

# **ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ**

**Часть 1**

**Одноканальные инерциальные  
навигационные системы**

Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана

**Л.М. Селиванова, Е.В. Шевцова**

**ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ  
НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ**

**ЧАСТЬ 1**

**Одноканальные инерциальные  
навигационные системы**

*Рекомендовано Научно-методическим советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2012

УДК 629.7.054.071(075.8)

ББК 39.57-5

С29

Рецензенты: *Н.А. Махмутов, И.С. Потапцев*

**Селиванова Л.М.**

С29 Инерциальные навигационные системы: учеб. пособие. — Ч. 1: Одноканальные инерциальные навигационные системы / Л.М. Селиванова, Е.В. Шевцова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. — 46, [2] с. : ил.

Приведены основные понятия инерциальной навигации, рассмотрен инерциальный метод счисления пути. Дан классический вывод основного уравнения инерциальной навигации. Описаны различные модели формы Земли и основных систем координат. Приведены теорема Шулера и схема моделирования невозмущаемого физического маятника с помощью гироскопов и акселерометров, предложенная Е.Б. Левенталем. Рассмотрены принцип работы и классификация погрешностей одноканальных инерциальных навигационных систем (ИНС). Проанализированы уравнения погрешностей одноканальных ИНС для различных частных случаев. Приведены графические зависимости погрешностей одноканальных ИНС от времени.

Для студентов старших курсов, обучающихся по специальности «Системы управления летательными аппаратами» по специализациям кафедры ИУ-2 «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации».

УДК 629.7.054.071(075.8)

ББК 39.57-5

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Понятие «навигация» в современном понимании включает в себя совокупность научных дисциплин, посвященных методам и средствам перемещения подвижных объектов во времени и в пространстве по траекториям, которые обеспечивают решение их целевой задачи в соответствующих условиях ее выполнения. В качестве подвижных объектов могут рассматриваться летательные аппараты (самолеты, вертолеты, ракеты, космические летательные аппараты), корабли и суда, различные наземные транспортные средства (автомобили, поезда и пр.).

Настоящее учебное пособие является первым в списке планируемых публикаций по теории инерциальных навигационных систем (ИНС). В данном пособии отражены основополагающие разделы: основное уравнение инерциальной навигации, классификация ИНС, форма Земли, основные системы координат, понятие о невозмущаемости на основе теоремы Шулера, методические и инструментальные погрешности ИНС на примере одноканальных ИНС, погрешности вертикального канала. Все эти разделы являются существенными при рассмотрении двух- и трехканальных ИНС.

### 1. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общая задача навигации включает в себя следующие взаимосвязанные задачи:

- собственно задачу навигации — определение параметров поступательного движения объекта как материальной точки (координат, составляющих вектора скорости);
- задачу ориентации — определение параметров углового движения объекта вокруг его центра масс (углов ориентации, угловых скоростей);
- задачу управления подвижным объектом, обеспечивающую его движение по заданной траектории.

По принятой классификации различают три метода навигации:

- *обзорно-сравнительный метод*, основанный на сравнении заранее подготовленных эталонных изображений местности — оптического, инфракрасного, радиолокационного и т. п. (или изображений ориентиров) — с текущим изображением, полученным в процессе движения объекта;

- *метод поверхностей и линий положения (позиционный метод)*, основанный на измерении значений некоторых физических величин, определяющих линии или поверхности положения, пересечение которых определяет местоположение объекта (астронавигация);

- *методы счисления пути*, основанные на измерении составляющих вектора скорости или ускорения объекта в некоторой системе координат и их интегрировании или двойном интегрировании по времени в целях вычисления значений изменения координат объекта по их известным начальным значениям:

$$V = \int_0^t a \, dt; \quad S = \int_0^t V \, dt = \int_0^t \int_0^t a \, dt, \quad (1.1)$$

где  $V$  — скорость движения объекта относительно Земли;  $t$  — время;  $a$  — ускорение объекта;  $S$  — пройденный путь.

Выражения (1.1) называют *формулами счисления пути*.

По типу измерителей методы счисления пути можно подразделить следующим образом:

- метод воздушного счисления пути (с использованием датчиков воздушной скорости);
- метод доплеровского счисления пути (с использованием доплеровского измерителя скорости и угла сноса);
- метод инерциального счисления пути (с использованием приборов, действие которых основано на законах инерции: *акселерометров*, измеряющих линейные ускорения; *гироскопов*, задающих или определяющих направление осей чувствительности акселерометров).

Инерциальные навигационные системы представляют собой инерциальные системы счисления пути.

Методам счисления пути присущ общий недостаток — погрешности растут пропорционально времени. Покажем это на примере.

Пусть скорость объекта относительно Земли измеряется каким-либо образом:

$$V_X = \dot{X}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) соответствует идеальному случаю, когда погрешности измерения отсутствуют. Однако на практике результат измерения — это сумма истинного значения величины и погрешности измерения:

$$\tilde{V}_X = \dot{X} + \delta\dot{X}, \quad (1.3)$$

где  $\tilde{V}_X$  — измеренная скорость;  $\dot{X}$  — истинное значение скорости;  $\delta\dot{X}$  — погрешность измерения скорости.

Если погрешность измерения скорости — величина постоянная, т. е.  $\delta\dot{X} = \text{const}$ , то, интегрируя выражение (1.3), можно получить

$$\tilde{X} = \int_0^t (\dot{X} + \delta\dot{X}) dt = X(t) - X(0) + \delta\dot{X}t, \quad (1.4)$$

где  $\tilde{X}$  — измеренное значение пройденного пути;  $X$  — истинное значение пройденного пути.

Таким образом, погрешность измерения местоположения будет расти пропорционально времени.

*Инерциальная навигация* — метод определения координат и параметров движения различных объектов (судов, самолетов, ракет и пр.) и управления их движением, основанный на свойствах инерции тел и являющийся автономным, т. е. не требующим наличия внешних ориентиров или поступающих извне сигналов.

Разработка основ инерциальной навигации относится к 30-м годам XX века. Большой вклад в ее изучение внесли российские ученые Б.В. Булгаков, А.Ю. Ишлинский, Е.Б. Левенталь, Г.О. Фридлиндер, немецкий ученый М. Шулер и американский ученый Ч. Дрейпер.

Метод инерциальной навигации заключается в определении ускорений движущегося объекта и его угловых скоростей с помощью установленных на нем приборов и устройств, а на основе полученных данных — в решении задачи навигации, задачи ориентации и задачи управления.

Практическая реализация методов инерциального счисления пути возможна благодаря специальным техническим средствам — инерциальным навигационным системам. Инерциальные системы навигации предназначены для автоматического и полуавтоматического управления и ведения к цели движущихся объектов. Основной особенностью таких систем является их полная автономность, т. е. независимость от наземных устройств. Оборудование инерциальной системы, установленное на подвижном объекте,

позволяет вне связи с Землей и без ориентации по каким-либо другим небесным телам вести объект к цели, используя для этого исключительно законы движения Ньютона, действующие в инерциальном пространстве. На современных объектах устанавливаются навигационные комплексы, включающие в себя датчики навигационной информации различных методов навигации: ИНС, астросистемы, системы спутниковой навигации, системы радионавигации, при этом каждая система работает в наилучших для нее условиях. Центральной системой комплекса является ИНС, поскольку ей присущи следующие достоинства:

- максимальная автономность (определение навигационных параметров движения объекта, не требующее наличия внешних ориентиров или поступающих извне сигналов);
- помехозащищенность (например, при возникновении магнитных бурь или других помех нормальная работа радиосистемы нарушается, а инерциальная система работает без сбоев);
- скрытность работы и возможность полной автоматизации всех процессов навигации.

## 2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

В инерциальной системе координат второй закон Ньютона для свободной материальной точки можно записать в виде

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса материальной точки;  $\vec{r}$  — радиус-вектор материальной точки;  $\vec{F}$  — равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

В поле сил тяготения Земли равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{акт}} + \vec{G}_r, \quad (2.2)$$

где  $\vec{F}_{\text{акт}}$  — активные негравитационные силы, действующие на тело;  $\vec{G}_r$  — гравитационные силы, действующие на тело в поле сил тяготения Земли.

Перепишем выражение (2.1) с учетом (2.2) в виде

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{акт}} + \vec{G}_r. \quad (2.3)$$

Разделив уравнение (2.3) на массу  $m$  материальной точки с учетом того, что вторая производная радиус-вектора есть абсолютное ускорение, получим

$$\vec{w} = \frac{\vec{F}_{\text{акт}}}{m} + \frac{\vec{G}_r}{m}$$

или

$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{g}_r. \quad (2.4)$$

Перепишем выражение (2.4) в следующем виде:

$$\vec{a} = \vec{w} - \vec{g}_r, \quad (2.5)$$

где  $\vec{a}$  — кажущееся ускорение, измеряемое акселерометром (т. е. ускорение, которое имела бы материальная точка под действием негравитационных сил, если бы она могла двигаться в пространстве, свободном от действия сил тяготения Земли);  $\vec{w}$  — абсолютное ускорение;  $\vec{g}_r$  — гравитационное ускорение.

Уравнение (2.5) носит название *основного уравнения инерциальной навигации*.

Сущность метода инерциальной навигации сводится к интегрированию уравнения (2.5). Чтобы проинтегрировать это векторное уравнение, необходимо перейти к трем скалярным уравнениям, которые можно получить проектированием векторного уравнения на какие-либо три некопланарных направления, т. е. на оси определенным образом выбранной системы координат.

### 3. ФОРМА ЗЕМЛИ. КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ЗЕМНОМ СФЕРОИДЕ

Под фигурой Земли понимают поверхность воды океана, которая заполняет узкие каналы, прорытые на суше. В открытом океане она совпадает с поверхностью воды, не возмущенной волнами от приливов и ветра.

Форма этой поверхности является результатом суммарного действия сил тяготения Земли и центробежной силы, обусловленной вращением Земли вокруг своей оси. Нормаль к спокойной по-



верхности океана совпадает с направлением результирующей сил тяготения Земли и центробежной силы, т. е. с направлением силы тяжести. Это направление называют *направлением отвеса* или *истинной вертикалью*.

Уровенная поверхность Земли очень сложна и не может быть точно представлена какой-либо правильной геометрической формой. Для определения ее принят специальный термин — *геоид*, предложенный в 1873 г. немецким ученым И. Листингом.

В каждой точке геоида нормаль к его поверхности совпадает с направлением силы тяжести, т. е. с равнодействующей сил тяготения и центробежной силы от вращения Земли.

Поверхность геоида является уровенной поверхностью силы тяжести. Геоид имеет сложную и неправильную форму, обусловленную распределением масс в земной коре и на поверхности Земли. Такую поверхность трудно использовать в практических приложениях. Поэтому подбирают достаточно простую поверхность, которая настолько близка к геоиду, что ее можно применять в большинстве расчетов.

С достаточной степенью точности геоид может быть аппроксимирован поверхностью, образованной вращением эллипса вокруг его малой оси, совпадающей с осью вращения Земли. Получаемый при этом эллипсоид вращения, называемый обычно *эллипсоидом Клеро*, будет определен, если задать его полуоси  $a$  и  $b$ . Эллипсоид вращения можно определить также, задав одну из полуосей, например большую полуось  $a$ , и сжатие  $\alpha = (a - b)/a$  или эксцентриситет  $e$ , квадрат которого равен  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ .

Ввиду малости  $\alpha$  и  $e^2$  (и, следовательно, близости эллипсоида Клеро к сфере) часто употребляют также другое название уровенной поверхности — *земной сфероид*.

На основе многочисленных измерений, выполненных в различных областях Земли, неоднократно определяли элементы земного сфероида: длину его большой полуоси  $a$  и длину малой полуоси  $b$ , являющейся осью вращения Земли.

В России согласно ГОСТ Р 51794—2001 в качестве параметров эллипсоида вращения приняты элементы референц-эллипсоида Ф.Н. Красовского (табл. 1.1).

Таблица 1.1

## Элементы референц-эллипсоида Ф.Н. Красовского

Параметр	Обозначение	Числовое значение
Большая полуось	$a$	6 378 245 м
Малая полуось	$b$	6 356 863 м
Сжатие	$\alpha = \frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{298,3}$

Отметим, что отклонение нормали к геоиду (т. е. от истинной вертикали) от направления нормали к эллипсоиду Клеро не превышает при соответствующем выборе его параметров нескольких угловых секунд ( $2'' \dots 3''$ ), а отклонение поверхности геоида от поверхности эллипсоида вдоль нормали имеет порядок десятков метров (100...150 м).

Рассмотрим координаты точек на земном сфероиде (рис. 3.1).

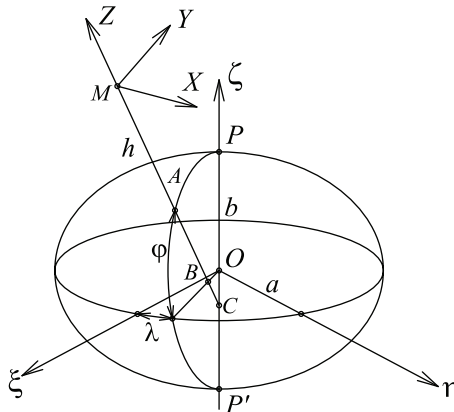


Рис. 3.1. Координаты точек на земном сфероиде

Точки  $P$  и  $P'$  пересечения малой оси со сфероидом называются полюсами Земли: тот из них, со стороны которого вращение Земли происходит против хода часовой стрелки, называют Северным полюсом, противоположный полюс — Южным.

Плоскость, проходящая через центр и перпендикулярная малой оси сфероида, пересекает его по экватору. Экватор сфероида представляет собой окружность радиуса  $a$ .

Плоскости, параллельные плоскости экватора, пересекают сфероид по малым кругам, называемым *параллелями*. Любая плоскость, проходящая через малую ось, пересекает сфероид по эллипсу с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b$ .

Полуэллипсы, соединяющие полюсы, являются меридианами. Меридиан, проходящий через некоторую точку гринвичской обсерватории, называется *главным* (или *нулевым*) *меридианом*. Положение меридиана относительно главного меридиана определяется долготой  $\lambda$  (дугой экватора  $Q_{гр}Q$ ). Долгота изменяется от  $0$  до  $180^\circ$  в западном и восточном направлениях. Иногда удобно измерять долготу в восточном направлении от  $0$  до  $360^\circ$ .

Положение точки на меридиане определяется широтой. Различают несколько широт.

Для дальнейшего описания свойств земного эллипсоида свяжем с ним правую ортогональную систему координат  $O\xi\eta\zeta$ . Начало этой системы координат поместим в центр Земли  $O$ , ось  $O\xi$  направим по малой оси земного эллипсоида в сторону Северного полюса. Оси  $O\xi$  и  $O\eta$  будут находиться в плоскости экватора. Чтобы окончательно определить эту систему координат, расположим ось  $O\xi$  вдоль линии пересечения плоскости экватора с плоскостью главного меридиана.

Уравнение эллипсоида Клеро в выбранной системе координат имеет вид

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1.$$

Пусть точка  $M$  (см. рис. 3.1) — некоторая произвольно выбранная точка в системе координат  $O\xi\eta\zeta$ . Проведем через эту точку нормаль к поверхности эллипсоида. Она будет лежать в меридиональной плоскости, содержащей точку  $M$ , и пересечет эллипсоид в точке  $A$ , плоскость экватора в точке  $B$ , ось  $O\xi$  в точке  $C$ . Положение точки  $M$  в системе координат  $O\xi\eta\zeta$  можно определить углом  $\varphi$ , образованным нормалью к поверхности эллипсоида с плоскостью экватора, который носит название *географической* (или *геодезической*) *широты* места, углом  $\lambda$  (*географическая долгота*) между плоскостями меридиана точки  $M$  и главного меридиана и отрезком нормали  $h$  от точки  $A$  до точки  $M$  (*высота точки  $M$  над уровнем океана*).

Геоцентрическая широта  $\varphi'$  определяется углом, который образует радиус-вектор  $\overline{OM}$  с плоскостью земного экватора.

Астрономическая широта определяется углом между отвесной линией и плоскостью земного экватора. Очевидно, что непосредственно можно измерить только астрономическую широту. Однако практически с точностью до составляющей уклонения отвеса она совпадает с географической широтой.

Все широты изменяются в пределах  $-90^\circ \dots +90^\circ$ , широта считается положительной для точек, лежащих к северу от экватора.

Линии  $\varphi = \text{const}$  (или  $\varphi' = \text{const}$ ), являющиеся параллелями, и  $\lambda = \text{const}$ , являющиеся меридианами, образуют ортогональную координатную сетку на поверхности земного сфероида. Полюсы  $P$  и  $P'$  являются особыми точками координатной сетки. В полюсах теряет смысл понятие долготы, так как в них пересекаются все меридианы.

Свяжем с точкой  $M$  правую ортогональную систему координат  $MXYZ$ . Ось  $MZ$  направим вдоль положительной нормали к земному эллипсоиду. Ось  $MU$  расположим в меридиональной плоскости (плоскость местного горизонта), содержащей точку  $M$ , и направим в сторону северного полюса. В таком случае положение оси  $MX$  определяется однозначно: она лежит в той же плоскости, что и ось  $MU$ , и направлена на восток.

Радиусы кривизны  $R_\lambda$  и  $R_\varphi$  двух взаимно перпендикулярных главных нормальных сечений поверхности  $h = \text{const}$ , проходящей через оси  $MX$  и  $MU$ , определяются следующими выражениями:

$$R_\lambda = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + h; \quad (3.1)$$

$$R_\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} + h. \quad (3.2)$$

Ввиду малости эксцентриситета земного эллипсоида формулы (3.1) и (3.2) можно упростить. Раскладывая правые части этих формул в биномиальный ряд Ньютона, получаем

$$R_\varphi = R_{\varphi_0} + h = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} + h = a \left( 1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{h}{a} \right);$$

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} + h = a (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + h = a \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{h}{a} \right),$$

или

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{a} \left( 1 + e^2 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right); \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{R_\lambda} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right). \quad (3.4)$$

В навигационной практике часто пользуются более простой и, естественно, более грубой моделью Земли: *фигуру Земли аппроксимируют сферой определенного радиуса*.

Радиусы аппроксимирующих сфер можно выбирать, исходя из различных соображений. Наиболее распространенным является выбор радиусов аппроксимирующих сфер из условий равновеликости объемов и поверхностей.

Радиус сферы одинакового объема с земным эллипсоидом  $R_0 = 6\,371\,110$  м.

Радиус сферы одинаковой поверхности с земным эллипсоидом  $R_0 = 6\,371\,115$  м.

Обычно для расчетов средний радиус Земли принимают равным  $R_0 = 6\,371$  км.

При движении объекта на малые расстояния в ряде случаев часть поверхности Земли аппроксимируют плоскостью.

#### 4. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Введем в рассмотрение следующие системы координат:

- геоцентрическую инерциальную систему координат;
- геоцентрическую связанную с Землей систему координат;
- горизонтальные сопровождающие системы координат:
  - географическую;
  - полусвободную в азимуте;
  - свободную в азимуте;
- связанную.

Исследуя движение тел в рамках Солнечной системы, которую следует рассматривать отдельно от других звездных образований, в качестве основной инерциальной системы координат можно

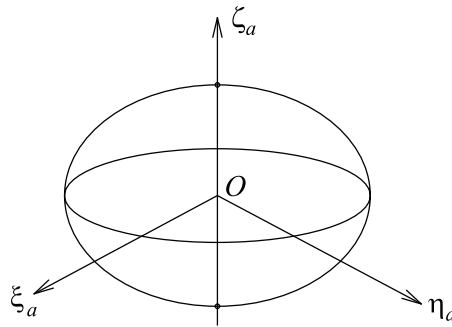
принять систему с началом в центре масс (барицентре) небесных тел, образующих Солнечную систему, и с осями, неизменно ориентированными относительно удаленных неподвижных звезд. Таковую систему координат называют *барицентрической*. Целесообразность такого выбора подтверждается успехами небесной механики и, в частности, «теоретическим» открытием двух наиболее удаленных планет солнечной системы: Нептуна и Плутона.

Однако во многих случаях целесообразно рассматривать не абсолютное движение тела (движение в барицентрической инерциальной системе координат), а его относительное движение (движение по отношению к какому-нибудь естественному телу Солнечной системы, планете или к ее естественному спутнику). Например, движение летательных аппаратов в атмосфере Земли имеет смысл рассматривать в геоцентрической системе координат, начало которой совмещено с центром Земли, а оси остаются параллельными осям барицентрической инерциальной системы.

Геоцентрическая система координат не является инерциальной, так как ее начало движется с ускорением в барицентрической инерциальной системе координат. Однако в том случае, когда движущиеся объекты находятся в достаточной близости к поверхности Земли, геоцентрическую систему координат с достаточной степенью точности можно считать инерциальной.

#### ***Геоцентрическая инерциальная система координат $O\xi_a\eta_a\zeta_a$***

Введем прямоугольную систему координат  $O\xi_a\eta_a\zeta_a$  (рис. 4.1) так, чтобы ее начало совместилось с центром Земли  $O$ , ось  $O\xi_a$  направим вдоль полярной оси Земли к Северному полюсу. Оси  $O\xi_a$  и  $O\eta_a$ , находясь в плоскости экватора, не будут участвовать в собственном суточном вращении Земли. Оси  $O\xi_a$ ,  $O\eta_a$ ,  $O\zeta_a$  не изменяют свою ориентацию относительно неподвижных звезд.



**Рис. 4.1.** Ориентация осей геоцентрической инерциальной системы координат

Согласно определению Ньютона инерциальная система координат — это такая система координат, которая не изменяет свою ориентацию по отношению к неподвижным звездам (инерциальному пространству). В этой системе координат справедливы законы Ньютона.

Запишем для инерциальной системы координат формулы счисления и координаты местоположения объекта.

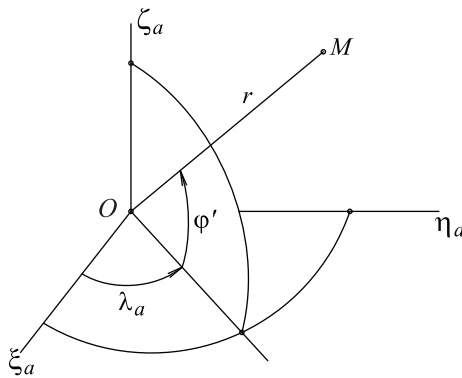
Относительные координаты определяют местоположение объекта по отношению к Земле. В этом смысле местоположение можно определить в прямоугольной системе координат  $O\xi_a\eta_a\zeta_a$ .

Помимо прямоугольных координат удобно определять местоположение объекта криволинейными координатами, в качестве которых можно выбрать широту  $\varphi$  или  $\varphi'$ , долготу  $\lambda$  и параметр  $h$ . Криволинейными координатами удобно пользоваться для общей ориентировки относительно земных опорных пунктов. Параметр  $h$  непосредственно характеризует высоту полета, а координаты  $\varphi$  ( $\varphi'$ ) и  $\lambda$  определяют точку земного сфероида, лежащую на том же радиус-векторе, что и точка  $M$  местоположения объекта.

Составим аналитические выражения для связи прямоугольных и криволинейных координат (рис. 4.2):

$$\xi_a = r \cos \varphi' \cos \lambda_a; \quad \eta_a = r \cos \varphi' \sin \lambda_a; \quad \zeta_a = r \sin \varphi'.$$

Таким образом, положение точки  $M$  местоположения объекта относительно системы координат  $O\xi_a\eta_a\zeta_a$  можно определить сфе-



**Рис. 4.2.** К пояснению связи прямоугольных и криволинейных координат

рическими координатами  $r, \varphi', \lambda_a$ , где параметры  $r, \varphi'$  имеют прежний смысл, а угол  $\lambda_a$  определяет положение меридиональной плоскости, проходящей через точку  $M$  относительно координатной плоскости  $O\xi_a\zeta_a$ . Координатная плоскость  $O\xi_a\zeta_a$  не участвует во вращении Земли, поэтому можно записать

$$\dot{\lambda}_a = U + \dot{\lambda},$$

где  $U$  — вектор скорости вращения Земли.

Выражения, связывающие производные координат местоположения объекта с составляющими вектора скорости его центра масс, будем называть *формулами счисления*.

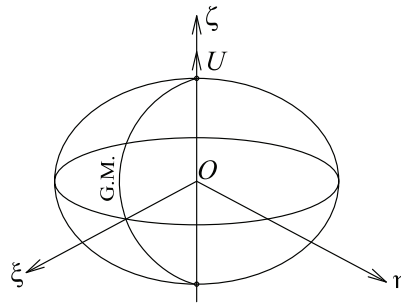
Скорость объекта в системе координат  $O\xi_a\eta_a\zeta_a$  будем называть *абсолютной* и обозначим  $V$ . Проекции абсолютной скорости на оси инерциальной системы координат обозначим соответственно  $V_{\xi_a}, V_{\eta_a}, V_{\zeta_a}$ . Тогда имеют место очевидные равенства:

$$\dot{\xi}_a = V_{\xi_a}; \quad \dot{\eta}_a = V_{\eta_a}; \quad \dot{\zeta}_a = V_{\zeta_a}. \quad (4.1)$$

Равенства (4.1) являются формулами счисления абсолютных координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  местоположения объекта.

### **Геоцентрическая связанная с Землей система координат $O\xi\eta\zeta$**

Введем прямоугольную систему координат  $O\xi\eta\zeta$  так, чтобы ее начало совместилось с центром Земли, ось  $O\zeta$  направим вдоль полярной оси Земли к Северному полюсу. Оси  $O\eta$  и  $O\xi$ , находясь в плоскости экватора, будут участвовать в собственном суточном вращении Земли. Для того чтобы окончательно определить эту систему координат, расположим ось  $O\xi$  вдоль линии пересечения плоскости экватора с плоскостью Гринвичского меридиана (рис. 4.3).



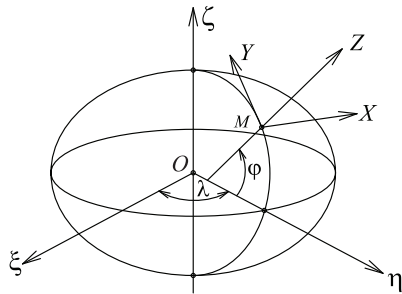
**Рис. 4.3.** Ориентация осей геоцентрической связанной с Землей системы координат (G.M. — главный меридиан)



### Горизонтальные сопровождающие системы координат

Общей особенностью таких систем координат является то, что начало координат горизонтальных сопровождающих систем координат совпадает с центром масс объекта, при этом одна ось вертикальна, а две другие оси лежат в плоскости местного горизонта.

*Географическая сопровождающая система координат  $MXYZ$ .* В системе координат  $MXYZ$  ось  $MZ$  направим вдоль географической вертикали вверх, ось  $MU$  — вдоль касательной к меридиану на север, ось  $MX$  — вдоль касательной к параллели на восток (рис. 4.4).



**Рис. 4.4.** Ориентация осей географической сопровождающей системы координат

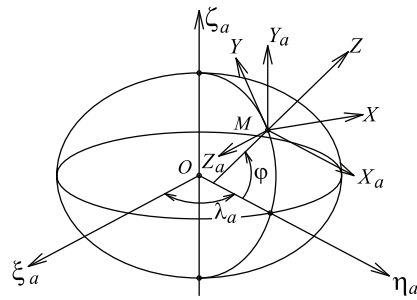
Определим угловые скорости географической сопровождающей системы координат.

Поскольку географическая сопровождающая система координат связана с центром масс объекта, при его движении система координат  $OXYZ$  будет изменять свою ориентацию. Введем в рассмотрение не вращающуюся в абсолютном пространстве систему координат  $MX_aY_aZ_a$  с вершиной в точке  $M$ . Направим ось  $MZ_a$  параллельно оси  $O\xi_a$ , ось  $MX_a$  — параллельно оси  $O\eta_a$ , ось  $MY_a$  — параллельно оси  $O\zeta_a$  геоцентрической инерциальной системы координат  $O\xi_a\eta_a\zeta_a$  (рис. 4.5).

Запишем формулы счисления географических координат:

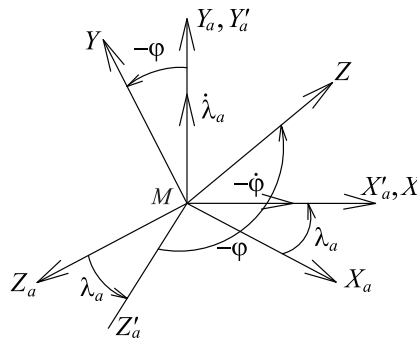
$$\dot{\lambda} = \frac{V_x}{R_\lambda \cos \varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{V_y}{R_\varphi}, \quad (4.2)$$

где  $\frac{1}{R_\varphi}$ ,  $\frac{1}{R_\lambda}$  определяются выражениями (3.3) и (3.4) соответственно.



**Рис. 4.5.** Ориентация осей системы координат  $MX_aY_aZ_a$

Систему координат  $MX_aY_aZ_a$  можно совместить с географической сопровождающей системой координат  $MXYZ$  двумя последовательными поворотами: сначала вокруг оси  $MY_a$  на угол  $\lambda_a$ , равный абсолютной долготе точки  $M$ , а затем вокруг нового положения оси  $MX_a$  на угол  $-\varphi$  (рис. 4.6). Эти повороты определяют вращение географической сопровождающей системы координат в абсолютном пространстве. Составляющими абсолютной угловой скорости географической сопровождающей системы координат являются угловые скорости  $\dot{\lambda}_a$  и  $\dot{\varphi}$ , которые направлены вдоль полярной оси Земли к северному полюсу и вдоль отрицательной оси  $MX$  соответственно. Проекции абсолютной угловой скорости географической системы координат на собственные оси можно представить в виде



**Рис. 4.6.** Схема последовательных поворотов

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\varphi}; \quad \omega_y = \dot{\lambda}_a \cos \varphi = (U + \dot{\lambda}) \cos \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\lambda}_a \sin \varphi = (U + \dot{\lambda}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

С учетом выражений (4.2) можно записать

$$\omega_x = -\frac{V_y}{R_\varphi}; \quad \omega_y = U \cos \varphi + \frac{V_x}{R_\lambda}; \quad \omega_z = U \sin \varphi + \frac{V_x}{R_\lambda} \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.4)$$

Реализация географической системы координат в качестве навигационной затруднена для случая движения в высоких широтах, так как при  $\varphi \rightarrow 90^\circ$   $\omega_z \rightarrow \infty$  (см. формулы (4.4)). Для устранения указанного недостатка в качестве навигационной системы координат используют полусвободную в азимуте или свободную в азимуте систему координат.

Особенностью полусвободной в азимуте и свободной в азимуте систем координат является то, что выражение для проекции угловой скорости вокруг вертикальной оси  $OZ$  либо будет содержать только составляющую суточной скорости вращения

Земли  $U \sin \varphi$  (для полусвободной в азимуте системы координат), либо будет равняться нулю (для свободной в азимуте системы координат).

Запишем угловые скорости в полусвободной в азимуте и свободной в азимуте систем координат.

*Полусвободная в азимуте система координат  $OX_{\Pi}Y_{\Pi}Z_{\Pi}$ .* Для системы координат  $OX_{\Pi}Y_{\Pi}Z_{\Pi}$  справедливы формулы

$$\omega_{x_{\Pi}} = -\frac{V_y}{R_{\varphi}} \cos \varepsilon + \left( \frac{V_x}{R_{\lambda}} + U \cos \varphi \right) \sin \varepsilon; \quad (4.5)$$

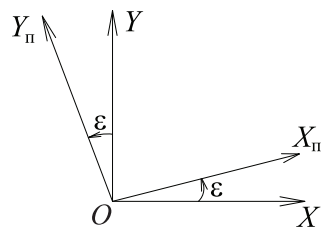
$$\omega_{y_{\Pi}} = -\frac{V_y}{R_{\varphi}} \sin \varepsilon + \left( \frac{V_x}{R_{\lambda}} + U \cos \varphi \right) \cos \varepsilon; \quad \omega_{z_{\Pi}} = U \sin \varphi.$$

*Свободная в азимуте система координат  $OX_m Y_m Z_m$ .* В этой системе

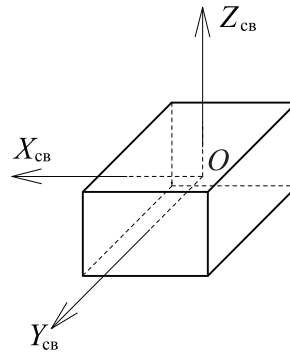
$$\omega_{x_m} = -\frac{V_y}{R_{\varphi}} \cos \varepsilon + \left( \frac{V_x}{R_{\lambda}} + U \cos \varphi \right) \sin \varepsilon; \quad (4.6)$$

$$\omega_{y_m} = -\frac{V_y}{R_{\varphi}} \sin \varepsilon + \left( \frac{V_x}{R_{\lambda}} + U \cos \varphi \right) \cos \varepsilon; \quad \omega_{z_m} = 0,$$

где  $\varepsilon$  — азимутальный угол (рис. 4.7).



**Рис. 4.7.** Взаимная ориентация осей географической и полусвободной в азимуте систем координат



**Рис. 4.8.** Ориентация осей связанной системы координат

*Связанная система координат  $OX_{св}Y_{св}Z_{св}$ .* Предполагается связанной с осями чувствительности гироскопов и акселерометров, при этом блок чувствительных элементов располагается на транспортном средстве таким образом, что ось  $OY_{св}$  совпадает с продольной осью объекта, а ось  $OX_{св}$  — с поперечной (рис. 4.8).

## **5. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ. ТЕОРЕМА ШУЛЕРА**

Инерциальные навигационные системы принято подразделять следующим образом:

- системы разомкнутого типа (с малым периодом работы);
- системы замкнутого типа (шулеровские системы).

Системы обоих типов бывают:

- платформенными;
- бесплатформенными.

Платформенные ИНС, в свою очередь, подразделяются на системы следующих видов:

- полуаналитические (оси чувствительности акселерометров и гироскопов ориентированы по осям какой-либо горизонтальной сопровождающей системы координат);
- аналитические (оси чувствительности акселерометров и гироскопов ориентированы по осям геоцентрической инерциальной системы координат);
- геометрические (оси чувствительности акселерометров ориентированы по осям какой-либо горизонтальной сопровождающей системы координат, а оси чувствительности гироскопов — по осям геоцентрической инерциальной системы координат).

Любая ИНС в основном служит устройством счисления пути, пройденного объектом от точки своего отправления до точки назначения. Измеряя с помощью акселерометров ускорения, с которыми движется объект, и интегрируя измеренные величины, можно определить скорость движения объекта относительно Земли (путевую скорость). Интегрируя полученные значения скоростей второй раз, можно найти пройденный объектом путь относительно Земли, а следовательно, и его координаты.

Для того чтобы измерить инерциальным методом скорость объекта относительно Земли, нужно выполнить два условия, касающиеся расположения акселерометров на объекте. Во-первых, акселерометры должны быть ориентированы строго горизонтально,

независимо от эволюций движущегося объекта, для того чтобы они не измеряли проекции ускорения свободного падения  $g$ . Во-вторых, необходимо наличие двух акселерометров, расположенных взаимно перпендикулярно и неизменно ориентированных относительно направлений, связанных с Землей.

Определим, с какой точностью следует удерживать акселерометры в горизонтальном положении.

Будем считать, что допустимая погрешность определения пути  $\Delta S$  составляет 10 км за 1 ч движения. Эта погрешность возникает вследствие того, что площадка, несущая акселерометр, не ориентирована по горизонтали, следовательно, акселерометр измеряет ускорение  $g \sin \Delta\alpha$ , где  $\Delta\alpha$  — малый угол наклона площадки.

Используя формулы счисления пути (1.1), можно записать

$$\Delta V = \int_0^t \Delta a dt; \quad \Delta S = \int_0^t \int_0^t \Delta a dt.$$

Полагая, что  $\Delta\alpha$  — величина постоянная, получим

$$\Delta S = g \sin(\Delta\alpha) \frac{t^2}{2},$$

откуда

$$\Delta\alpha \approx \sin \Delta\alpha = \frac{2\Delta S}{g t^2}.$$

В нашем случае  $\Delta S = 10\,000$  м,  $t = 3600$  с, тогда

$$\Delta\alpha \approx \frac{2 \cdot 10^4}{9,8 \cdot 3,6^2 \cdot 10^6} = 1,57 \cdot 10^4 \text{ рад.}$$

Таким образом, если через 1 ч полета погрешность определения расстояния, вызванная наклоном площадки, не должна превышать 10 км, то точность удерживания площадки в горизонтальном положении должна составить порядка долей угловой минуты. Как видно, даже при достаточно грубом допуске на погрешность определения расстояния необходимо с весьма высокой точностью удерживать площадку в горизонтальном положении.

Описанная система называется разомкнутой, так как в ней отсутствует электрическая или механическая связь между измеряемой акселерометром величиной и положением площадки.

Уменьшить накопление погрешностей и сохранять горизонтальное положение площадки с акселерометрами на практике оказалось возможным благодаря идее, выдвинутой в 1923 г. доктором М. Шулером. Он сформулировал следующую теорему.

**Математический или физический маятник, обладающий периодом колебаний  $T_{ш} = 84,4$  мин и находившийся до начала движения в положении равновесия, ни при каких горизонтальных ускорениях точки его подвеса во время его движения вдоль поверхности Земли не выйдет из положения равновесия, т. е. плечо маятника будет оставаться вертикальным.**

*Математическим* называется маятник, вся масса которого сосредоточена в одной точке. Его плечом является расстояние от точки опоры (подвеса) до точки, в которой сосредоточена масса.

*Физическим* называется маятник, вся масса которого не сосредоточена в одной точке, а распределена по некоторой площади или объему. Плечом такого маятника является расстояние от точки опоры до центра масс маятника.

Сущность положения, высказанного Шулером, заключается в том, что можно представить себе маятник, который, несмотря на ускорение точки его подвеса, не будет отклоняться от вертикали. Для этого достаточно, чтобы период его колебаний составлял  $T_{ш} = 84,4$  мин.

Рассмотрим процесс поворота маятника относительно точки подвеса в результате ее движения с ускорением.

Пусть движение точки подвеса происходит вдоль поверхности Земли, т. е. по дуге большого круга (ортодромии). Для упрощения рассуждений пренебрежем вращением Земли и будем считать ее неподвижной. Будем также полагать, что Земля — сфера, а ее гравитационное поле (поле сил тяготения) центральное. Рассмотрим поведение плоского маятника (а не сферического), т. е. такого, у которого имеется только одна степень свободы относительно оси подвеса. Ось подвеса должна быть перпендикулярна траектории движения. При этом плоскость колебаний маятника совпадает с плоскостью большого круга.

Будем полагать, что в начальный момент времени плечо маятника расположено вертикально и что скорость его вращения вокруг оси подвеса равна нулю (рис. 5.1).

Пусть ось подвеса маятника движется с некоторым ускорением  $V$ , где  $V$  — скорость движения. Очевидно, что под действием

сил инерции маятник начнет ускоренно поворачиваться вокруг оси подвеса. При ускорении подвеса, направленном так, как это показано на рис. 5.1, поворот маятника вокруг оси подвеса будет происходить против хода часовой стрелки.

Дифференциальное уравнение вращения маятника вокруг его оси подвеса в начальный момент времени, т. е. тогда, когда плечо маятника еще вертикально, имеет вид

$$J\ddot{\alpha} = m\dot{V}l,$$

где  $J$  — момент инерции маятника относительно оси подвеса;  $\ddot{\alpha}$  — угловое ускорение поворота маятника вокруг оси его подвеса;  $m$  — масса маятника;  $l$  — плечо маятника (расстояние от оси подвеса до центра масс маятника).

Отсюда можно выразить угловое ускорение:

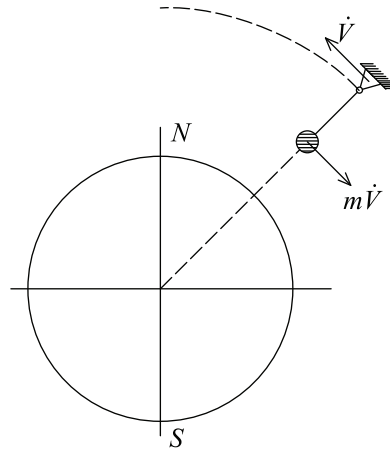
$$\ddot{\alpha} = \frac{m\dot{V}l}{J}. \quad (5.1)$$

Рассмотрим теперь, как будет перемещаться в пространстве вертикаль, соединяющая ось подвеса маятника с центром Земли. Эта вертикаль тоже будет ускоренно поворачиваться вокруг центра Земли, поскольку ось подвеса ускоренно перемещается вдоль поверхности Земли. Очевидно, что угловое ускорение поворота вертикали будет равно

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{V}}{R}, \quad (5.2)$$

где  $\varphi$  — угол поворота вертикали;  $R$  — радиус Земли.

Поворот вертикали (см. рис. 5.1) также будет происходить против хода часовой стрелки.



**Рис. 5.1.** Движение маятника вдоль поверхности Земли (в начальный момент времени маятник находится в равновесии)

Если угловое ускорение поворота маятника вокруг оси подвеса и угловое ускорение поворота вертикали вокруг центра Земли будут одинаковы, то плечо маятника все время будет расположено вертикально, хотя относительно инерциального пространства это плечо будет поворачиваться с угловым ускорением  $\ddot{\alpha}$ . Для этого необходимо, чтобы угловое ускорение маятника под воздействием сил инерции было весьма малым, так как угловое ускорение вертикали при современных ускорениях подвижных объектов (летательных аппаратов) также весьма малó. Следовательно, момент инерции маятника относительно оси его подвеса должен быть весьма большим, а плечо — малым.

Равенство угловых ускорений

$$\ddot{\phi} = \ddot{\alpha}$$

на основании выражений (5.1) и (5.2) приводит к соотношению

$$\frac{\dot{V}}{R} = \frac{m\dot{V}l}{J}.$$

Отсюда видно, что равенство угловых ускорений маятника и вертикали достигается при условии

$$\frac{J}{ml} = R. \quad (5.3)$$

Обратим внимание на то, что это условие не зависит от ускорения  $\dot{V}$ .

Найдем теперь период колебаний такого маятника. Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}},$$

где  $l_1$  — плечо математического маятника.

Период малых колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m l g}}.$$

Учитывая условие (5.3), получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$



Таким образом, математический маятник будет обладать тем же периодом колебаний, что и физический маятник, при соблюдении условия (5.3), если его плечо будет равно радиусу Земли. Этот период будет составлять

$$T = T_{\text{ш}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{6,371 \cdot 10^6}{9,8}} \approx 5064 \text{ с} = 84,4 \text{ мин.}$$

Естественно, создать такой математический маятник невозможно.

Рассмотрим теперь уравнение движения маятника, не предполагая, что он находится в начальный момент времени в положении равновесия (рис. 5.2). Дифференциальное уравнение вращения маятника примет вид

$$J \ddot{\alpha} = m \dot{V} l \cos \beta + m g l \sin \beta, \quad (5.4)$$

где  $\alpha$  — абсолютный угол поворота маятника или угол между плечом маятника и плоскостью экватора;  $\beta$  — относительный угол поворота или угол между плечом маятника и вертикалью (см. рис. 5.2).

При составлении уравнений плечо маятника мы полагали настолько малым, что угол поворота маятника, вызванного действием сил  $m \dot{V}$  и  $mg$ , получился меньше угла поворота вертикали. На рис. 5.2 видно, что

$$\alpha = \varphi - \beta, \quad (5.5)$$

где  $\varphi$  — переносный угол поворота вертикали.

Дважды продифференцировав выражение (5.5), можно записать

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\varphi} - \ddot{\beta}. \quad (5.6)$$

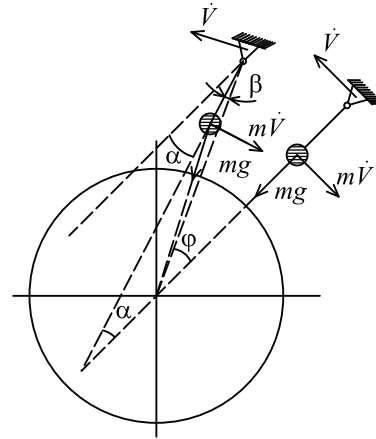


Рис. 5.2. Движение маятника вдоль поверхности Земли (общий случай)

Полагая угол  $\beta$  малым и используя выражение (5.6), запишем (5.4) в виде

$$J(\ddot{\varphi} - \ddot{\beta}) = m\dot{V}l + mgl\beta$$

или

$$\ddot{\beta} + \frac{mgl}{J}\beta = -\frac{m\dot{V}l}{J} + \ddot{\varphi}. \quad (5.7)$$

Угловое ускорение поворота вертикали определяется по формуле (5.2). С учетом этого перепишем (5.7) в виде

$$\ddot{\beta} + \frac{mgl}{J}\beta = \dot{V} \left( -\frac{ml}{J} + \frac{1}{R} \right).$$

Используя условие (5.3), получим

$$\ddot{\beta} + \frac{mgl}{J}\beta = 0. \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) представляет собой уравнение гармонических колебаний маятника. Из этого уравнения видно, что поведение маятника не зависит от ускорений оси подвеса. Перепишем уравнение (5.8) с учетом (5.3) в виде

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{R}\beta = 0.$$

Период колебаний такого маятника определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84,4 \text{ мин.}$$

Таким образом, и в случае, когда маятник в начальный момент времени не находится в положении равновесия, его период колебаний также равен  $T = T_{\text{ш}} = 84,4$  мин.

В заключение рассмотрим вопрос о возможности создания физического маятника с периодом колебаний  $T_{\text{ш}} = 84,4$  мин.

Физический маятник имеет наименьший период колебаний в том случае, когда его плечо равно радиусу инерции, т. е. равно величине  $\sqrt{J_{\text{ц}}/m}$ , где  $J_{\text{ц}}$  — момент инерции маятника относительно его центра масс. С увеличением или уменьшением плеча период колебаний физического маятника будет увеличиваться. Попытка получить период  $T_{\text{ш}} = 84,4$  мин в результате увеличения плеча ма-

маятника приводит к тому, что физический маятник вырождается в математический, для которого, как уже было рассмотрено выше, данный период достигается при плече, равном радиусу Земли.

Рассмотрим теперь случай малого плеча. Учитывая, что период колебаний физического маятника  $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m l g}}$ , определим, каким

должно быть плечо для того, чтобы при приемлемых размерах маятника период его колебаний составлял  $T_{ш} = 84,4$  мин.

Пусть маятник представляет собой кольцо диаметром 0,5 м. Его момент инерции относительно центра масс

$$J_{ц} = m r^2,$$

где  $r$  — радиус кольца.

Так как для получения большого периода колебаний необходимо иметь весьма малое плечо, при котором ось подвеса будет расположена очень близко от центра масс, то приближенно можно положить  $J \approx J_{ц}$ , где  $J$  — момент инерции относительно оси подвеса. Из соотношения (5.3) получаем

$$l = \frac{J}{m R} = \frac{m r^2}{m R} = \frac{r^2}{R}.$$

По условию  $r = 0,25$ , тогда

$$l = \frac{r^2}{R} = \frac{0,25^2}{6,371 \cdot 10^6} \approx 10^{-8} \text{ м} = 0,01 \text{ мкм}.$$

Очевидно, что это требование невыполнимо как из технологических соображений, так и потому, что в этом случае моменты трения в подвесе будут намного больше восстанавливающего момента маятника. Кроме того, малейшие изменения температуры вызовут температурные деформации и будут значительно изменять длину плеча.

Таким образом, создать физический маятник, не возмущаемый ускорениями, при современном состоянии техники невозможно.

В 1932 г. Е.Б. Левенталь намного раньше зарубежных ученых показал, что с помощью гироскопов и акселерометров можно моделировать невозмущаемый физический маятник.

Сущность его идеи заключалась в следующем. Рассмотрим трехстепенной гироскоп, собственный кинетический момент которого равен  $H$ , с вертикально расположенной осью ротора (рис. 5.3).

Будем полагать Землю неподвижной и имеющей форму сферы. Пусть движение происходит по дуге большого круга — ортодромии. Для того чтобы при перемещении гироскопа по ортодромии ось ротора всегда оставалась вертикальной, к датчику момента гироскопа необходимо прикладывать такой момент  $M_{\text{дм}}$ , при котором угловая скорость прецессии гироскопа  $\dot{\alpha}$  будет равна угловой скорости поворота вертикали  $\dot{\phi}$ , соединяющей точку опоры гироскопа с центром Земли, т. е.

$$\dot{\alpha} = \frac{M_{\text{дм}}}{H}, \quad (5.9)$$

где  $M_{\text{дм}}$  — момент, прикладываемый к датчику момента гироскопа;  $H$  — кинетический момент гироскопа.

Угловая скорость поворота вертикали определяется соотношением

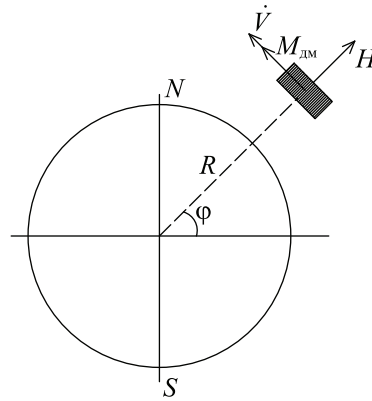
$$\dot{\phi} = \frac{V}{R}, \quad (5.10)$$

где  $V$  — скорость объекта.

При этом  $\dot{\alpha} = \dot{\phi}$ , или

$$M_{\text{дм}} = \frac{V}{R} H. \quad (5.11)$$

Таким образом, прикладываемый к датчику момента гироскопа момент (5.11) должен быть пропорционален угловой скорости  $\dot{\phi}$  вертикали, а следовательно, и скорости перемещения гироскопа



**Рис. 5.3.** Моделирование невозмущаемого физического маятника

вдоль поверхности Земли. Направление вектора момента  $M_{\text{дм}}$  должно быть таким, как это показано на рис. 5.3, т. е. вектор момента должен совпадать с вектором скорости  $V$ . Так как скорость перемещения  $V$  вдоль поверхности Земли есть интеграл от горизонтальных ускорений, достаточно, чтобы момент, прикладываемый к гироскопу, был пропорционален интегралу от этих ускорений. Поэтому достаточно измерять горизонтальные ускорения, с которыми движется гироскоп, интегрировать их и к датчику момента гироскопа прикладывать момент, пропорциональный интегралу от измеренных ускорений. Такого рода коррекцию Е.Б. Левенталь назвал *интегральной*.

Математически указанное выше условие можно записать так:

$$M_{\text{дм}} = K \int_0^t \dot{V} dt, \quad (5.12)$$

где  $K$  — коэффициент пропорциональности в цепи интегральной коррекции.

Перепишем выражение (5.11) в виде

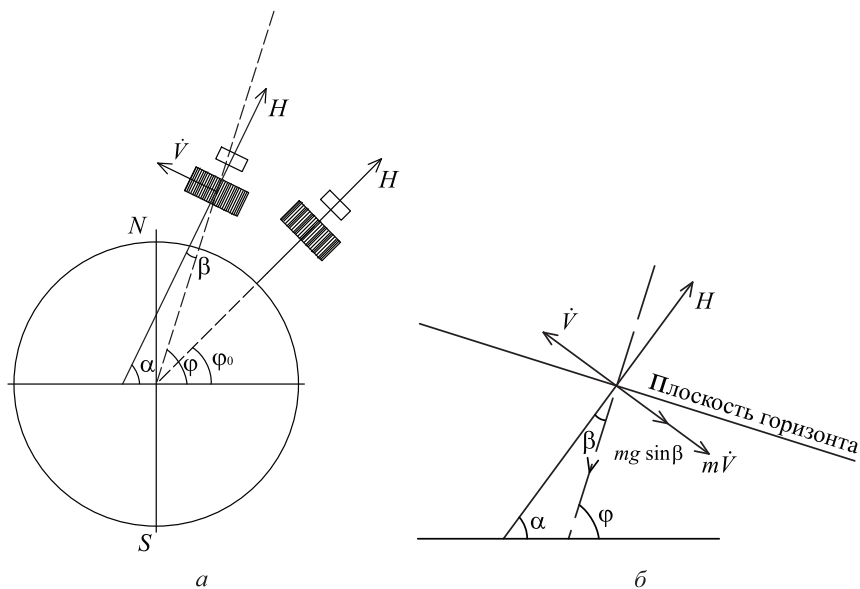
$$M_{\text{дм}} = \frac{H}{R} \int_0^t \dot{V} dt. \quad (5.13)$$

Сравнив выражения (5.12) и (5.13), можно сделать вывод о том, что для невозмущаемости гировертикали необходимо выполнение условия

$$K = \frac{H}{R}. \quad (5.14)$$

В этом случае ось ротора при движении гироскопа вдоль поверхности Земли по ортодромии всегда будет оставаться вертикальной независимо от ускорений, с которыми движется гироскоп. Условие (5.14) и есть условие невозмущаемости для гироскопической системы.

Однако из предыдущих рассуждений еще не следует, что рассмотренная система моделирует маятник с периодом Шулера  $T_{\text{ш}} = 84,4$  мин. Рассмотрим движение вдоль ортодромии с ускорением летательного аппарата, несущего на себе гироскоп с акселерометром и интегратором. Пусть при этом ось ротора гироскопа отклонена от истинной вертикали (рис. 5.4, а).



**Рис. 5.4.** Движение летательного аппарата вдоль ортодромии:  
*a* — схема движения; *б* — взаимная ориентация векторов

Введем следующие обозначения:

$\alpha$  — абсолютный угол поворота оси ротора гироскопа, или угол между осью ротора гироскопа и плоскостью экватора;

$\beta$  — относительный угол поворота оси ротора гироскопа, или угол между осью ротора гироскопа и истинной вертикалью.

Момент, прикладываемый к датчику момента гироскопа и пропорциональный по условию интегралу от ускорений, с учетом малости угла  $\beta$  будет равен (рис. 5.4, б)

$$M_{\text{дм}} = K \int_0^t (\dot{V} + g\beta) dt.$$

Отсюда скорость прецессии, т. е. абсолютная скорость поворота оси ротора относительно звездного пространства, будет равна

$$\dot{\alpha} = \frac{K}{H} \int_0^t (\dot{V} + g\beta) dt. \quad (5.15)$$

Из рис. 5.4 следует, что  $\alpha = \varphi - \beta$ . Дифференцируя данное выражение, запишем

$$\dot{\alpha} = \dot{\phi} - \dot{\beta}, \quad (5.16)$$

где  $\dot{\phi}$  — переносная угловая скорость вертикали;  $\dot{\beta}$  — относительная угловая скорость поворота оси ротора (относительно вертикали).

Подставляя выражение (5.16) в (5.15) и учитывая, что  $\dot{\phi} = V/R$ , получаем

$$\dot{\beta} - \frac{V}{R} = -\frac{K}{H} \int_0^t (\dot{V} + g\beta) dt.$$

Дифференцируя и перенося второе слагаемое правой части влево, а второе слагаемое левой части вправо, находим

$$\ddot{\beta} + \frac{K}{H} g\beta = \dot{V} \left( -\frac{K}{H} + \frac{1}{R} \right). \quad (5.17)$$

Для того чтобы ускорения не влияли на поведение системы, необходимо выполнить условие невозмущаемости (5.14). В этом случае правая часть уравнения (5.17) обращается в нуль:

$$\ddot{\beta} + \frac{K}{H} g\beta = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\beta} + v^2\beta = 0, \quad (5.18)$$

где  $v^2 = \frac{g}{R}$ .

Уравнение (5.18) — это уравнение гармонических колебаний маятника. Решение данного дифференциального уравнения имеет вид

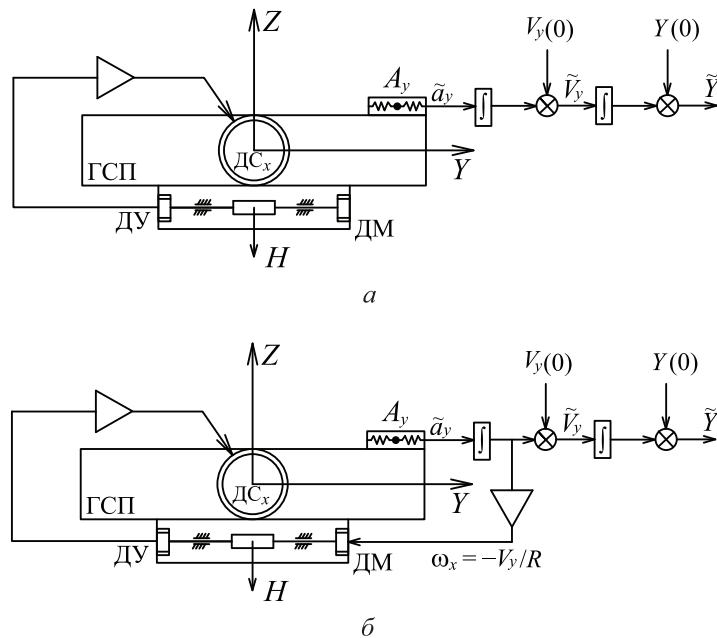
$$\beta = \beta_0 \sin vt,$$

где  $v$  — частота Шулера.

Период колебаний такого маятника

$$T = T_{\text{ш}} = \frac{2\pi}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84,4 \text{ мин.}$$

Рассмотрим принцип действия одноканальной ИНС (рис. 5.5). При этом будем полагать, что все ее элементы работают идеально точно, а Земля — идеальный невращающийся шар. В состав одноканальной ИНС входят гиросtabilизированная платформа (ГСП) с установленным на нее акселерометром, ось чувствительности ко-



**Рис. 5.5.** Структурные схемы одноканальных ИНС:  
*a* — разомкнутого типа; *б* — замкнутого типа

торого направлена вдоль оси  $OY$  (рассматривается работа северного канала), и вычислитель, в состав которого входят два интегратора и устройство ввода начальных данных. Кориолисово ускорение, порожденное вращением Земли и движением объекта, исключено, т. е. поступающий от акселерометра сигнал может зависеть только от ускорения  $\dot{V}$  объекта относительно Земли и от проекции вектора ускорения силы тяжести  $g$  на ось чувствительности акселерометра.

Гиристабилизированная платформа моделирует на борту движущегося объекта базовую систему координат и служит для стабилизации оси чувствительности акселерометра. При действии внешнего возмущающего момента вокруг оси  $OX$  гироскоп начинает прецессировать вокруг оси  $OY$ . При появлении сигнала расогласования между ротором и статором датчика угла гироскопа сигнал с датчика угла через усилитель-преобразователь поступает на обмотку управления двигателя стабилизации (ДС<sub>x</sub>). Двигатель



развивает разгрузочный момент, равный по величине и противоположный по направлению внешнему возмущающему моменту, в результате чего прецессия прекращается.

Акселерометр, установленный на ГСП, измеряет кажущееся ускорение движущегося объекта. Сигнал с акселерометра поступает на вход первого интегратора. Процесс интегрирования описывается выражением

$$\tilde{V}_y = \int_0^t \dot{V}_y dt. \quad (5.19)$$

Интегрируя (5.19), получаем

$$\tilde{V}_y(t) = V_y(t) - V_y(0). \quad (5.20)$$

Из выражения (5.20) видно, что к моменту включения ИНС в момент времени  $t = 0$  необходимо, чтобы на выходе интегратора была установлена проекция скорости  $V_y(0)$ . Значение  $V_y(0)$ , устанавливаемое на выходе интегратора перед включением системы, определяется по показаниям какого-либо внешнего относительно ИНС источника навигационной информации. В результате на выходе первого интегратора получаем проекцию путевой скорости объекта.

Аналогичным образом на выходе второго интегратора получаем координату местоположения объекта.

Для одноканальной ИНС разомкнутого (см. рис. 5.5, а) типа характерно отсутствие каких-либо сигналов, поступающих на датчик момента гироскопа.

В системе замкнутого типа, структурная схема которой представлена на рис. 5.5, б, организована интегральная коррекция: при движении объекта вдоль меридиана сигнал от первого интегратора с соответствующим усилением подается на датчик момента (ДМ) гироскопа и вызывает прецессию платформы относительно горизонтальной оси  $OX$ , перпендикулярной вектору скорости  $V$  движения объекта. В результате такой коррекции компенсируется относительная составляющая угловой скорости, возникающая в результате движения объекта относительно поверхности Земли, и для любого момента времени  $t > 0$  плоскость  $OXY$  платформы все время совпадает с плоскостью местного горизонта.

## 6. ПОГРЕШНОСТИ ОДНОКАНАЛЬНЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Погрешности одноканальных ИНС можно подразделить на две большие группы:

- методические погрешности;
- инструментальные погрешности.

Рассмотрим основные причины возникновения методических погрешностей.

При изучении движения объекта относительно Земли предполагалось, что Земля неподвижна, имеет форму шара и движение происходит по ортодромии. Однако для решения задачи навигации, т. е. для определения проекций путевой скорости на оси выбранной системы координат и координат местоположения, необходимо иметь минимум два акселерометра, которые определенным образом ориентированы относительно Земли. При этом движение происходит не только по ортодромии — Земля вращается с постоянной угловой скоростью. Все это приводит к тому, что центробежные ускорения, направленные по нормали к оси Земли, и кориолисовы ускорения, направленные по нормали к вектору относительной скорости объекта, отклоняют платформу от горизонтального положения и вносят погрешности в показания на выходе системы.

Указанные погрешности не имели бы места, если бы моделирование с помощью гироскопов сферического физического маятника с периодом  $T_{ш} = 84,4$  мин было выполнено точно. Неточность моделирования заключается в том, что модель представляет собой два плоских маятника, направления колебаний которых связаны с земными направлениями.

Рассмотрим основные источники инструментальных погрешностей.

При рассмотрении основных свойств системы Шулера все элементы системы считались идеальными, не имеющими систематических погрешностей, и предполагалось также, что внешние возмущающие факторы отсутствуют. В действительности элементы системы не идеальны. Среди их погрешностей, которые принято называть входными погрешностями системы, выделяют следующие погрешности.

1. *Погрешность начальной выставки* ( $\beta_0 \neq 0$ ). Эта погрешность возникает вследствие рассогласования связанной системы координат и той базовой системы координат, по направлению осей которой мы хотим ее ориентировать.

2. *Погрешности акселерометров*. Акселерометры относятся к классу регистрирующих приборов, задача которых состоит в том, чтобы в процессе измерения их выходная величина с минимальными динамическим и масштабным искажениями повторяла изменяющуюся во времени входную величину, подлежащую измерению. Статическая характеристика прибора, отражающая связь между выходом акселерометра и измеряемой величиной (входом), имеет вид

$$\tilde{a}_x = a_x. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) определяет условие идеального измерения  $a_x$ , так как измерение акселерометра  $\tilde{a}_x$  в этом случае без каких-либо масштабных искажений повторяет входную величину  $a_x$  в любом интервале ее измерения.

Однако в общем случае статическая характеристика представляется нелинейной зависимостью

$$\tilde{a}_x = f(a_x) + \delta a_x, \quad (6.2)$$

где  $f(a_x)$  — нелинейная функция, монотонно увеличивающаяся и удовлетворяющая условию  $f(0) = 0$ ;  $\delta a_x$  — смещение нуля акселерометра (величина  $\delta a_x$  показывает, что выходная величина  $a_x$  может отличаться от нуля даже в том случае, когда  $a_x \equiv 0$ ).

Преобразуем уравнение (6.2) к виду

$$\tilde{a}_x = h_a a_x + \delta a_x, \quad (6.3)$$

введя величину  $f(a_x)/a_x = h_a$ , где  $h_a$  — масштабный коэффициент.

Безразмерный масштабный коэффициент  $h_a$  равен тангенсу угла наклона прямой, идущей из начала координат в текущую точку нелинейной статической характеристики, которая соответствует текущему значению нелинейной функции  $f(a_x)$ . Для линейной характеристики ( $h_a = \text{const}$ ) масштабный коэффициент определяет угловой коэффициент прямой. Идеальное значение  $h_a$  равно единице. Удобно представлять масштабный коэффициент в виде

$$h_a = 1 + \delta h_a,$$

где  $\delta h_a$  — погрешность масштабного коэффициента.

Из выражения (6.3) следует, что

$$\delta h_a = \frac{\tilde{a}_x - a_x}{a_x}.$$

Тогда статическая характеристика акселерометра в общем случае будет иметь вид

$$\tilde{a}_x = (1 + \delta h_a) a_x + \delta a_x = a_x + \delta h_a a_x + \delta a_x = a_x + \Delta a_x.$$

Математическая модель (уравнение) погрешностей акселерометра

$$\Delta a_x = \tilde{a}_x - a_x,$$

где  $\Delta a_x = \delta h_a a_x + \delta a_x$  — выходная погрешность акселерометра (здесь и далее знаком  $\Delta$  обозначены выходные погрешности системы и приборов);  $\delta$  — входные погрешности системы и приборов.

Выходная погрешность акселерометра является входной погрешностью для ИНС в целом. Поэтому обозначим эквивалентное смещение нуля акселерометра

$$\delta a_x^3 = \delta h_a a_x + \delta a_x. \quad (6.4)$$

*3. Погрешности гироскопов.* Рассмотрим однокомпонентный гироскопический измеритель абсолютной угловой скорости (или датчик угловой скорости — ДУС), регистрирующий проекцию вектора абсолютной угловой скорости  $\omega$  на измерительную ось прибора.

Выходная величина гироскопического измерителя  $\tilde{\omega}_x$ , приведенная к размерности угловой скорости, будет определяться выражением

$$\tilde{\omega}_x = h_r \omega_x, \quad (6.5)$$

где  $h_r$  — масштабный коэффициент гироскопа.

Выражение (6.5) является математической моделью ДУС. Номинальное значение масштабного коэффициента гироскопа  $h_r^* = 1$ . Уравнение погрешностей ДУС получим из математической модели ДУС (6.5) методом варьирования.

**З а м е ч а н и е.** Вариацию функции формируют по тем же правилам, что и дифференциал. Вариации соответствующих величин формируют около их номинальных значений.

Проварьирав выражение (6.5), получим

$$\Delta\omega_x = \delta h_r \omega_x + h_r^* \delta\omega_x = \delta h_r \omega_x + \delta\omega_x,$$

где  $\Delta\omega_x$  — выходная погрешность ДУС;  $\delta h_r$  — погрешность масштабного коэффициента гироскопа;  $\delta\omega_x$  — смещение нуля ДУС (собственный дрейф вокруг измерительной оси).

Так же как и для акселерометра, выходная погрешность ДУС  $\Delta\omega_x$  является входной погрешностью для ИНС в целом. Поэтому запишем эквивалентный дрейф гироскопа

$$\delta\omega_x^3 = h_r \omega_x + \delta\omega_x. \quad (6.6)$$

**4. Погрешности вычислительных устройств.** На современном этапе развития вычислительной техники можно считать, что вычислительные устройства не влияют на выходные параметры системы (на точность измерения).

Наличие указанных выше входных погрешностей приводит к появлению так называемых выходных погрешностей ИНС:

- *погрешностей горизонтирования (ориентации)*  $\beta(t)$ ;
- *погрешностей определения проекций путевой скорости на оси выбранной системы координат:*

$$\Delta V_x = \tilde{V}_x - V_x; \quad \Delta V_y = \tilde{V}_y - V_y; \quad (6.7)$$

- *погрешностей определения координаты местоположения (пройденного пути):*

$$\Delta X = \tilde{X} - X; \quad \Delta Y = \tilde{Y} - Y$$

или

$$\Delta\lambda = \tilde{\lambda} - \lambda; \quad \Delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi, \quad (6.8)$$

причем

$$\Delta X(t) = \Delta\lambda(t) R \cos\varphi; \quad \Delta Y(t) = \Delta\varphi(t) R.$$

Рассмотрим, как влияют погрешности чувствительных элементов и погрешность начальной выставки на выходные погрешности

одноканальной ИНС. При этом будем рассматривать погрешности ИНС разомкнутого и замкнутого типов.

В качестве базовой системы координат выберем географическую систему. Рассмотрим работу только северного канала ИНС. Пусть движение происходит вдоль меридиана вдоль ортодромии на север; Земля — сфера радиуса  $R$ ;  $\varphi(0) = 0$ ;  $h = 0$ .

Выходными параметрами ИНС являются проекция путевой скорости  $V_y$  и широта местоположения  $\varphi(t)$ .

Введем в рассмотрение следующие системы координат:

$OXYZ$  — идеальная система координат — географическая, которая должна воспроизводиться ГСП;

$OX_{пр}Y_{пр}Z_{пр}$  — приборная система координат, реально воспроизводимая платформой (связанная система координат);

$O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  — расчетная система координат, воспроизводимая в вычислителе по показаниям акселерометра.

Рассмотрим вначале погрешности одноканальной ИНС разомкнутого типа. Ее структурная схема представлена на рис. 5.5, а.

Для разомкнутой схемы сигналы, снимаемые с датчиков углов гироскопов, пропорциональные углам отклонения платформы от заданного направления, используются для управления двигателями стабилизации. При этом на датчик момента гироскопа не подаются корректирующие сигналы. Таким образом, выходная погрешность горизонтирования ИНС (погрешность ориентации)  $\beta(t)$  при разомкнутой схеме полностью зависит от эквивалентного дрейфа гироскопов  $\delta\omega^3$  и от погрешности начальной выставки  $\beta_0$ . Можно показать, что

$$\beta(t) = \beta_0 + \delta\omega_x^2 t.$$

Пусть приборная система координат отклонена от идеальной на угол  $\beta_0$  (рис. 6.1). В этом случае показания северного акселерометра в проекции на оси системы координат, связанной с платформой, можно записать в следующем виде (с учетом основного уравнения навигации, а также выражения (6.4)):

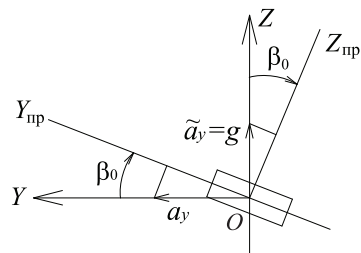


Рис. 6.1. Взаимное положение осей идеальной и приборной систем координат

$$\tilde{a}_y = a_y \cos \beta + g \sin \beta + \delta a_y^3.$$

С учетом малости угла  $\beta$  имеем

$$\tilde{a}_y = a_y + g \beta + \delta a_y^3. \quad (6.9)$$

Проекция путевой скорости на северную ось есть интеграл от измеренного кажущегося ускорения, тогда

$$\tilde{V}_y = \int_0^t \tilde{a}_y dt = V_y + g \int_0^t \beta dt + \int_0^t \delta a_y^3 dt \quad (6.10)$$

или

$$\tilde{V}_y = \int_0^t \tilde{a}_y dt = V_y + \Delta V_{y1} + \Delta V_{y2},$$

где  $\Delta V_{y1} = \int_0^t \delta a_y^3 dt$ ;  $\Delta V_{y2} = g \int_0^t \beta dt$  — погрешности определения скорости.

Пройденный путь — это второй интеграл от измерений акселерометра:

$$\tilde{Y} = \int_0^t \tilde{V}_y dt = Y + g \int_0^t \int_0^t \beta dt^2 + \int_0^t \int_0^t \delta a_y^3 dt^2, \quad (6.11)$$

где  $\Delta Y_1 = g \int_0^t \int_0^t \beta dt^2$ ;  $\Delta Y_2 = \int_0^t \int_0^t \delta a_y^3 dt^2$  — погрешности определения координат.

Будем считать, что погрешности гироскопов и акселерометров — постоянные величины:

- 1)  $\delta a_y^3 = \text{const}$ ;
- 2)  $\beta(t) = \beta_0 + \delta \omega_x^3 t$ , где  $\delta \omega_x^3 = \text{const}$ .

На основе формулы (6.10) получим выражение для погрешности определения составляющей путевой скорости:

$$\Delta V_y = \tilde{V}_y - V_y = \Delta V_{y1} + \Delta V_{y2} = g \beta_0 t + \delta a_y^3 t + \frac{1}{2} g \delta \omega_x^3 t^2.$$

Используя формулу (6.11), запишем выражение для погрешности определения координаты местоположения:

$$\Delta Y = \tilde{Y} - Y = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 = \frac{1}{2} g \beta_0 t^2 + \frac{1}{2} \delta a_y^3 t^2 + \frac{1}{6} g \delta \omega_x^3 t^3.$$

Таким образом, в разомкнутых системах погрешности определения скорости нарастают пропорционально квадрату времени, а погрешности определения координаты — пропорционально кубу времени.

Рассмотрим теперь погрешности одноканальной ИНС замкнутого типа, структурная схема которой представлена на рис. 5.5, б.

В ИНС замкнутого типа дополнительно осуществляется управление угловым положением платформы через датчики моментов гироскопов с угловой скоростью  $\omega_x^{\text{уп}}$ . В силу того что к гироскопам могут быть приложены паразитные моменты, обусловленные наличием трения в осях кожухов, тяжением токоподводов, статической несбалансированностью относительно осей кожухов, неравножесткостью конструкции кожуха с ротором и пр., может возникать неконтролируемая прецессия платформы, или собственный дрейф. Таким образом, угловая скорость разворота гиросtabilизированной платформы в пространстве

$$\omega_x^{\text{пл}} = \omega_x^{\text{уп}} + \delta \omega_x^3.$$

Обозначим угловую скорость разворота ГСП под действием управляющего сигнала как

$$\omega_x^{\text{уп}} = \dot{\alpha}.$$

Пусть ось ротора гироскопической системы отклонена от вертикали на угол  $\beta$ , тогда согласно рис. 5.4 можно записать

$$\omega_x^{\text{пл}} = \omega_x^{\text{уп}} + \delta \omega_x^3 = \dot{\phi} - \dot{\beta}, \quad (6.12)$$

где  $\dot{\beta}$  — относительная угловая скорость поворота оси ротора (относительно вертикали);  $\dot{\phi}$  — переносная угловая скорость (вертикали), равная  $V/R$ .

В результате имеем

$$\dot{\beta} = \dot{\phi} - \omega_x^{\text{пл}} = \dot{\phi} - \dot{\alpha} - \delta \omega_x^3 = \dot{\phi} - \dot{\phi} - \delta \omega_x^3 = \Delta \dot{\phi} - \delta \omega_x^3, \quad (6.13)$$

где  $\dot{\phi} = \dot{\alpha}$  — расчетная переносная угловая скорость поворота вертикали.



Угловая скорость движения ГСП под действием управляющего момента

$$\omega_x^{\text{упр}} = \frac{K}{H} \int_0^t \tilde{a}_y dt.$$

Перепишем выражение (6.12) следующим образом:

$$\dot{\beta} = \dot{\phi} - \frac{K}{H} \int_0^t \tilde{a}_y dt - \delta\omega_x^3. \quad (6.14)$$

Если ось ротора отклонена от вертикали на угол  $\beta$ , то показания северного акселерометра с учетом малости угла  $\beta$  будут определяться выражением (6.9). В этом случае (6.14) примет вид

$$\dot{\beta} = \frac{V_y}{R} - \frac{K}{H} \int_0^t (a_y + g\beta + \delta a_y^3) dt - \delta\omega_x^3.$$

С учетом условия невозмущаемости (5.14), а также выражения для частоты Шулера (5.18) предыдущее выражение можно переписать как

$$\dot{\beta} + v^2 \int_0^t \beta dt = -\frac{1}{R} \int_0^t \delta a_y^3 dt - \delta\omega_x^3. \quad (6.15)$$

Полученное интегродифференциальное уравнение (6.15) описывает поведение оси ротора в пространстве в зависимости от входных погрешностей системы. Рассмотрим решение уравнения (6.15) для трех частных случаев.

1. Акселерометр и гироскоп идеальные, имеется начальное отклонение платформы от горизонтального положения на некоторый малый угол:

$$\delta a_y^3 = 0; \quad \delta\omega_x^3 = 0; \quad \beta(0) = \beta_0.$$

Уравнение (6.15), соответствующее данному случаю, имеет вид

$$\dot{\beta} + v^2 \int_0^t \beta dt = 0. \quad (6.16)$$

Замена переменной

$$x = \int_0^t \beta dt \rightarrow \dot{x} = \beta, \quad \ddot{x} = \dot{\beta}$$

приводит уравнение (6.16) к виду

$$\ddot{x} + v^2 x = 0. \quad (6.17)$$

Начальные условия, соответствующие рассматриваемому случаю,

$$\dot{x}(0) = \beta_0; \quad \ddot{x}(0) = 0. \quad (6.18)$$

Решение дифференциального уравнения (6.17) имеет вид

$$x = \frac{1}{v} \beta_0 \sin vt.$$

Соответственно решение дифференциального уравнения (6.16)

$$\beta = \dot{x} = \beta_0 \cos vt, \quad (6.19)$$

где  $\beta$  — выходная погрешность системы (погрешность горизонтирования).

Дифференцируя выражение (6.19), получаем

$$\dot{\beta} = -\beta_0 v \sin vt.$$

Выражение для производной от погрешности горизонтирования также определяется выражением (6.13). В рассматриваемом случае  $\delta\omega_x^3 = 0$ , поэтому погрешность определения путевой скорости будет равна

$$\Delta\dot{\phi} = \dot{\beta} = -\beta_0 v \sin vt.$$

Погрешность определения координаты местоположения

$$\Delta\phi = \int_0^t \Delta\dot{\phi} dt = \beta_0 v \frac{1}{v} \cos vt \Big|_0^t = -\beta_0 (1 - \cos vt).$$

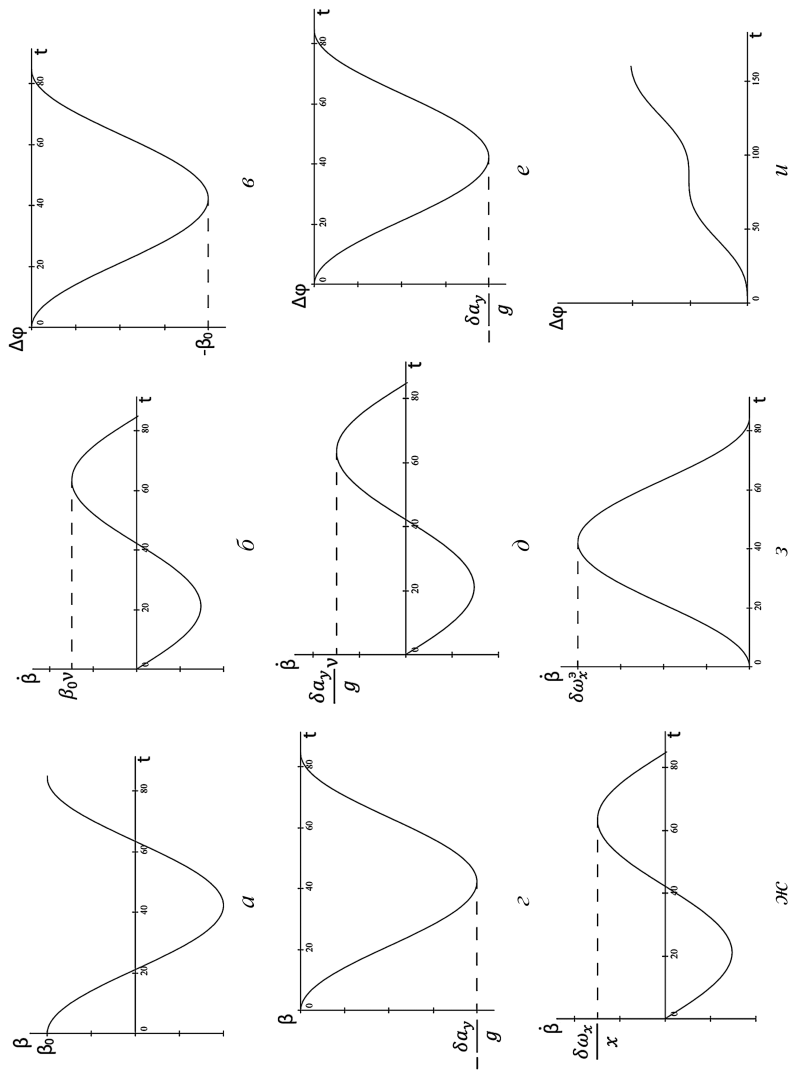
Зависимости выходных погрешностей для рассмотренного частного случая показаны на рис. 6.2, а—в.

2. Гирокосп идеальный, ГСП точно выставлена в плоскость горизонта; акселерометр имеет постоянное эквивалентное смещение нуля:

$$\beta(0) = 0; \quad \delta\omega_x^3 = 0; \quad \delta a_y^3 = \text{const.}$$

Дифференциальное уравнение (6.15) запишется в виде

$$\dot{\beta} = -v^2 \int_0^t \left( \beta + \frac{\delta a_y^3}{g} \right) dt. \quad (6.20)$$



**Рис. 6.2.** Графики частных решений уравнения (6.15):  $a$ — $ж$  — частный случай 1;  $з$ — $е$  — частный случай 2;  $ж$ — $и$  — частный случай 3

Замена переменной

$$z = \beta + \frac{\delta a_y}{g} \rightarrow \dot{z} = \dot{\beta}$$

приводит дифференциальное уравнение (6.20) к виду

$$\dot{z} + v^2 \int_0^t z dt = 0. \quad (6.21)$$

Замена переменной

$$x = \int_0^t z dt \rightarrow \dot{x} = z; \quad \ddot{x} = \dot{z}$$

приводит дифференциальное уравнение (6.21) к виду

$$\ddot{x} + v^2 x = 0 \quad (6.22)$$

с начальными условиями

$$\dot{x}(0) = z(0) = \frac{\delta a_y^3}{g}; \quad \ddot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0. \quad (6.23)$$

Уравнение (6.22) тождественно совпадает с уравнением (6.17). Пропуская промежуточные выкладки, окончательно запишем решение уравнения (6.20) (погрешность горизонтирования):

$$\beta = z - \frac{\delta a_y^3}{g} = -\frac{\delta a_y^3}{g} (1 - \cos vt).$$

Выражения для погрешностей определения путевой скорости и координаты местоположения соответственно примут вид

$$\Delta \dot{\varphi} = \dot{\beta} = -\frac{\delta a_y^3}{g} v \sin vt;$$

$$\Delta \varphi = \int_0^t \Delta \dot{\varphi} dt = \frac{\delta a_y^3}{g} \cos vt \Big|_0^t = -\frac{\delta a_y^3}{g} (1 - \cos vt).$$

Зависимости выходных погрешностей для рассмотренного частного случая представлены на рис. 6.2,  $z—e$ .

3. Акселерометр идеальный, ГСП точно выставлена в плоскость горизонта, величина эквивалентного дрейфа гироскопа постоянна:

$$\beta(0) = 0; \quad \delta a_y^3 = 0; \quad \delta \omega_x^3 = \text{const.}$$

В этом случае дифференциальное уравнение (6.15) имеет вид

$$\dot{\beta} = -v^2 \int_0^t \beta dt - \delta\omega_x^3. \quad (6.24)$$

Для решения уравнения (6.24) воспользуемся операторным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Запишем уравнение (6.24) в изображениях:

$$\left( \beta + \frac{v^2}{p} \right) \beta(p) = -\frac{1}{p} \delta\omega_x^3,$$

откуда непосредственно получим

$$\beta(p) = -\frac{1}{p^2 + v^2} \delta\omega_x^3.$$

Искомая функция, соответствующая изображению, — погрешность горизонтирования

$$\beta = -\frac{\delta\omega_x^3}{v} \sin vt.$$

Выражения для погрешностей определения путевой скорости и координаты местоположения имеют вид

$$\dot{\beta} = \Delta\dot{\phi} - \delta\omega_x^3;$$

$$\Delta\dot{\phi} = \dot{\beta} + \delta\omega_x^3 = \delta\omega_x^3 (1 - \cos vt);$$

$$\Delta\phi = \int_0^t \Delta\dot{\phi} dt = \delta\omega_x^3 \left( t - \frac{1}{v} \sin vt \right).$$

Зависимости выходных погрешностей для рассмотренного частного случая представлены на рис. 6.2, *ж*—*и*.

Таким образом, в замкнутых системах определяющей будет погрешность, обусловленная дрейфом гироскопа. Она будет нарастать пропорционально времени  $t$  в отличие от разомкнутых систем, где погрешность, обусловленная дрейфом, нарастает пропорционально времени  $t^3$ .

В заключение рассмотрим погрешности вертикального канала ИНС, или, как его еще называют, канала высоты. Для примера возьмем показания акселерометра, ось чувствительности которого

совпадает с осью  $OZ$  (вертикальной осью). Для рассматриваемой географической системы координат эта ось совпадает с вертикалью места.

Уравнение измерений идеального акселерометра в скалярной форме имеет вид

$$\tilde{a}_z = w + g_{\Gamma}.$$

Абсолютное ускорение для вертикального канала есть вторая производная от высоты местоположения объекта над эллипсоидом вращения:

$$w = \ddot{h}.$$

Тогда можно записать

$$\ddot{h} = \tilde{a}_z - g_{\Gamma}. \quad (6.25)$$

Выражение для гравитационного ускорения в случае, если считать Землю сферой со средним радиусом  $R$ , можно записать в виде

$$g_{\Gamma} = \frac{g_{\Gamma 0} R^2}{(R + h)^2}, \quad (6.26)$$

где  $g_{\Gamma 0}$  — гравитационное ускорение на экваторе.

Разложим правую часть выражения (6.26) в биномиальный ряд Ньютона:

$$g_{\Gamma} = \frac{g_{\Gamma 0} R^2}{(R + h)^2} \approx g_{\Gamma 0} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = g_{\Gamma 0} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \cong g_{\Gamma 0} \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right). \quad (6.27)$$

Подставив выражение (6.27) в уравнение (6.25), получим

$$\ddot{h} = \tilde{a}_z - g_{\Gamma 0} \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right). \quad (6.28)$$

В действительности акселерометр регистрирует действующее ускорение с некоторой погрешностью. Для реального акселерометра уравнение измерений имеет вид

$$\tilde{a}_z = a_z + \delta a_z^2.$$

При этом если акселерометр измеряет ускорение с погрешностью, то возникает погрешность при определении навигационных параметров на выходе ИНС. Например, погрешность определе-

ния высоты объекта над поверхностью Земли в общем случае можно выразить как

$$\Delta h = \tilde{h} - h,$$

где  $\Delta h$  — погрешность определения высоты.

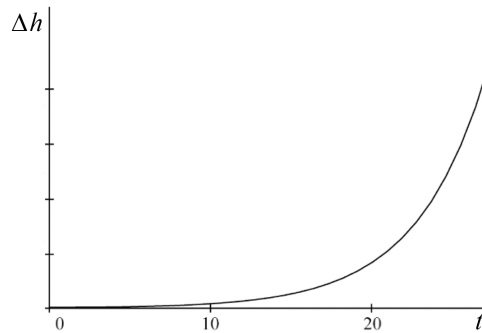
Для нахождения этой погрешности проварьрируем выражение (6.28). В результате получим

$$\Delta \ddot{h} - 2v^2 \Delta h = \delta a_z^3. \quad (6.29)$$

Решив дифференциальное уравнение (6.29) относительно  $\Delta h$  — выходной погрешности ИНС при определении высоты — получим

$$\Delta h = \frac{\delta a_z^3}{2v^2} \operatorname{ch} 2\sqrt{2} vt.$$

Зависимость выходной погрешности при определении высоты показана на рис. 6.3.



**Рис. 6.3.** Погрешность определения высоты

По виду решения дифференциального уравнения (6.29) можно сделать вывод о том, что вертикальный канал является принципиально неустойчивым, т. е. погрешность определения высоты местоположения объекта быстро увеличивается пропорционально  $\operatorname{ch} t$ . Поэтому в реальных ИНС показания вертикального канала не используются, а высота определяется неинерциальными методами (например, с помощью баровысотомера).

## ЛИТЕРАТУРА

*Бромберг П.В.* Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979. 267 с.

*Быковский А.В., Селиванова Л.М.* Инерциальная навигационная система И-21: Методические указания к лабораторным работам. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 24 с.

Гироскопические системы: В 2 кн. Кн. 2: Гироскопические приборы и системы: Учеб. для вузов / Под ред. Д.С. Пельпора. М.: Высш. шк., 1988. 424 с.

*Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.

*Лысенко Л.Н.* Наведение и навигация баллистических ракет. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 669 с.

*Назаров Б.И., Хлебников Г.А.* Гиросtabilизаторы ракет. М.: Воениздат, 1975.

*Пешехонов В.Г.* Современные автономные средства навигации и пути их развития. Материалы общероссийского семинара «Современные методы навигации и управления движением» // Гироскопия и навигация. 2006. № 2.

*Salyshev O.S.* Applied Inertial Navigation. Problems and Solutions. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 320 с.

*Селиванова Л.М., Быковский А.В.* Расчет ошибок инерциальных систем с применением ЭВМ: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 32 с.

*Фридлендер Г.О.* Инерциальные системы навигации. М.: Физматгиз, 1961. 156 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Основные термины и определения .....	3
2. Основное уравнение инерциальной навигации .....	6
3. Форма Земли. Координаты точек на земном сфероиде .....	7
4. Системы координат .....	12
Геоцентрическая инерциальная система координат $O\xi_a\eta_a\zeta_a$ .....	13
Геоцентрическая связанная с Землей система координат $O\xi\eta\zeta$ .....	15
Горизонтальные сопровождающие системы координат .....	16
5. Классификация инерциальных навигационных систем. Теорема Шулера .....	19
6. Погрешности одноканальных инерциальных навигационных систем .....	33
Литература .....	47

*Учебное издание*

**Селиванова** Людмила Михайловна

**Шевцова** Екатерина Викторовна

### **ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ**

#### **Часть 1**

#### **Одноканальные инерциальные навигационные системы**

*Учебное пособие*

Редактор *С.А. Серебрякова*

Корректор *Е.В. Авалова*

Компьютерная верстка *Н.Ф. Бердавцевой*

Подписано в печать 23.10.2012. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 2,79. Тираж 100 экз.

Изд № 40. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1