обозначить круговыми стрелками.

Исследуем кинематику движения точки M.

Уравнения движения точки M легко получить в декартовой системе координат, так как

$$x = l(t), \quad y = -s(t).$$

Таким образом, система уравнений, определяющих движение точки в декартовой системе координат, имеет вид

$$\begin{cases} x = 5\cos\dfrac{\pi}{2}t; \\ y = 3\sin\dfrac{\pi}{4}t, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — в м.

Определим траекторию точки M. Для этого исключим из системы уравнений (1) время t. Так как

$$\sin^2\frac{\pi}{4}t = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}t\right);$$

$$\frac{y^2}{9} = \sin^2\frac{\pi}{4}t = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{5}\right),$$

то

$$\frac{10}{9}\cdot y^2 = 5 - x.$$

Таким образом, траекторией точки M является часть параболы:

$$x = 5 - \frac{10}{9}y^2; \quad -5 \leqslant x \leqslant 5; \quad -3 \leqslant y \leqslant 3.$$

Координаты точки M при $t = 0$ с:

$$x = 5 \text{ м}; \quad y = 0 \text{ м}.$$

Координаты точки M при $t = 1$ с:

$$x = 5\cos\frac{\pi}{2} = 0 \text{ м}; \quad y = 3\sin\frac{\pi}{4} = 1,5\sqrt{2} = 2,121 \text{ м}.$$

Скорость точки M найдем по формуле

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$ — орты координатных осей Ox, Oy.

Проекция скорости точки M на ось Ox:

$$v_x = \dot{x} = -2{,}5\pi\sin\frac{\pi}{2}t.$$

Проекция скорости на ось Oy:

$$v_y = \dot{y} = 0,75\pi\cos\frac{\pi}{4}t.$$

При $t = 1$ с

$$v_x = -2{,}5\pi = -7{,}85 \text{ м/с}; \quad v_y = \frac{0{,}75\pi}{\sqrt{2}} = 1{,}665 \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 8,02 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки M

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}.$$

Проекция ускорения на ось Ox

$$a_x = \ddot{x} = -1,25\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t.$$

Проекция ускорения на ось Oy

$$a_y = \ddot{y} = -0,1875\pi^2\sin\frac{\pi}{4}t.$$

При $t = 1$ с

$$a_x = 0; \quad a_y = -\frac{0{,}1875\pi^2}{\sqrt{2}} = -1{,}307 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1,307 \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим движение точки M в полярной системе координат.

Полярный радиус, м,

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Полярный угол, рад,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

При $t = 1$ с

$$r = y = 2{,}1213 \text{ м}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ рад} = 90^\circ.$$

Скорость точки M

$$\bar{v} = v_r \bar{r}_0 + v_p \bar{p}_0,$$

где $\bar{r}_0$ — единичный вектор, направленный от точки O к точке M; $\bar{p}_0$ — единичный вектор, направление которого соответствует повороту $\bar{r}_0$ на 90° в положительном направлении отсчета угла φ.

Проекция скорости $\bar{v}$ на радиальную ось:

$$v_r = \dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y}) = \frac{x \cdot v_x + y \cdot v_y}{r}.$$

Проекция скорости $\bar{v}$ на трансверсальную ось:

$$v_p = r\dot{\varphi} = r\left(\frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{\dot{y} \cdot x - \dot{x} \cdot y}{x^2}\right) = \frac{x \cdot v_y - y \cdot v_x}{r}.$$

При $t = 1$ с

$$v_r = \frac{0 + yv_y}{r} = v_y = 1{,}665 \text{ м/с};$$

$$v_p = \frac{-yv_x}{r} = -v_x = -7{,}85 \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = 8{,}02 \text{ м/с}.$$

Проекция ускорения $\overline{a}$ на радиальную ось

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{xa_x + ya_y}{r}.$$

Проекция ускорения $\overline{a}$ на трансверсальную ось

$$a_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{xa_y - ya_x}{r}.$$

При $t = 1$ с

$$a_r = \frac{0 + ya_y}{r} = a_y = -1{,}307 \text{ м/с}^2; \quad a_p = \frac{-ya_x}{r} = 0,$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = 1{,}307 \text{ м/с}^2.$$

Для определения касательной составляющей ускорения $\overline{a}_\tau = \ddot{s}\,\overline{\tau}$ (где $a_\tau = \ddot{s}$ — проекция ускорения на касательную ось; $\overline{\tau}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории в положительном направлении координаты s), получим проекцию ускорения точки M на ось, совпадающую по направлению со скоростью точки:

$$a_v = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}.$$

Для $t = 1$ с

$$a_v = \frac{-7{,}85 \cdot 0 + (+1{,}665) \cdot (-1{,}307)}{8{,}02} = -0{,}271 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n},$$

причем $|a_v| = |a_\tau|$.

Нормальное ускорение точки M

$$a_n = \left| \frac{v_x a_y - v_y a_x}{v} \right| = \left| \frac{-7{,}85 \cdot (-1{,}307) - 0}{8{,}02} \right| = 1{,}28 \text{ м/с}^2,$$

или

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_v^2} = 1{,}28 \text{ м/с}^2,$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$.

Отсюда найдем в момент времени $t = 1$ с радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{8{,}02^2}{1{,}28} = 50{,}3 \text{ м.}$$

Найденные составляющие скорости и ускорения точки Mстроим на чертеже с изображением траектории точки M (рис. 5).

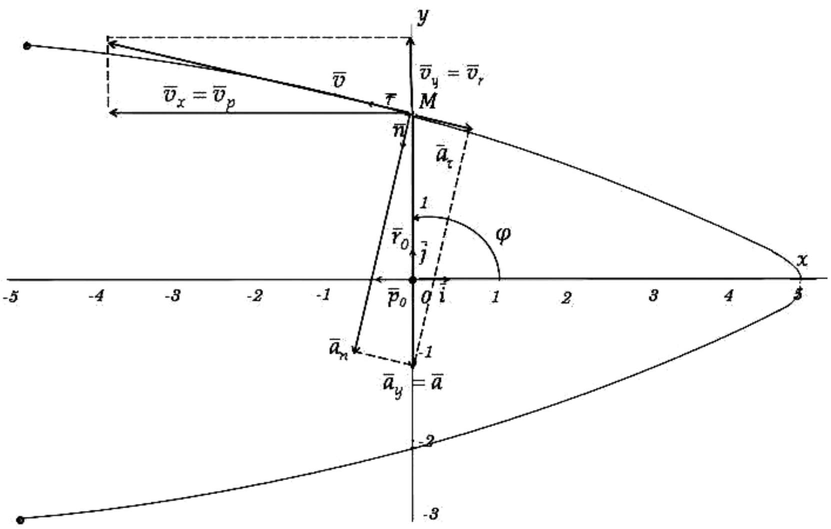


Рис. 5

Исследуем кинематику простейших движений твердого тела (см. рис. 4).

Дано: $s = -3\sin\dfrac{\pi t}{4}$.

Звено *1* совершает поступательное движение. Определим скорость звена *1*:

$$v_1^\tau = \dot{s} = -\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{4}.$$

При $t = 1$ с

$$\dot{s} = -\frac{3\sqrt{2}\,\pi}{8} \approx -1{,}67 \text{ м/с}; \quad v_1 = |\dot{s}| = 1{,}67 \text{ м/с.}$$

Знак «$-$» у проекции вектора скорости $\overline{v}_1$ на положительное направление оси s означает, что вектор $\overline{v}_1$ скорости звена *1* в момент времени $t = 1$ с направлен в сторону, противоположную положительному направлению координаты $s(t)$ (рис. 6).

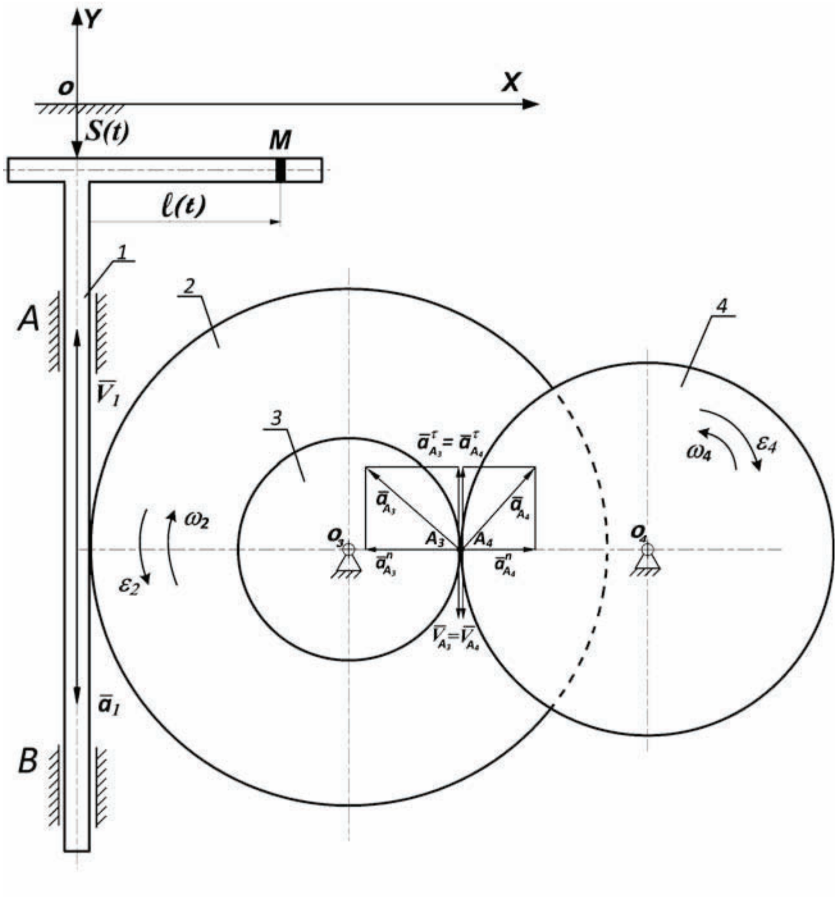


Рис. 6

Найдем ускорение звена *1*:

$$a_1^{\tau} = \ddot{s} = \frac{3\pi^2}{16} \sin \frac{\pi t}{4}.$$

При $t = 1$ с

$$\ddot{s} = \frac{3\sqrt{2}\,\pi^2}{32} \approx 1{,}31 \text{ м/с}^2; \quad a_1 = |\ddot{s}|\,.$$

Знаки у проекции скорости v_1^{τ} и у проекции ускорения a_1^{τ} разные, поэтому векторы скорости $\overline{v}_1$ и ускорения $\overline{a}_1$ направлены в разные стороны, т. е. звено *1* в момент времени $t = 1$ с движется замедленно.

Звено *2—3* (двухступенчатый блок) совершает вращательное движение (см. рис. 4). Ввиду отсутствия проскальзывания звена *1* по звену *2—3* скорости и касательные составляющие ускорений точек контакта этих тел равны, поэтому

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \approx \frac{1{,}67}{0{,}8} \approx 2{,}1\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

— модуль угловой скорости звена *2—3*;

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2} \approx \frac{1{,}31}{0{,}8} \approx 1{,}64\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

— модуль углового ускорения звена *2—3*.

Точка A_3 принадлежит звену *2—3*.

Модуль скорости точки A_3

$$v_{A_3} = \omega_2 r_3 \approx 2{,}1 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}84 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки A_3

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_3}^{\tau} + \bar{a}_{A_3}^{n}.$$

Модуль касательной составляющей ускорения точки A_3

$$\left|a_{A_3}^{\tau}\right| = \varepsilon_2 r_3 \approx 1{,}64 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}66 \text{ м/с}^2.$$

Модуль нормального ускорения точки A_3

$$a_{A_3}^{n} = \omega_2^2 \cdot r_3 \approx 2{,}1^2 \cdot 0{,}4 \approx 1{,}76 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения точки A_3

$$a_{A_3} = \sqrt{(a_{A_3}^{\tau})^2 + (a_{A_3}^{n})^2} \approx 1{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Звено *4* совершает вращательное движение. Точка A_4 принадлежит звену *4*. Ввиду отсутствия проскальзывания звеньев *4* и *2—3* имеем

$$\overline{v}_{A_4} = \overline{v}_{A_3};$$

$$v_{A_4} = v_{A_3} = \omega_4 r_4 = 0{,}84 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, модуль угловой скорости звена *4*

$$\omega_4 = \frac{v_{A_4}}{r_4} \approx \frac{0,84}{0,6} = 1{,}4 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Ускорение точки A_4

$$\bar{a}_{A_4} = \bar{a}^{\tau}_{A_4} + \bar{a}^{n}_{A_4}.$$

Ввиду отсутствия проскальзывания звеньев *2—3* и *4* имеем

$$\bar{a}^{\tau}_{A_4} = \bar{a}^{\tau}_{A_3}.$$

Модуль касательной составляющей ускорения точки A_4

$$|a^{\tau}_{A_4}| = |a^{\tau}_{A_3}| = \varepsilon_4 r_4.$$

Отсюда находим модуль углового ускорения звена *4*

$$\varepsilon_4 = \frac{|a^{\tau}_{A_4}|}{r_4} = \frac{0{,}66}{0{,}6} = 1{,}1 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Направления угловых скоростей и угловых ускорений тел механизма, совершающих вращательное движение, показываем на чертеже круговыми стрелками, согласовывая их направления с направлениями векторов скоростей и касательных ускорений соответствующих точек контакта тел (см. рис. 6).

Нормальное ускорение точки A_4

$$a^{n}_{A_4} = \omega_4^2 r_4 = 1{,}18 \text{ м/с}^2.$$

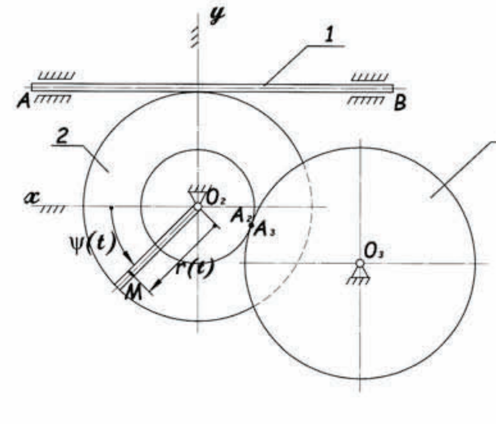
Модуль ускорения точки A_4

$$a_{A_4} = \sqrt{(a^{\tau}_{A_4})^2 + (a^{n}_{A_4})^2} = 1{,}35 \text{ м/с}^2,$$

для точек A_i контакта тел найденные скорости, ускорения и их составляющие строим на схеме механизма в соответствующем масштабе (см. рис. 6).

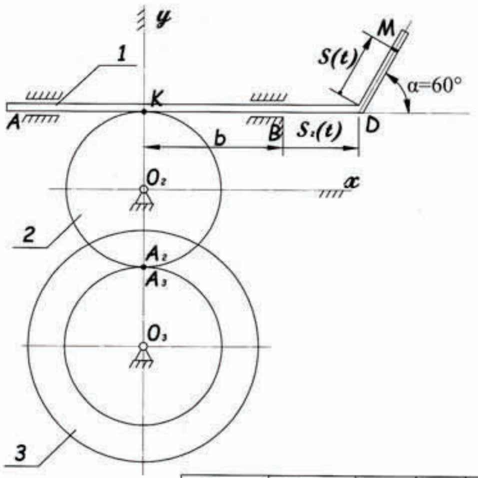
4. Схемы к вариантам курсового задания

1



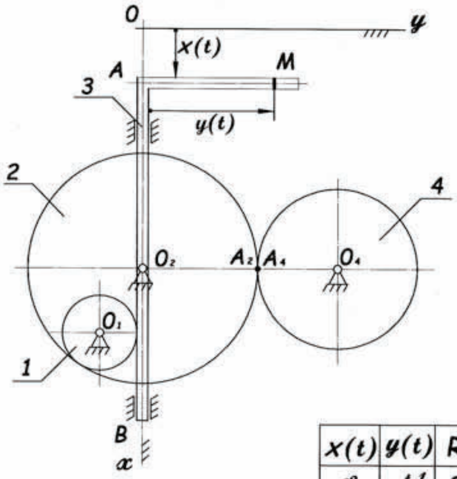
$r(t)$	$\psi(t)$	R_2	r_2	R_3	t
$0{,}3t^2$	$0{,}3t^2$	1	0,5	1	1

2



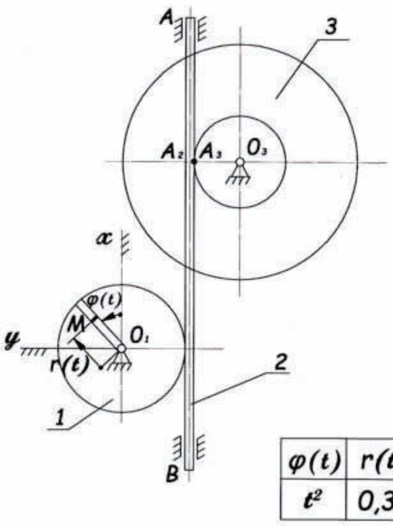
$S_1(t)$	$S_2(t)$	R_2	r_3	R_3	b	t
$0{,}4t^2$	$0{,}2t^2$	0,2	0,3	0,3	0,4	1

3



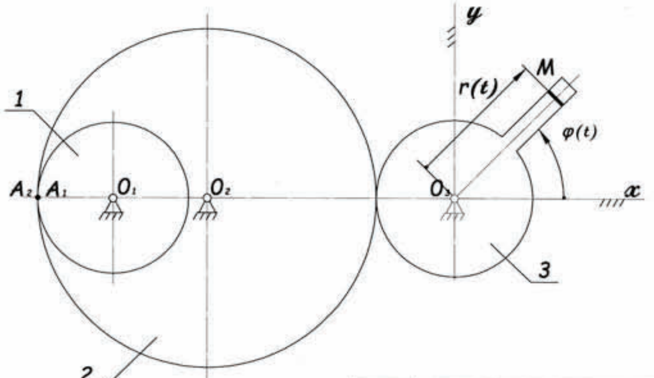
$x(t)$	$y(t)$	R_1	R_2	R_3	t
t^2	e^{t-1}	0,1	0,4	0,3	1

4



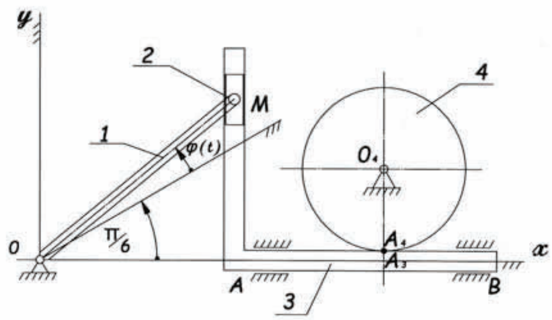
$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_3	r_3	t
t^2	$0,3t$	0,3	0,4	0,1	1

⑤



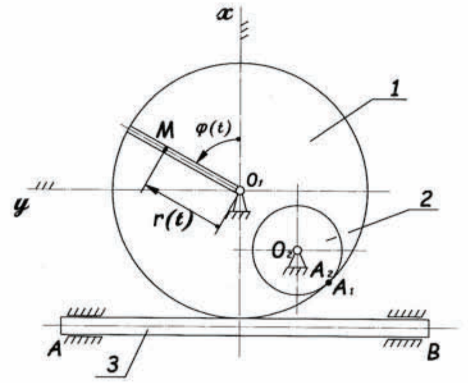
$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	R_3	t
t^2	e^{t^2}	0,1	0,3	0,2	1

⑥



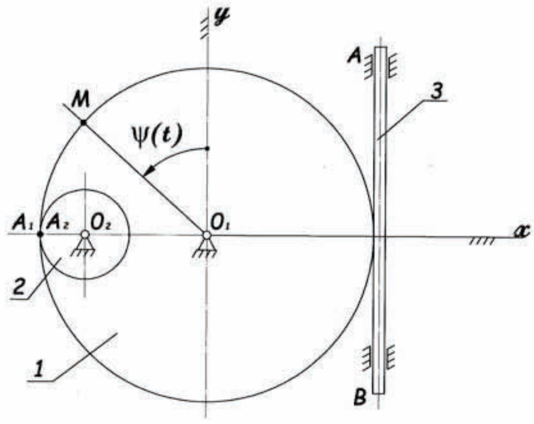
$\varphi(t)$	R_4	ℓ	OM	t
$0{,}6t^2$	0,2	0,6	0,6	1

7

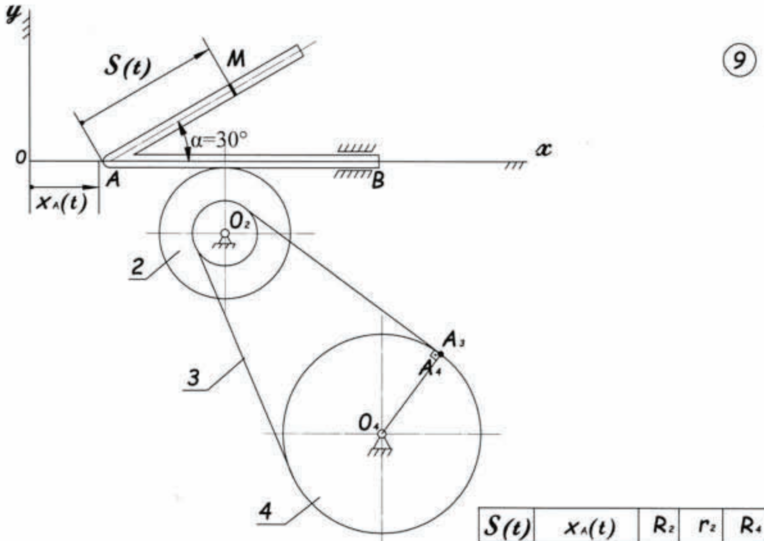


$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	t
$\frac{\pi}{6}t$	$0{,}1t^2$	0,3	0,1	1

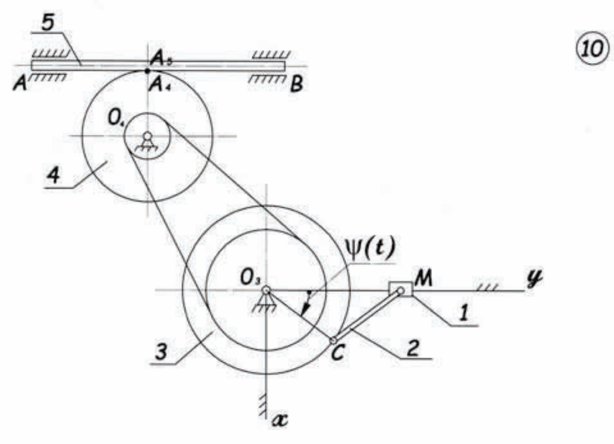
8



$\psi(t)$	R_1	R_2	t
$\frac{\pi}{3}t$	0,4	0,1	1

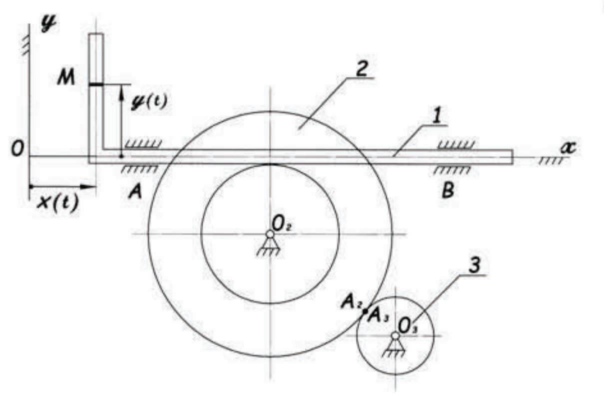


$S(t)$	$x_A(t)$	R_2	r_2	R_4	t
$0{,}1t^2$	$0{,}2(1+t)$	0,2	0,1	0,3	1



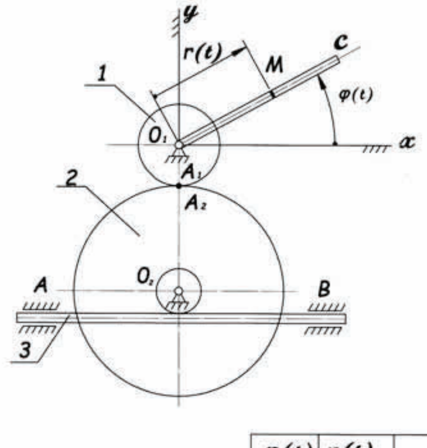
$\psi(t)$	R_3	r_3	R_4	r_4	$O_3C=CM$	t
$\frac{\pi}{4}t$	0,4	0,2	0,4	0,1	0,4	1

(11)



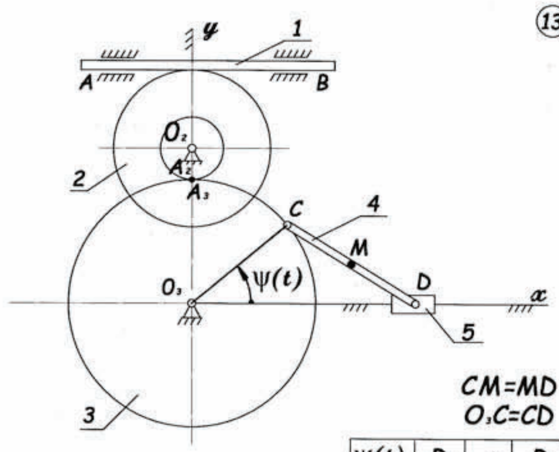
$x(t)$	$y(t)$	r_2	R_2	R_3	t
$0,1t^2+t$	$0,2t^2+2t+3$	0,1	0,2	0,05	1

(12)



$\varphi(t)$	$r(t)$	r_2	R_1	R_2	t
$\frac{\pi}{4}t$	$0,5t^2$	0,1	0,2	0,5	1

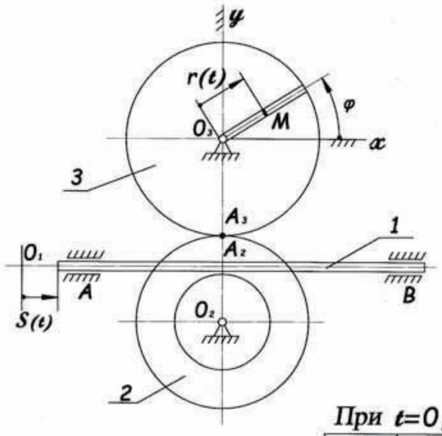
(13)



$CM=MD$
$O_3C=CD$

$\psi(t)$	R_2	r_2	R_3	t
$\frac{\pi}{4}t$	0,3	0,1	0,4	1

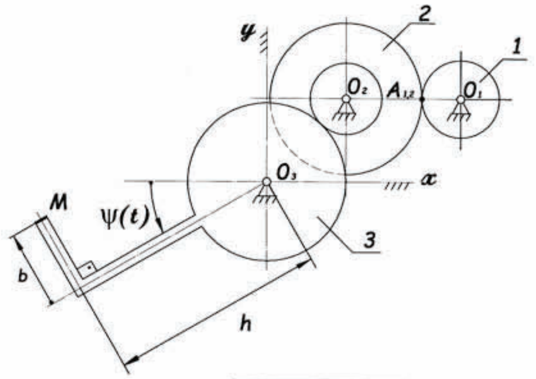
(14)



При $t=0$, $S(t)=0$, $\varphi=0$

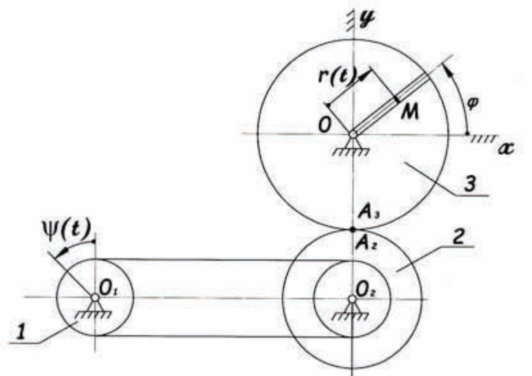
$S(t)$	$r(t)$	r_2	R_2	R_3	t
$0,2t^2$	$0,5t$	0,1	0,2	0,3	1

15



$\psi(t)$	R_1	R_2	r_2	R_3	h	b	t
$\frac{\pi}{4}t$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,5	0,2	1

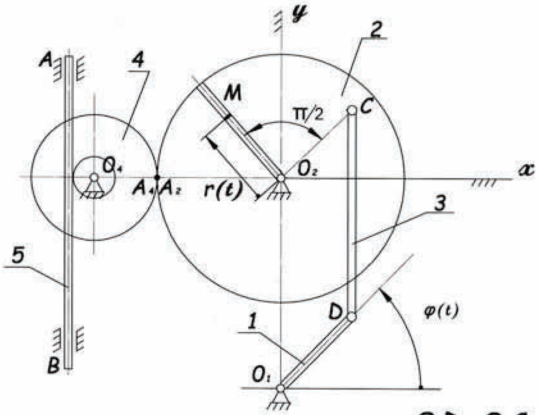
16



При $t=0,\ \psi(t)=0,\ \varphi=0$

$\psi(t)$	$r(t)$	r_2	R_1	R_2	R_3	t
t^2	$0{,}2t^2$	0,1	0,1	0,3	0,4	1

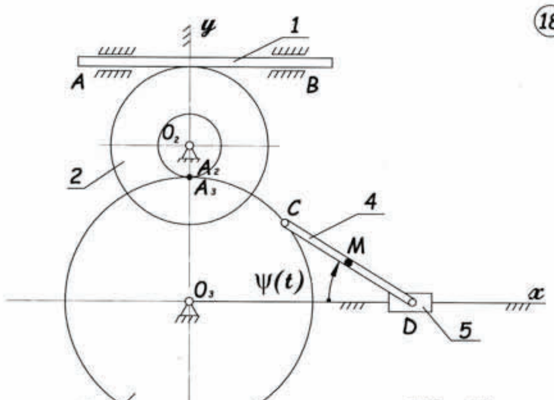
(17)



$O_1D = O_2C = \ell$

$\varphi(t)$	$r(t)$	r_4	R_2	R_4	ℓ	t
$\frac{1}{3}t^2$	t^2	0,3	0,8	0,4	0,6	2

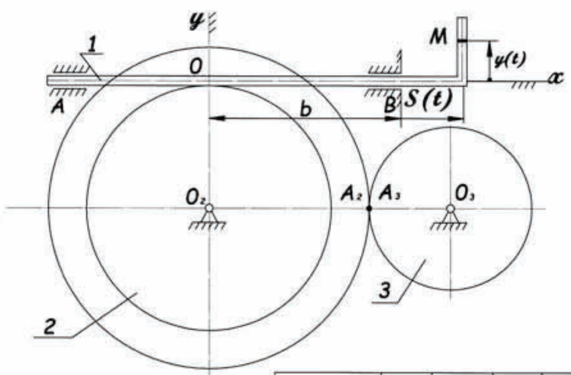
(18)



$CM = MD$

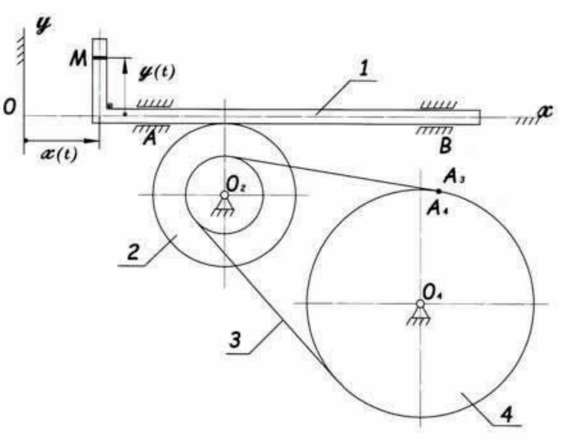
$\psi(t)$	R_2	r_2	R_3	CD	t
$\frac{\pi}{6}t$	0,3	0,1	0,4	0,4	1

19



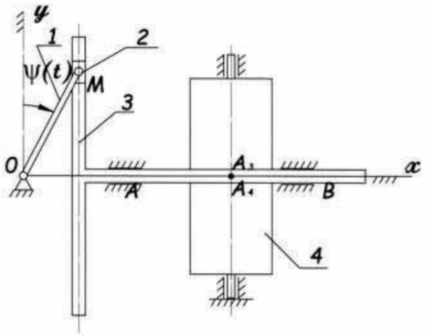
$S(t)$	$y(t)$	b	r_2	R_2	R_3	t
$\sin(\pi t)$	t^2	0,4	0,2	0,3	0,1	1

20



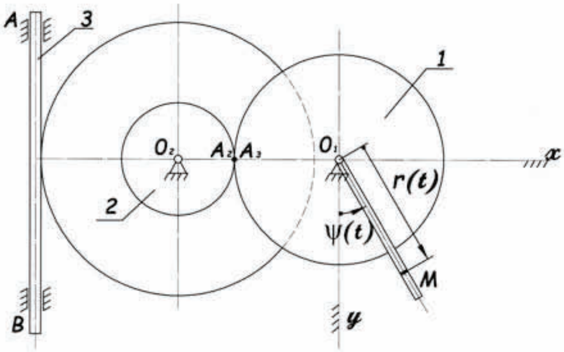
$x(t)$	$y(t)$	r_2	R_2	R_4	t
$0,1t^2$	$0.2t$	0,1	0,2	0,3	1

21



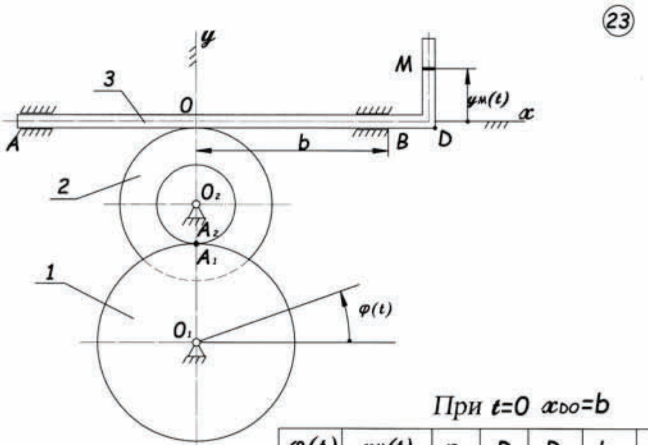
$\psi(t)$	OM	R_4	t
$\frac{\pi}{4}t^2$	0,4	0,1	1

22



$\psi(t)$	R_1	R_2	r_2	$r(t)$	t
$\frac{\pi}{6}t$	0,2	0,3	0,1	0,2t	1

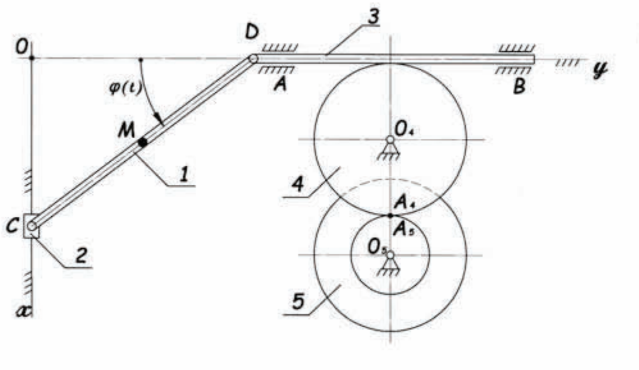
23



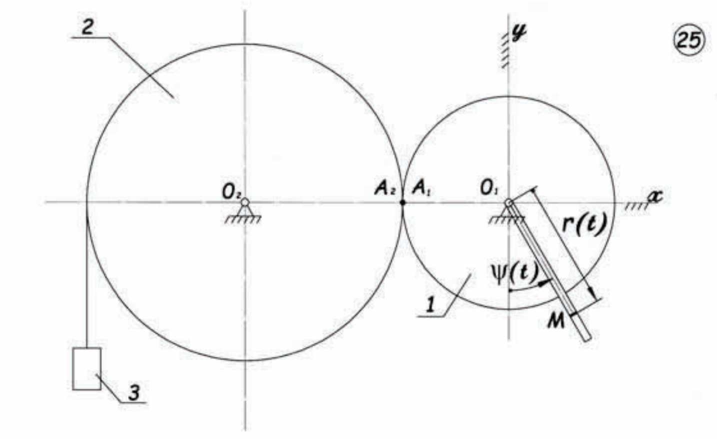
При t=0 x_{D0}=b

$\varphi(t)$	$y_M(t)$	r_2	R_1	R_2	b	t
t^2	$t^2+0,2t$	0,2	0,5	0,4	0,5	1

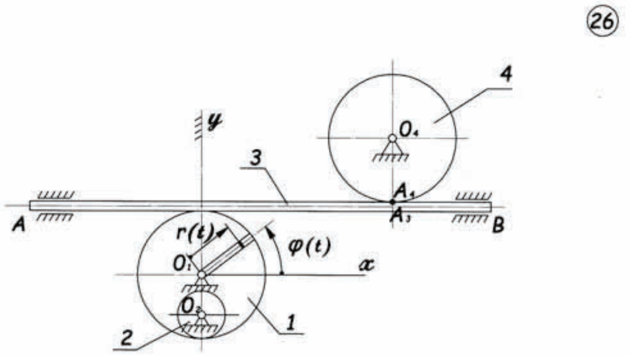
24



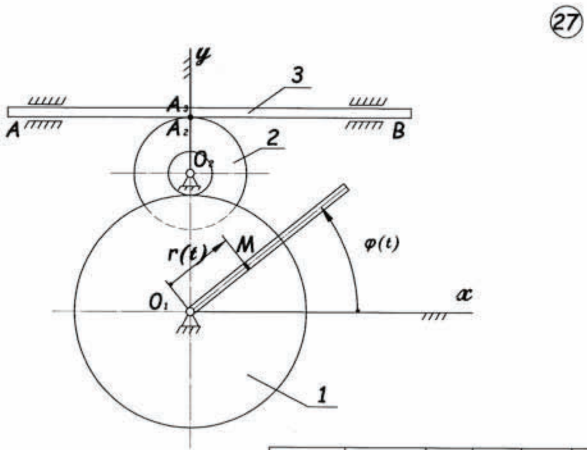
$\varphi(t)$	R_4	R_5	r_5	CM=MD	t
t^2	0,2	0,2	0,1	0,3	1



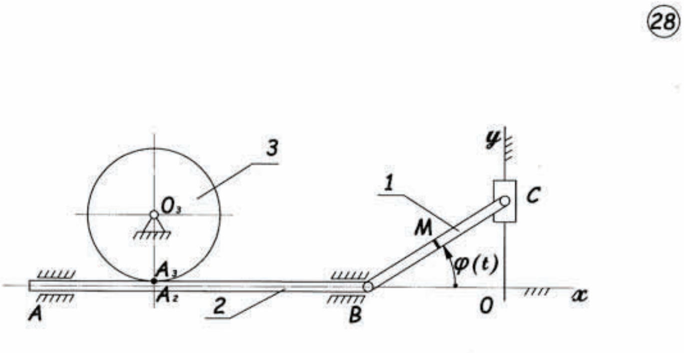
$r(t)$	$\psi(t)$	R_2	R_3	r_2	t
$0{,}3t$	$\frac{\pi}{4}t$	0,3	0,2	0,1	1



$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	R_4	t
$\frac{\pi}{6}t$	$0{,}2t$	0,3	0,1	0,3	1

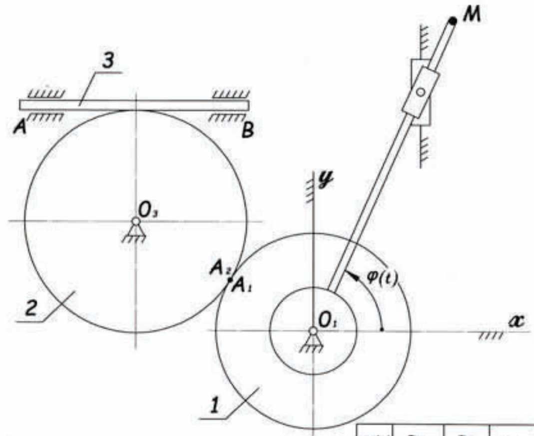


φ(t)	r(t)	R_1	R_2	r_2	t
$\frac{\pi}{3}t$	$3t^2$	0,4	0,2	0,1	0,5



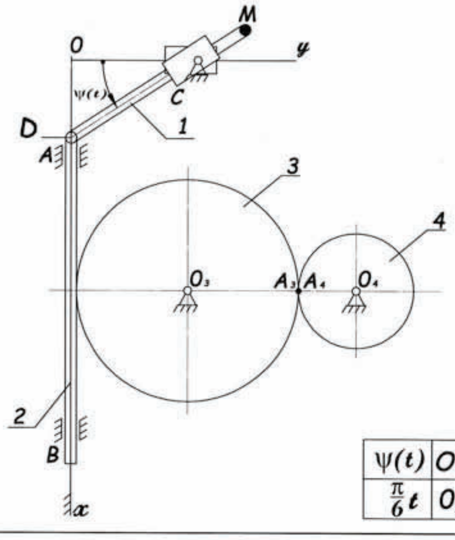
φ(t)	R_3	BM=MC	t
$\frac{\pi}{6}t$	0,5	0,4	1

29



$\varphi(t)$	R_1	R_2	r_1	O_1M	t
t^2	0,3	0,2	0,1	0,6	1

30



$\psi(t)$	OC	DM	R_3	R_4	t
$\frac{\pi}{6}t$	0,1	0,4	0,8	0,4	1

ЛИТЕРАТУРА

Виноградов А.Н., *Пилюгина Н.Н.*, *Феоктистова О.П.* Кинематика точки и простейшие движения твердого тела: Метод. указания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 38 с.

Лапшин В.В. Кинематика точки и простейших движений твердого тела: Метод. указания к выполнению курсовой работы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 36 с.

Кинематика точки и простейшие движения твердого тела: Метод. указания / Я.А. Болотникова, А.А. Панкратов, А.А. Пожалостин, П.М. Шкапов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1991. 53 с.

Курс теоретической механики: Учеб. для вузов / Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 760 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
1. Кинематика точки 4
2. Кинематика простейших движений твердого тела 5
3. Примеры выполнения курсового задания 5
4. Схемы и варианты курсового задания 23
Литература 38

Учебное издание

Феоктистова Ольга Павловна
Гартиг Елена Борисовна
Пожалостин Алексей Алексеевич
Панкратов Александр Алексеевич

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *О.В. Калашникова*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 24.12.2012. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,33. Тираж 1500 экз. Изд. № 9.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.