Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

А. С. Шабловский

# Выполнение домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа»

## В двух частях

## Часть 1
## Гидростатика

2-е издание, исправленное и дополненное

*Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н. Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2012

УДК 532.5
ББК 22.253
Ш13

Рецензенты: *А. Б. Ивашкин*, *А. В. Лепёшкин*

**Шабловский А. С.**

Ш13 Выполнение домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа» : учеб. пособие: В 2 ч. — Ч. 1: Гидростатика. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 69, [3] с. : ил.

Изложены основные теоретические положения и приведены конкретные решения типовых задач раздела «Гидростатика». Рассмотрены основные свойства и характеристики капельных жидкостей и газов, давление в покоящейся жидкости, силы давления на плоские и криволинейные стенки, равновесие жидкости в движущихся сосудах.

Для студентов машиностроительных факультетов МГТУ им. Н. Э. Баумана, изучающих дисциплину «Механика жидкости и газа».

Содержание учебного пособия соответствует программам дисциплин, преподаваемых в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

УДК 532.5
ББК 22.253

# Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 141100 «Энергетическое машиностроение» и изучающих дисциплину «Механика жидкости и газа» (бакалавриат и специалитет).

Цель пособия — помочь студентам выработать навыки применения теоретических сведений к решению конкретных задач и, следовательно, освоить практику гидравлических расчетов.

Каждый раздел пособия содержит краткие теоретические сведения, методические указания и примеры решения конкретных типовых задач с количественными оценками и размерностями различных параметров. В целом приведены подробные решения 25 разнообразных по тематике и степени сложности задач, с достаточной полнотой охватывающих основные разделы технической гидромеханики.

Изучение изложенного в пособии материала и последующий анализ степени влияния различных параметров на полученные результаты в рассматриваемых конструкциях и системах помогут студентам решать более сложные проблемы, возникающие при самостоятельной работе.

Предлагаемый материал также может быть полезен студентам других специальностей машиностроительных факультетов МГТУ им. Н. Э. Баумана для решения частных задач при выполнении домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа».

# Единицы измерения физических величин

## Международная система (СИ)

| Величина | | Единица измерения | |
|---|---|---|---|
| Наименование | Размерность | Наименование | Обозначение |
| Длина | $L$ | метр | м |
| Масса | $M$ | килограмм | кг |
| Время | $T$ | секунда | с |
| Температура | $\theta$ | кельвин | K |
| Площадь | $L^2$ | квадратный метр | $м^2$ |
| Объем | $L^3$ | кубический метр | $м^3$ |
| Скорость | $LT^{-1}$ | метр в секунду | м/с |
| Ускорение | $LT^{-2}$ | метр на секунду в квадрате | $м/с^2$ |
| Угловая скорость | $T^{-1}$ | радиан в секунду | рад/с |
| Угловое ускорение | $T^{-2}$ | радиан на секунду в квадрате | $рад/с^2$ |
| Частота | $T^{-1}$ | герц | Гц |
| Частота вращения | $T^{-1}$ | оборот в секунду | об/с |
| Объемный расход | $L^3T^{-1}$ | кубический метр в секунду | $м^3/с$ |
| Плотность | $ML^{-3}$ | килограмм на кубический метр | $кг/м^3$ |
| Удельный объем | $L^3M^{-1}$ | кубический метр на килограмм | $м^3/кг$ |
| Количество движения | $MLT^{-1}$ | килограмм-метр в секунду | $кг \cdot м/с$ |
| Момент количества движения | $ML^2T^{-1}$ | килограмм-метр в квадрате на секунду | $кг \cdot м^2/с$ |
| Сила, вес | $MLT^{-2}$ | ньютон | Н |

*Окончание таблицы*

| Величина | | Единица измерения | |
|---|---|---|---|
| Наименование | Размерность | Наименование | Обозначение |
| Момент силы | $ML^2T^{-2}$ | ньютон-метр | Н · м |
| Импульс силы | $MLT^{-1}$ | ньютон-секунда | Н · с |
| Давление | $ML^{-1}T^{-2}$ | паскаль | Па |
| Напор, потеря напора | $L$ | метр | м |
| Массовый расход | $MT^{-1}$ | килограмм в секунду | кг/с |
| Работа, энергия | $ML^2T^{-2}$ | джоуль | Дж |
| Мощность | $ML^2T^{-3}$ | ватт | Вт |
| Модуль упругости | $ML^{-1}T^{-2}$ | паскаль | Па |
| Динамическая вязкость | $ML^{-1}T^{-1}$ | паскаль-секунда | Па · с |
| Кинематическая вязкость | $L^2T^{-1}$ | квадратный метр на секунду | м$^2$/с |
| Поверхностное натяжение | $MT^{-2}$ | ньютон на метр | Н/м |
| Удельная газовая постоянная | $L^2T^{-2}\theta^{-1}$ | джоуль на килограмм-кельвин | Дж/(кг · K) |
| Удельная теплоемкость | $L^2T^{-2}\theta^{-1}$ | джоуль на килограмм-кельвин | Дж/(кг · K) |

# 1. Физические свойства жидкостей

В гидромеханике в понятие «жидкость» включают все тела, для которых характерно свойство текучести, т. е. способность сколь угодно сильно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил. Таким образом, этому понятию соответствуют как нормальные жидкости, называемые капельными, так и газы.

Важной особенностью капельных жидкостей является то, что они ничтожно мало изменяют свой объем при изменении давления, поэтому их обычно считают несжимаемыми. Газы, наоборот, способны к весьма значительному уменьшению своего объема под действием давления и к неограниченному расширению при отсутствии давления, т. е. они обладают большой сжимаемостью.

Несмотря на это различие, физические законы, применяемые к капельным жидкостям, при определенных условиях можно считать выполняющимися и для газов.

Наиболее важными характеристиками жидкостей являются плотность, сжимаемость, температурное (тепловое) расширение и вязкость.

***Плотность*** — это удельная масса, т. е. масса единицы объема, кг/м$^3$:

$\rho = \dfrac{m}{V}$ — для однородных жидкостей (газов);

$\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ — плотность в точке для неоднородной жидкости.

***Относительная плотность*** — это отношение плотности жидкости к плотности воды при нормальных условиях ($\rho_в = 1000$ кг/м$^3$), величина безразмерная: $\delta = \rho_ж / \rho_в$.

***Параметры состояния*** — давление $p$ и температура $T$ — влияют на физические свойства жидкостей. В частности, $\rho = \rho(p, T)$. Для газообразных сред $\rho = \dfrac{p}{RT}$, где $R$ — удельная газовая постоянная (для воздуха $R = 287$ Дж/(кг · град)). Для капельных жидкостей $\rho = \rho_0[1 - \alpha \Delta T + \beta \Delta p]$, где $\rho_0$ — плотность при давлении $p_0$ и температуре $T_0$. Физический смысл коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ объяснен ниже.

Для практических расчетов (если не оговорено условиями) нам потребуются значения плотности некоторых жидкостей:

вода $\rho = 1000$ кг/м$^3$; ртуть $\rho = 13\,600$ кг/м$^3$;

бензин $\rho \cong 700$ кг/м$^3$; керосин $\rho \cong 800$ кг/м$^3$;

минеральные масла $\rho \cong 900$ кг/м$^3$; воздух $\rho = 1{,}225$ кг/м$^3$.

***Сжимаемость*** — свойство жидкости изменять свой объем под действием давления:

$$\frac{dV}{V} = -\beta\, dp.$$

Введя понятие относительного изменения объема $\Delta V/V_0$, получим закон деформации $\Delta V/V_0 = -\beta\Delta p$, где $\beta$ — коэффициент объемного сжатия, имеющий размерность $[\beta] = 1/[p]$. Введя модуль объемной упругости $k = 1/\beta$, имеющий размерность $[k] = [p]$, получим иную форму записи закона деформации: $\Delta p = -k\Delta V/V_0$ (закон справедлив при давлении до $p \cong 100$ МПа).

Для воды $k = 2 \cdot 10^9$ Па, для минерального масла $k \cong 1{,}2 \cdot 10^9$ Па.

***Температурное* (*тепловое*) *расширение* (*при* $p =$ const).** Опыты показывают, что относительное изменение объема в зависимости от изменения температуры происходит по линейному закону в определенном диапазоне: $\Delta V/V_0 = \alpha\Delta t$, где $\alpha$ — коэффициент температурного расширения, имеющий размерность $[\alpha] = 1/[T]$. Для воды $\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$ 1/K, для минерального масла $\alpha \cong 8 \cdot 10^{-4}$ 1/K.

***Вязкость*** — это свойство жидкости сопротивляться сдвигу (или скольжению) ее слоев. Зависимость касательных напряжений $\tau$ от поперечного градиента скорости $dv/dy$ представлена законом жидкостного трения Ньютона: $\tau = \pm\mu\, dv/dy$, где $\mu$ — динамический коэффициент вязкости, величина размерная, $\mu = \mu(p, T)$. Также применяется кинематический коэффициент вязкости $\nu = \mu/\rho$. Единицы измерения вязкости приведены в таблице.

| Вязкость | Система СГС | Система СИ | Переводной множитель |
|---|---|---|---|
| Динамическая $\mu$ | 1 дина · с/см$^2$ = = 1 пуаз (П) | 1 Па · с | 1 П = 0,1 Па · с |
| Кинематическая $\nu$ | 1 см$^2$/с = = 1 стокс (Ст) | 1 м$^2$/с | 1 Ст = $10^{-4}$ м$^2$/с |

При нормальных условиях для воды $\nu = 0{,}01$ Ст, для керосина $\nu = 0{,}045$ Ст, для минерального масла $\nu = 0{,}2 \ \ldots \ 2$ Ст.

**Задача 1.1.** Стальной барабан подвергается гидравлическому испытанию путем создания избыточного давления 2 МПа. Определить, какой объем воды необходимо подать насосом в барабан дополнительно к первоначальному объему при атмосферном давлении. Геометрическая вместимость барабана 10 м$^3$. Деформацией барабана пренебречь, модуль объемной упругости воды принять равным $2 \cdot 10^9$ Па.

**Решение.** Исходя из приведенного выше закона деформации, имеем

$$\Delta V = -\frac{\Delta p V_0}{k}.$$

где $k$ — модуль объемной упругости, Па.

В конце гидравлического испытания в барабан будет подан объем воды

$$V_{б} + \Delta V = V_0.$$

Поскольку уменьшение первоначального объема воды в барабане компенсировалось подачей дополнительного (определяемого) объема,

$$\Delta V = \frac{\Delta p (V_{б} + \Delta V)}{k},$$

откуда

$$\Delta V = \frac{\Delta p V_{б}}{k - \Delta p} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10}{2 \cdot 10^9 - 2 \cdot 10^6} \cong 1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

**Задача 1.2.** В замкнутом объеме (рис. 1.1) находится: а) газ, б) минеральное масло. Насколько изменится давление в емкости, если температура содержимого в ней, равная 20 °C при атмосферном давлении, поднимется до значения 30 °C? Принять, что корпус емкости является абсолютно жестким.

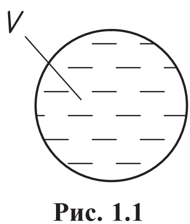



**Рис. 1.1**

**Решение.** а) Исходя из условия постоянства плотности, имеем

$$\rho = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{p_{к}}{RT_{к}} = \text{const};$$

$$\Delta p = p_к - p_0 = p_0\left(\frac{T_к}{T_0} - 1\right) = p_0\,\frac{\Delta T}{T_0};$$

$$\Delta p = \frac{10^5 \cdot 10}{293} = 3413 \text{ Па} = 3{,}413 \text{ кПа}.$$

б) Относительное изменение объема $\Delta V/V_0 = \Delta p/k$, или, иначе, $\Delta V/V_0 = \alpha\Delta T$. Следовательно, $\Delta p = \alpha\Delta T k$.

Принимая опытные значения модуля объемной упругости и коэффициента температурного расширения для минерального масла равными соответственно $k = 1{,}2 \cdot 10^9$ Па и $\alpha = 8 \cdot 10^{-4}$ 1/K, получаем

$$\Delta p = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^9 = 9{,}6 \cdot 10^6 \text{ Па}; \qquad \Delta p = 9{,}6 \text{ МПа}.$$

**Задача 1.3.** При первоначальном положении плунжера (рис. 1.2) цилиндрический сосуд был заполнен водой объемом $V = 100$ см$^3$. На какую глубину $\Delta x$ опустится торец плунжера диаметром $d$ и как возрастет давление $\Delta p$ в цилиндре при нагружении плунжера внешней силой $P = 10$ кН? Сосуд считать абсолютно жестким, утечки отсутствуют, трением плунжера в направляющем устройстве пренебречь.

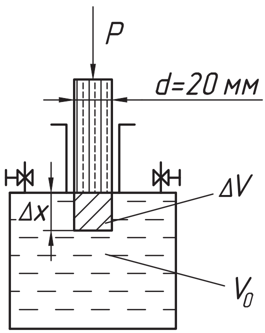



**Рис. 1.2**

**Решение.** Воздействие внешней силы $P$ приведет к увеличению давления в сосуде, равному

$$\Delta p = \frac{P}{f} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3}{\pi \cdot (0{,}02)^2} = 31{,}8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31{,}8 \text{ МПа}.$$

Поскольку $\dfrac{\Delta V}{V_0} = \dfrac{\Delta p}{k}$, а $\Delta V = f\Delta x = \dfrac{\pi}{4}\,d^2\Delta x$, то $\dfrac{\frac{\pi}{4}\,d^2\Delta x}{V_0} = \dfrac{4P}{\pi d^2 k}$,

и тогда $\Delta x = \dfrac{16PV_0}{\pi^2 d^4 k}$. При $k = 2 \cdot 10^9$ Па для воды

$$\Delta x = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{\pi^2 \cdot (0{,}02)^4 \cdot 2 \cdot 10^9} = 0{,}005 \text{ м} = 5 \text{ мм}.$$

П р и м е ч а н и е. Данный расчет проведен в соответствии с законом объемной деформации $\Delta V/V_0 = -\Delta p/k$, из которого следует, что связь между изменением давления и изменением объема линейная. Более точный расчет можно выполнить, перейдя от конечных разностей к дифференциалам:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{k}; \quad \int\limits_{V_0}^{V_к} \frac{dV}{V} = -\int\limits_{p_0}^{p_к} \frac{dp}{k}; \quad \ln\frac{V_к}{V_0} = -\frac{p_к - p_0}{k}; \quad V_к = V_0 \exp\Bigl(-\frac{\Delta p}{k}\Bigr);$$

$$\Delta V = V_0 - V_к = V_0\Bigl[1 - \exp\Bigl(-\frac{\Delta p}{k}\Bigr)\Bigr];$$

$$\Delta V \cong V_0\Bigl[1 - \Bigl(1 - \frac{\Delta p}{k} + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\Delta p}{k}\Bigr)^2 - \ldots\Bigr)\Bigr] = \frac{V_0\Delta p}{k}\Bigl[1 - \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\Delta p}{k}\Bigr) + \ldots\Bigr].$$

Количественная оценка погрешности в проведенном расчете может быть дана после подсчета слагаемого $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Delta p}{k}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{31{,}8\cdot 10^6}{2\cdot 10^9} = 0{,}008,$$

т. е. 0,8 %.

Рассмотренные примеры позволяют сделать важный с технической точки зрения вывод: капельные жидкости практически несжимаемы.

## 2. Равновесие жидкости в поле силы тяжести

Рассмотрим содержащуюся в сосуде жидкость, на свободную поверхность которой действует распределенное давление (рис. 2.1).

Состояние жидкости определяется действием следующих сил:

а) ***поверхностные*** — это контактные силы, распределенные по границам любого выделенного объема. Они направлены по нормали к поверхностям и являются сжимающими. Количественной оценкой поверхностных сил служит интенсивность, или напряженность:

$\dfrac{\Delta P}{\Delta F} = p_{\text{ср}}$ — среднее давление на площадку $\Delta F$;

$\lim\limits_{\Delta F \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta F} = p$ — давление в точке покоящейся однородной жидкости, Па (Н/м$^2$);

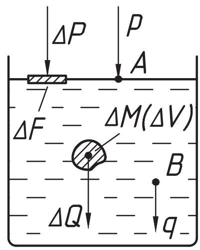



**Рис. 2.1**

б) ***массовые*** — это силы, действующие на жидкость со стороны поля, в которое она помещена. Количественной оценкой этих сил является

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overline{Q}}{\Delta M} = \bar{q},$$

где $\bar{q}$ — единичная массовая сила, м/с$^2$; $\Delta M = \rho \Delta V$.

Таким образом, $\bar{q}$ — это ускорение, которое получает элементарная частица жидкости в данном поле. Если поле гравитационное, т. е. $\Delta \overline{Q}$ — сила тяжести, то $\bar{q} = \bar{g}$.

В покоящейся жидкости ($\tau = 0$) возможен лишь один вид напряжений — напряжение сжатия.

Давление, которое представляет собой полное напряжение сжатия, возникающее от действия всех сил (поверхностных и массовых), приложенных к жидкости, называется абсолютным давлением.

В международной системе единиц физических величин единицей измерения давления является паскаль (Па (Н/м$^2$)). Кратные единицы — килопаскаль (кПа) и мегапаскаль (МПа):

$$1\ \text{кПа} = 10^3\ \text{Па}; \quad 1\ \text{МПа} = 10^6\ \text{Па}.$$

Распространена и внесистемная единица — техническая атмосфера:

$$1\ \text{атм} = 1\ \text{кГс}/\text{см}^2 = 98{,}1\ \text{кПа}.$$

В любой точке покоящейся однородной несжимаемой жидкости давление может быть определено по основному уравнению гидростатики:

$$p = p_0 \pm \rho g h,$$

где $p_0$ — внешнее давление; $\rho g h$ — весовое давление. Знак плюс в уравнении соответствует отсчету высоты столба жидкости $h$ вниз относительно уровня, которому соответствует давление $p_0$, а знак минус — отсчету высоты $h$ вверх.

В практике теоретических расчетов и технических измерений применяется либо абсолютная, либо избыточная система давлений. Основное уравнение гидростатики также может быть использовано как в абсолютной системе давлений (тогда $p_0 = p_\text{а}$), так и в избыточной (тогда $p_0 = p_\text{и}$). На практике удобно отсчитывать давление от условного нуля, за который принимают давление атмосферного воздуха у поверхности земли. Возможные случаи расчетов и измерений показаны на диаграмме давлений (рис. 2.2). Когда абсолютное давление $p_\text{а}$ превышает атмосферное $p_\text{атм}$ (на диаграмме вариант $A$), имеет место избыточное давление $p_\text{и}$:

$$p_\text{и} = p_\text{а} - p_\text{атм}.$$

Если абсолютное давление меньше атмосферного (вариант $C$), избыточное давление отрицательно. Недостаток давления до атмосферного называется вакуумом $p_\text{в}$:

$$p_\text{в} = p_\text{атм} - p_\text{а}.$$

При нулевом избыточном давлении (вариант $B$)

$$p_\text{и} = 0; \quad p_\text{а} = p_\text{атм}.$$

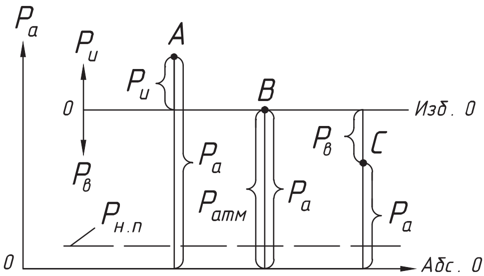



**Рис. 2.2**

При ориентировочных расчетах давление атмосферного воздуха при нормальных условиях можно принимать приблизительно равным 100 кПа.

Линия $p_{\text{н.п}}$ (см. рис. 2.2) характеризует тот факт, что для капельных жидкостей нижним порогом падения абсолютного давления будет давление насыщенных паров $p_{\text{н.п}}$, при котором происходит нарушение сплошности жидкости, сопровождаемое интенсивным парообразованием, внешне похожим на кипение. Значение этого давления зависит от физических свойств жидкости и от температуры.

Анализ основного уравнения гидростатики приводит к выводу, что поверхности уровня (поверхности равного давления) представляют собой горизонтальные плоскости, в их числе и свободная поверхность (СП) — поверхность раздела жидкости и газа.

В гидростатике часто пользуются понятием «высота давления». Это высота столба жидкости, который, действуя своим весом на единицу площади, уравновешивает данное давление: $p = \rho g h$, откуда $h = \dfrac{p}{\rho g}$.

Например, $p = 100$ кПа. Если применять для измерения этого давления простейший жидкостной прибор — пьезометр, в котором в качестве рабочей жидкости будет использована вода ($\rho = 1000$ кг/м$^3$), то

$$h = \frac{100 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10} \cong 10 \text{ м вод. ст.}$$

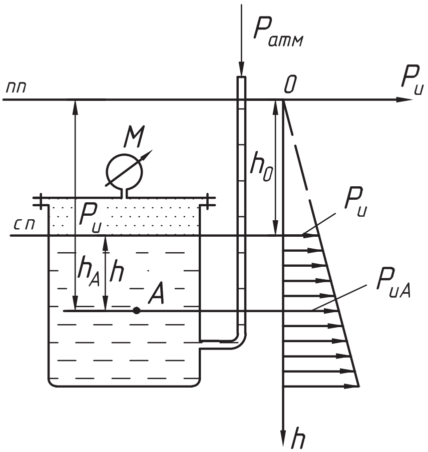



**Рис. 2.3**

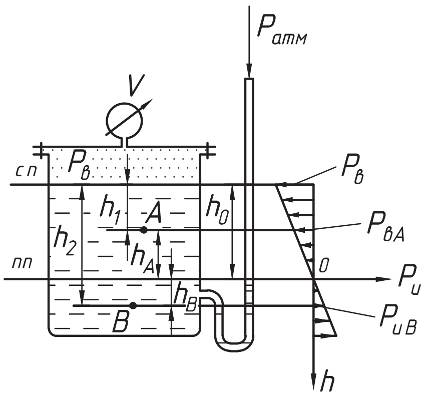



**Рис. 2.4**

На рис. 2.3 и 2.4 показаны принципиальные схемы измерения давлений $p_и$ и $p_в$ с помощью высоты столбов жидкости; $M$ и $V$ – манометр и вакуумметр, по показаниям которых можно судить о значениях давлений $p_и$ и $p_в$; ПП – пьезометрическая поверхность ($p_и = 0$). Расчетные соотношения для рис. 2.3 имеют вид

$$h_0 = \frac{p_и}{\rho g}; \quad p_{и_A} = p_и + \rho g h = \rho g h_A;$$

для рис. 2.4:

$$h_0 = \frac{p_{\text{в}}}{\rho g}; \quad p_{\text{в}_A} = (-p_{\text{в}} + \rho g h_1) = \rho g h_A; \quad p_{\text{и}_B} = (-p_{\text{в}} + \rho g h_2) = \rho g h_B.$$

Примечание. Используя уравнения Эйлера, которые лежат в основе вывода основного уравнения гидростатики $p = p_0 \pm \rho g h$, можно получить закон распределения давления для газообразных сред в поле силы тяжести. В частности, $dp = -\rho g\, dz$.

Это уравнение справедливо как для капельных, практически несжимаемых жидкостей ($\rho \cong \text{const}$), так и для газообразных сред ($\rho \neq \text{const}$). Для последних $\rho = \frac{p}{RT}$ и, следовательно, $dp = -\frac{p}{RT} g\, dz$.

В случае изотермического равновесия газа ($T = \text{const}$)

$$\ln p = -\frac{gz}{RT} + C,$$

где $C$ — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий: при $z = 0$ $p = p_0$.

Имеем:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right).$$

В первом приближении

$$p \cong p_0 - p_0 \frac{gz}{RT}.$$

Полученное выражение по форме аналогично основному уравнению гидростатики $p \cong p_0 - \rho_0 g z$.

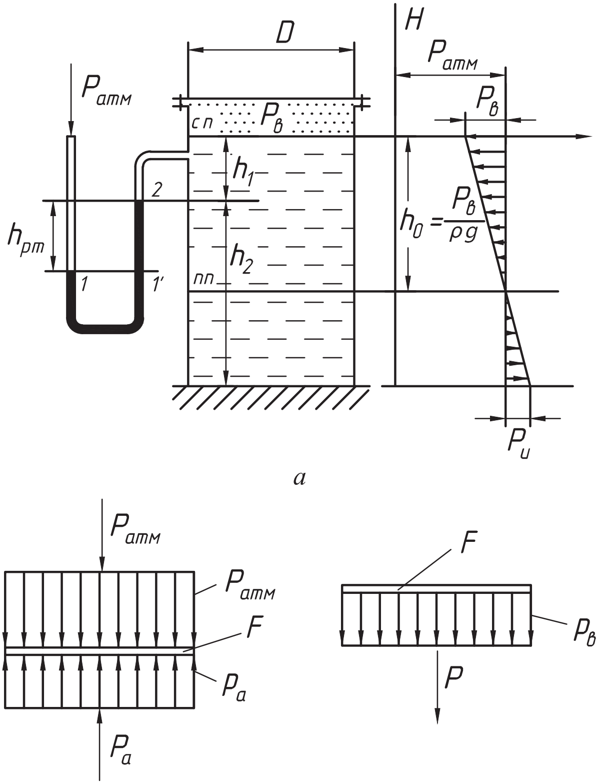
**Задача 2.1.** Показание манометра $h_{\text{рт}} = 500$ мм рт. ст. Определить: а) избыточное давление в килопаскалях; б) избыточное давление в метрах столба этилового спирта ($\delta = 0{,}87$); в) абсолютное давление в килопаскалях, если барометрическое давление равно $h_{\text{бар}} = 736$ мм рт. ст.

**Решение.** а) Избыточное давление в килопаскалях

$$p_{\text{и}} = \rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 66\,708 \text{ Па} = 66{,}7 \text{ кПа};$$

б) избыточное давление в метрах столба этилового спирта

$$\rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} = \rho_{\text{сп}} g h_{\text{сп}}, \qquad h_{\text{сп}} = h_{\text{рт}} \frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho_{\text{сп}}} = 0{,}5 \cdot \frac{13\,600}{870} = 7{,}816 \text{ м сп. ст.};$$




*а*

*б*

**Рис. 2.5**

в) абсолютное давление в килопаскалях

$$p_{\text{а}} = p_{\text{атм}} + p_{\text{и}}; \qquad p_{\text{атм}} = \rho_{\text{рт}} \cdot g \cdot h_{\text{бар}};$$

$$p_{\text{а}} = \rho_{\text{рт}} \cdot g(h_{\text{бар}} + h_{\text{рт}}) = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}236 \cong 165\,000 \text{ Па} = 165 \text{ кПа}.$$

**Задача 2.2.** К цилиндрическому сосуду диаметром $D = 2$ м, заполненному водой (рис. 2.5, *а*), подсоединен U-образный ртутный вакуумметр. Его показание $h_{\text{рт}} = 100$ мм рт. ст. При известных значениях $h_1 = 1$ м и $h_2 = 2$ м определить: а) давление в точках дна сосуда; б) вакуум над свободной поверхностью в сосуде; в) силу давления, нагружающую крышку. Построить эпюру распределения избыточного давления жидкости по высоте сосуда.

**Решение.** Решим задачу в избыточной системе давления, руководствуясь основным уравнением гидростатики $p = p_0 \pm \rho g h$.

а) Избыточное давление на уровне точки 1: $p_{\text{и}_1} = 0$. На основании закона о сообщающихся сосудах $p_{\text{и}_{1'}} = 0$. Уровню точки 2 соответствует вакуум, причем таким же давление будет на этом уровне и в сосуде (на основании того же закона):

$$p_{\text{и}_2} = -\rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}}.$$

Следовательно, в точках дна сосуда давление будет равно

$$p_{\text{и}} = -\rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} + \rho_{\text{в}} g h_2 = \\ = -13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = +6278 \text{ Па} \cong 6{,}3 \text{ кПа}.$$

Знак плюс в полученном результате означает, что в точках дна сосуда будет положительное избыточное давление.

б) По аналогии может быть определено и давление над СП:

$$p_{\text{и}} = -\rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}} g h_1 = \\ = -13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1 - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = -23\,152 \text{ Па},$$

$p_{\text{в}} = 23{,}152$ кПа.

в) Сила давления на крышку будет определяться величиной $p_{\text{в}}$ и площадью $F$ (рис. 2.5, *б*):

$$P = P_{\text{атм}} - P_{\text{а}} = (p_{\text{атм}} - p_{\text{а}})F = p_{\text{в}} \frac{\pi}{4} D^2 = \\ = 23\,152 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 = 72\,696 \text{ Н} \cong 72{,}7 \text{ кН}.$$

**Задача 2.3.** Поршень диаметром $D = 200$ мм движется равномерно вверх в цилиндре, засасывая воду, температура которой 30 °C, из открытого бака с постоянным уровнем воды при барометрическом давлении $h_{\text{бар}} = 740$ мм рт. ст. (рис. 2.6). Определить: а) силу $P$, которую необходимо приложить к поршню в момент, когда он находится выше уровня воды в баке на отметке $h = 5$ м; б) высоту $h_{\max}$, до которой можно поднять поршень в цилиндре, не опасаясь отрыва от него жидкости, если давление насыщенных паров воды $p_{\text{н.п}} = 4{,}27$ кПа и ее плотность $\rho = 995$ кг/м$^3$. Весом

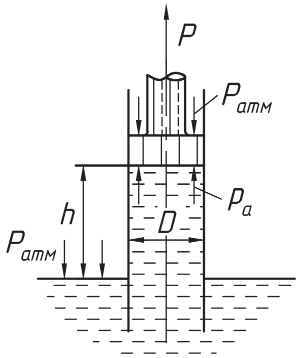



**Рис. 2.6**

поршня, трением его о стенки и трением жидкости о внутреннюю поверхность цилиндра пренебречь.

**Решение.** а) Значение вакуума под поршнем:

$$p_в = p_{атм} - p_а =$$

$$= \rho g h = 995 \cdot 9{,}81 \cdot 5 = 48\,805 \text{ Па}.$$

Сила $P$, которую нужно приложить к поршню, чтобы удержать столб жидкости высотой $h$:

$$P = p_в \frac{\pi}{4} D^2 = 48\,805 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}04 = 1532 \text{ Н} = 1{,}523 \text{ кН}.$$

б) В момент отрыва жидкости от поршня абсолютное давление под ним

$$p_{н.п} = p_{атм} - \rho g h_{max}.$$

Следовательно, высоту $h_{max}$ можно найти по выражению

$$h_{max} = \frac{p_{атм} - p_{н.п}}{\rho g} = \frac{\rho_{рт} g h_{бар} - p_{н.п}}{\rho g} =$$

$$= \frac{13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}740 - 4270}{995 \cdot 9{,}81} = 9{,}68 \text{ м}.$$

**Задача 2.4.** Показание дифференциального ртутного манометра составляет $\Delta h = 300$ мм рт. ст. (рис. 2.7). Определить перепад давлений $\Delta p$ над свободными поверхностями в сосудах $A$ и $B$, заполненных бензином ($\rho = 700$ кг/м$^3$).

**Решение.** Выбрав базовую плоскость $N$–$N$, запишем условие равенства давлений:

$$p_1 + \rho_б g(h + \Delta h) = p_2 + \rho_б g h + \rho_{рт} g \Delta h;$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_б g h + \rho_{рт} g \Delta h - \rho_б g h - \rho_б g \Delta h;$$

$$\Delta p = g \Delta h(\rho_{рт} - \rho_б) = 9{,}81 \cdot 0{,}3(13\,600 - 700) = 37\,965 \text{ Па} \cong 38 \text{ кПа}.$$

Примечание. Перепад давлений можно также определить по рабочей формуле дифференциального ртутного манометра в метрах бензино-

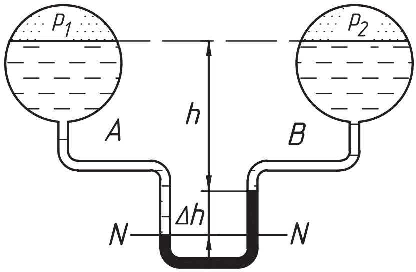



**Рис. 2.7**

вого столба:

$$\Delta H = \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{б}}} \Delta h_{\text{рт}} = \frac{13\,600 - 700}{700} \cdot 0{,}3 = 5{,}53 \text{ м б. ст.}$$

**Задача 2.5.** Вертикальный цилиндр (рис. 2.8) заполнен газом, относительная плотность которого $\delta = 0{,}4$. Определить показание верхнего манометра $x$, подсоединенного на высоте $H = 40$ м относительно нижнего манометра, расположенного на уровне земли. Показание нижнего манометра $h = 25$ мм рт. ст. Температура окружающего воздуха $+30\,^\circ$C. Барометрическое давление $h_{\text{бар}} = 740$ мм рт. ст. (давление воздуха на уровне нижнего манометра).

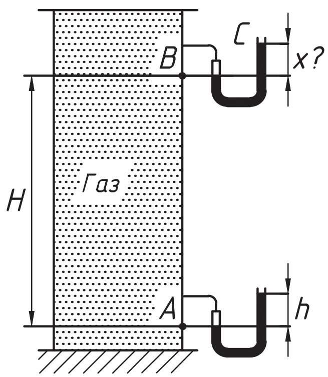



**Рис. 2.8**

**Решение.** Давление окружающего воздуха на уровне верхнего манометра (точка $C$):

$$p_C = p_{\text{атм}} - \rho_{\text{в}} g H.$$

В абсолютной системе значения давления газа в цилиндре на уровнях точек $A$ и $B$:

$$p_A = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{рт}} g h;$$

$$p_B = p_A - \rho_{\text{г}} g H = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{рт}} g h - \rho_{\text{г}} g H.$$

Верхний манометр показывает перепад давлений: $p_B - p_C = \rho_{\text{рт}} g x$. Тогда

$$p_{\text{атм}} + \rho_{\text{рт}} g h - \rho_{\text{г}} g H - p_{\text{атм}} + \rho_{\text{в}} g H = \rho_{\text{рт}} g x;$$

$$x = \frac{\rho_{\text{рт}} g h - \rho_{\text{г}} g H + \rho_{\text{в}} g H}{\rho_{\text{рт}} g} = h + \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}})H}{\rho_{\text{рт}}}.$$

Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_{\text{в}} = 1{,}225$ кг/м$^3$. Уравнение состояния дает возможность определить плотность воздуха при заданных условиях:

$\dfrac{p_1 V_1}{T_1} = \dfrac{p_2 V_2}{T_2}$; при $V = \dfrac{1}{\rho}$ имеем $\rho_2 = \rho_1 \dfrac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$;

$\rho_{\text{в}} = 1{,}225 \cdot \dfrac{740}{760} \cdot \dfrac{288}{303} = 1{,}134$ кг/м$^3$.

Относительная плотность газа

$$\delta = \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Тогда плотность газа $\rho_{\text{г}} = 0{,}4 \cdot 1{,}134 = 0{,}453$ кг/м$^3$,

$$x = 25 + 40\,000 \cdot \frac{1{,}134 - 0{,}453}{13\,600} = 27 \text{ мм рт. ст.}$$

Таким образом, различие в показаниях верхнего и нижнего манометров равно 2 мм.

**Задача 2.6.** Цилиндрический сосуд (рис. 2.9, *а*) диаметром $D = 0{,}2$ м и высотой $h = 0{,}1$ м, заполненный водой, опирается на плунжер диаметром $d = 0{,}1$ м. Определить показание манометра $M$, закрепленного в верхней крышке, если масса металлоконструкции сосуда $m = 570$ кг.

**Решение.** Задачу можно решить двумя различными способами.

**I способ** (рис. 2.9, *б*).

Предлагается рассмотреть условие равновесия сосуда, находящегося под действием собственного веса и приложенных к его внутренним поверхностям сил избыточного давления жидкости, значения которых зависят от давлений $p_1$ и $p_2$:

$$G + P_2 = P_1.$$

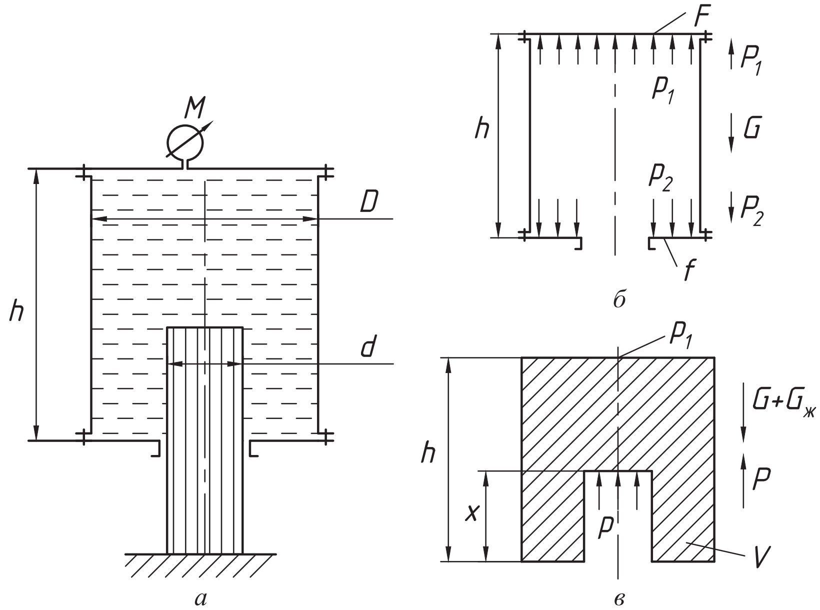



**Рис. 2.9**

Вес металлоконструкции $G = mg$. Сила давления на верхнюю крышку $P_1 = p_1 F$, где $p_1$ — давление, которое регистрируется манометром $M$:

$$P_1 = p_1 \frac{\pi}{4} D^2.$$

Сила давления на нижнюю крышку:

$$P_2 = p_2 f = (p_1 + \rho g h) \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2);$$

$$G + (p_1 + \rho g h) \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = p_1 \frac{\pi}{4} D^2;$$

$$p_1 = \frac{G + \rho g h \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)}{\frac{\pi}{4} d^2} =$$

$$= \frac{5700 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{\pi}{4} (0{,}04 - 0{,}01)}{\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}01} = 726\,232 \text{ Па}.$$

Показание манометра 0,73 МПа.

**II способ** (рис. 2.9, *в*).

Предлагается рассмотреть условие равновесия *сосуда с жидкостью*, воспользовавшись принципом «отвердения» жидкости.

Обозначим $x$ глубину вхождения плунжера.

Сила давления, уравновешивающая общий вес:

$$P = p\,\frac{\pi}{4}\,d^2 = \left[p_1 + \rho g(h - x)\right]\frac{\pi}{4}\,d^2.$$

Вес жидкости в объеме $V$:

$$G_{\text{ж}} = \rho g V = \rho g h\,\frac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2) + \rho g(h - x)\,\frac{\pi}{4}\,d^2.$$

Условие равновесия:

$$G + G_{\text{ж}} = P.$$

Подставив значения сил и решив это уравнение относительно неизвестного $p_1$, вновь получим выражение

$$p_1 = \frac{G + \rho g h\,\dfrac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2)}{\dfrac{\pi}{4}\,d^2}.$$

**Задача 2.7.** Гидравлический подъемник (рис. 2.10, *а*) должен поднимать и опускать груз весом $G = 150$ кН. Дифференциальный поршень, имеющий диаметры $D = 200$ мм, $d = 100$ мм, уплотнен кожаными манжетами шириной $B = 14$ мм и $b = 12$ мм соответственно. Коэффициент трения кожи о сталь $f = 0{,}1$. Определить давление жидкости при равномерном подъеме $p_{\text{п}}$ и при спуске $p_{\text{сп}}$ груза. Диаметром штока пренебречь.

**Решение.** Условие равновесия сил, действующих на подвижные части при подъеме (рис. 2.10, *б*):

$$P_1 - P_2 - G - T_1 - T_2 = 0.$$

Силы давления на верхний и нижний поршни:

$$P_1 = p_{\text{п}}\,\frac{\pi}{4}\,D^2; \qquad P_2 = p_{\text{п}}\,\frac{\pi}{4}\,d^2.$$

Сила трения $T = fN$, где нормальная сила $N = pS$:

$$T_1 = p_{\text{п}}\pi DBf; \qquad T_2 = p_{\text{п}}\pi dbf.$$

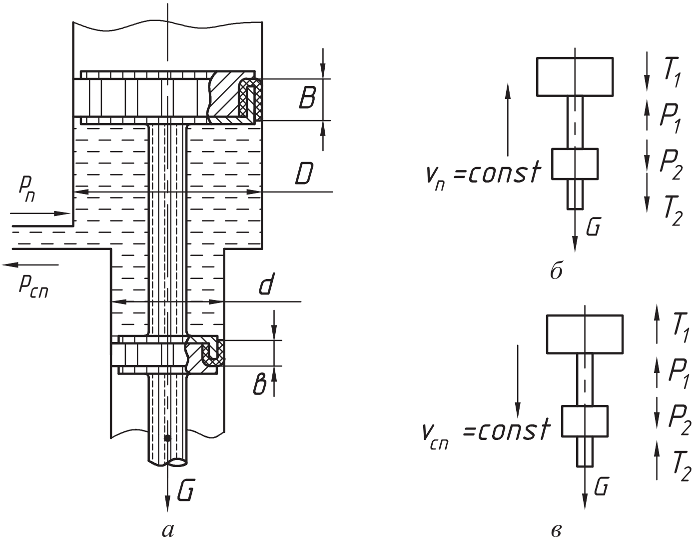



**Рис. 2.10**

Тогда

$$p_п \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) - G - p_п f \pi (DB + db) = 0;$$

$$p_п = \frac{G}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) - f\pi(DB + db)} =$$

$$= \frac{150\,000}{\frac{\pi}{4}(0{,}04 - 0{,}01) - \pi \cdot 0{,}1(0{,}2 \cdot 0{,}014 + 0{,}1 \cdot 0{,}012)} =$$

$$= 6{,}66 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6{,}66 \text{ МПа}.$$

Условие равновесия сил, действующих на подвижные части при спуске (рис. 2.10, *в*):

$$P_1 - P_2 - G + T_2 + T_1 = 0;$$

$$p_{сп} \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) + p_{сп} f \pi (DB + db) = G;$$

$$p_{сп} = \frac{G}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) + f\pi(DB + db)}.$$

После подстановки числовых данных и решения получаем ответ $p_{сп} = 5{,}93$ МПа.

**Задача 2.8.** Показанный на рис. 2.11, *а* сосуд имеет размеры $D = 0{,}6$ м; $d = 0{,}2$ м; $H = 0{,}25$ м и наполнен водой до высоты $h + H = 0{,}4$ м. Сверху сосуд закрыт поршнем, который нагружен внешней силой $P = 1$ кН. Определить силы, нагружающие болтовые группы $A$ и $B$. Поршень считать идеальным (утечек нет, силы

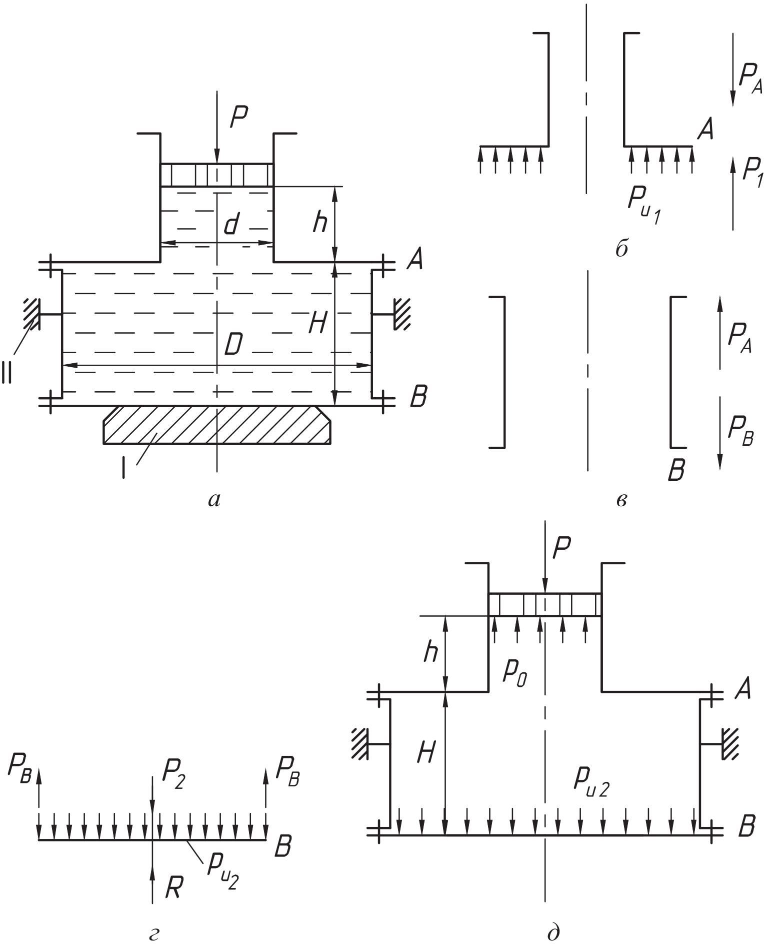



**Рис. 2.11**

трения отсутствуют). Весом металлоконструкции пренебречь. Рассмотреть два варианта опор:

I. Сосуд опирается на нижнюю крышку.

II. Сосуд удерживается за боковую поверхность.

Примечание. При решении этой и аналогичных рассматриваемых далее задач по определению нагрузок в болтовых группах следует отличать силовой расчет от расчета на прочность, так как расчетом на прочность предусматриваются не только гидростатические нагрузки $P_A$ и $P_B$, но и учет предварительного натяжения болтов, упругость прокладок и прочие факторы.

**Решение.**

**I вариант опор** (рис. 2.11, *б*).

Условие равновесия сил на верхней крышке: $P_A = P_1$, где

$$P_1 = p_{и_1} \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = (p_0 + \rho g h)\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$

Здесь $p_0 = \dfrac{P}{\frac{\pi}{4} d^2}$ — давление под поршнем, создаваемое внешней силой $P$.

Подставив числовые значения, получим

$$P_1 = \left(\frac{4 \cdot 1000}{\pi \cdot 0{,}04} + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15\right)\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}32 = 8376{,}8 \text{ Н}.$$

Тогда $P_A = 8{,}377$ кН; $P_B = P_A = 8{,}377$ кН (рис. 2.11, *в*).

Примечание. При рассмотрении условий равновесия сил на нижней крышке необходимо знать реакцию опоры $R$ (рис. 2.11, *г*)

$$P_B = p_{и_2} \frac{\pi}{4} D^2 - R.$$

**II вариант опор** (рис. 2.11, *д*).

Сила, нагружающая болтовую группу $A$, не изменится:

$$P_A = 8{,}377 \text{ кН}.$$

Сила, нагружающая болтовую группу $B$:

$$P_B = p_{и_2} \frac{\pi}{4} D^2 = \left[ \frac{4P}{\pi d^2} + \rho g (h + H) \right] \frac{\pi}{4} D^2 =$$

$$= \left( \frac{4000}{\pi \cdot 0{,}04} + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 \right) \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}36 = 10\,109 \text{ Н} = 10{,}109 \text{ кН}.$$

# 3. Силы давления покоящейся жидкости на плоские стенки

Если плоская стенка подвергается одностороннему давлению жидкости (на несмоченную сторону стенки действует атмосферное давление), то результирующая $P$ сил давления, воспринимаемая стенкой и направленная по нормали к ней, равна

$$P = p_{\text{и}C}F = \rho g h_C F,$$

где $p_{\text{и}C}$ — избыточное давление в центре тяжести $C$ площади $F$; $h_C$ — расстояние по вертикали от центра тяжести $C$ площади $F$ до пьезометрической поверхности (ПП).

При избыточном давлении $p_{\text{и}}$ над свободной поверхностью (СП) ПП проходит над СП жидкости на расстоянии $h_0 = \dfrac{p_{\text{и}}}{\rho g}$ (рис. 3.1), и тогда $P = (p_{\text{и}} + \rho g h)F = \rho g h_C F$, а при вакууме $p_{\text{в}}$ — под СП на расстоянии $h_0 = \dfrac{p_{\text{в}}}{\rho g}$ (рис. 3.2), и тогда $P = (-p_{\text{в}} + \rho g h)F = \rho g h_C F$.

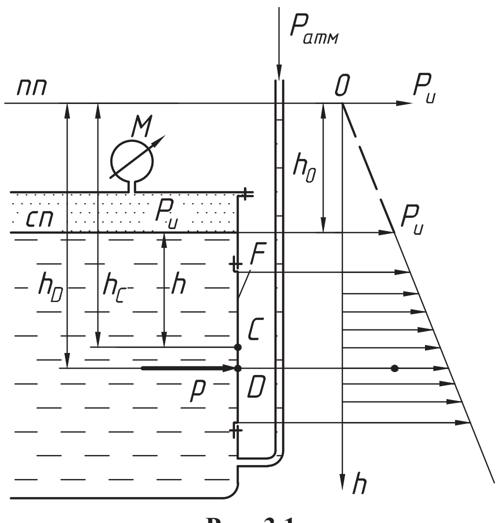



**Рис. 3.1**

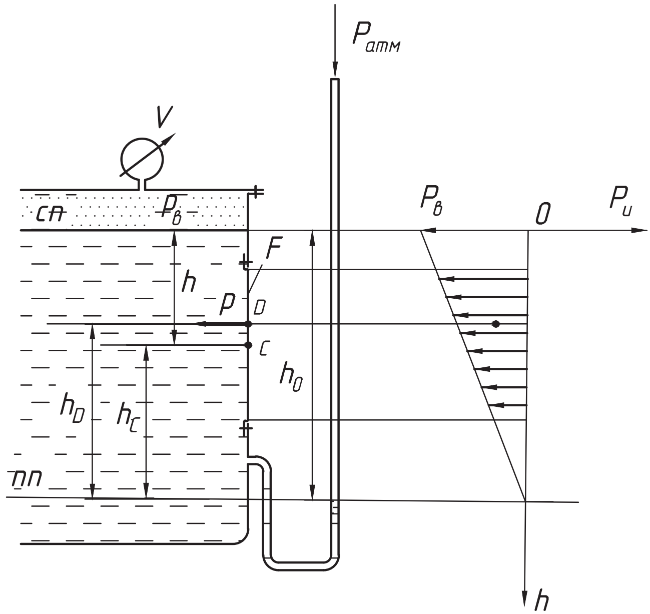



**Рис. 3.2**

Если $p_и = 0$, ПП совпадает с СП и нагрузку на стенку находят в соответствии с законом распределения давления.

Центр давления – точка пересечения линии действия силы $P$ с плоскостью стенки. Положение центра давления (точка $D$) в плоскости стенки определяется формулами

$$h_D = h_C + \frac{J_C}{h_C F};$$

$$\Delta h = h_D - h_C = \frac{J_C}{h_C F},$$

где $h_D$ и $h_C$ – расстояния от центра давления $D$ и центра тяжести $C$ площади стенки до ПП; $J_C$ – момент инерции площади стенки относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести $C$ площади стенки.

Для горизонтальной стенки имеем $h_D = h_C$, т. е. центр давления и центр тяжести совпадают.

Силу $P$ можно находить и геометрическим способом по объему эпюры нагрузки, интенсивность которой в каждой точке стенки равна избыточному давлению на этом уровне, а линия действия силы $P$ проходит через центр тяжести этого объема.

**Задача 3.1.** Два замкнутых резервуара (рис. 3.3), заполненных водой, соединены трубой диаметром $D = 0{,}5$ м, перекрытой дисковым затвором. Давление над свободной поверхностью в левом и правом резервуарах соответственно равно $p_и = 100$ кПа и $p_в = 50$ кПа, а заглубление оси затвора $H_1 = 2$ м и $H_2 = 1$ м. Определить: а) результирующую силу давления $P_\Sigma$ на затвор (считая его боковую поверхность плоской); б) момент $M_\Sigma$ этой силы относительно оси затвора, проходящей через точку $C$; в) начальный внешний момент $M_н$, необходимый для открытия затвора, с учетом момента трения $M_{тр}$ в цапфах затвора диаметром $d = 0{,}1$ м, если коэффициент трения скольжения в цапфах $f = 0{,}15$.

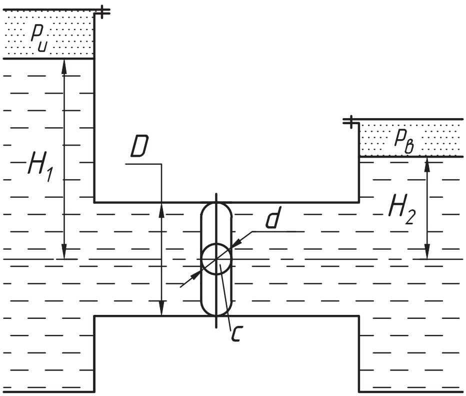



**Рис. 3.3**

**Решение.** а) Силы давления на диск затвора слева $P_1$ и справа $P_2$ соответственно равны

$$P_1 = p_C F = (p_и + \rho g H_1)\,\frac{\pi}{4}\,D^2;$$

$$P_2 = p_C F = (-p_в + \rho g H_2)\,\frac{\pi}{4}\,D^2.$$

Для определения направления векторов сил $P_1$ и $P_2$ и точек их приложения нужно определить положение пьезометрических поверхностей ПП1 и ПП2 (найти $h_{01} = \frac{p_и}{\rho g}$ и $h_{02} = \frac{p_в}{\rho g}$) и построить эпюры распределения давления по высоте затвора слева и справа (рис. 3.4).

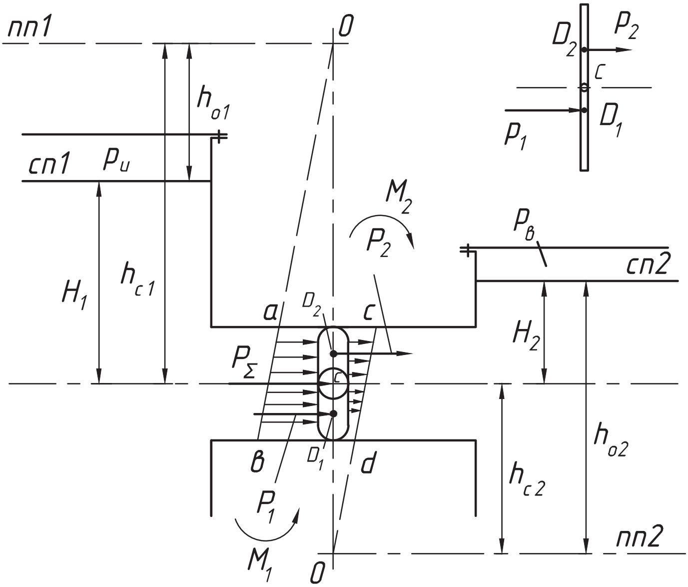



**Рис. 3.4**

Имеем

$$P_1 = \rho g h_{C1} \frac{\pi}{4} D^2 = \rho g (H_1 + h_{01}) \frac{\pi}{4} D^2 =$$

$$= 1000 \cdot 9{,}81(2 + 10{,}19) \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}25 = 23\,468 \text{ Н};$$

$$CD_1 = \Delta h_1 = \frac{J_C}{h_{C1} \frac{\pi}{4} D^2} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{h_{C1} \frac{\pi}{4} D^2} = \frac{D^2}{h_{C1} 16};$$

$\Delta h_1 = 0{,}0032$ м;

$$M_1 = \Delta h_1 \cdot P_1 = \frac{J_C}{h_{C1}\,\frac{\pi}{4}\,D^2}\,\rho g h_{C1}\,\frac{\pi}{4}\,D^2 = \rho g J_C;$$

$M_1 = 7{,}5$ Н · м;

$$P_2 = \rho g h_{C2}\,\frac{\pi}{4}\,D^2 = \rho g (h_{02} - H_2)\,\frac{\pi}{4}\,D^2 =$$

$$= 1000 \cdot 9{,}81(5{,}096 - 1)\,\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}25 = 7886 \text{ Н};$$

$$CD_2 = \Delta h_2 = \frac{J_C}{h_{C2}\,\frac{\pi}{4}\,D^2};$$

$\Delta h_2 = 0{,}0095$ м;

$$M_2 = \Delta h_2 P_2 = \frac{J_C}{h_{C2}\,\frac{\pi}{4}\,D^2}\,\rho g h_{C2}\,\frac{\pi}{4}\,D^2 = \rho g J_C;$$

$M_2 = 7{,}5$ Н · м.

Результирующая сила давления на диск затвора

$$P_\Sigma = P_1 + P_2; \quad P_\Sigma = 31{,}354 \text{ кН}.$$

б) Вектор результирующей силы проходит через центр тяжести $C$, так как суммарная эпюра нагружения диска затвора представляет собой прямоугольник. Следовательно, момент $M_\Sigma = 0$. Это следует и из равенства моментов $M_1$ и $M_2$, направленных в противоположные стороны.

в) Для определения начального внешнего момента $M_{\text{н}}$, необходимого для открытия затвора, нужно учесть только момент трения, поскольку результирующая сила давления в нашем случае проходит через ось вращения — точку $C$.

Момент трения $M_{\text{тр}} = N\,\frac{d}{2}\,f$, где $N$ — нормальная сила, в данном случае $N = P_\Sigma$. Тогда

$$M_{\text{н}} = M_{\text{тр}} = P_\Sigma\,\frac{d}{2}\,f = 31\,354 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}15 = 235{,}155 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Примечания. 1. В случае, если в резервуарах слева и справа будут находиться разнородные жидкости ($\rho_1 \neq \rho_2$) или если справа или слева от диска затвора давление будет равно атмосферному, то вектор суммарной силы давления $P_\Sigma$ не пройдет через точку $C$ (результирующая эпюра не будет прямоугольной). В этом случае появится так называемый гидравлический момент $M_г = P_\Sigma \Delta h$, тогда внешний момент, необходимый для открытия затвора, будет равен

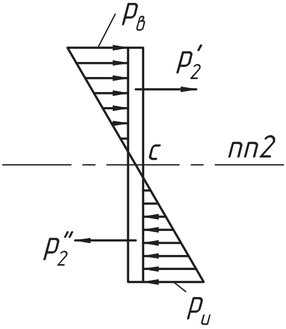



Рис. 3.5

$$M_н = M_г \pm M_{тр}.$$

2. Если изменить начальные условия так, чтобы пьезометрическая поверхность ПП2 пересекла ось затвора (точка $C$), то эпюра нагружения диска с правой стороны затвора силами давления будет иметь вид, показанный на рис. 3.5.

Участки эпюры с избыточным давлением $p_и$ и вакуумом $p_в$ соответствуют двум равным и противоположно направленным силам давления $P_2'$ и $P_2''$, результирующая которых равна нулю ($P_2 = 0$ при $p_{C2} = 0$), и воздействие на диск затвора справа сводится к действию пары сил. Суммарная сила давления на диск затвора будет тогда определяться только силой $P_1$: $P_\Sigma = P_1$.

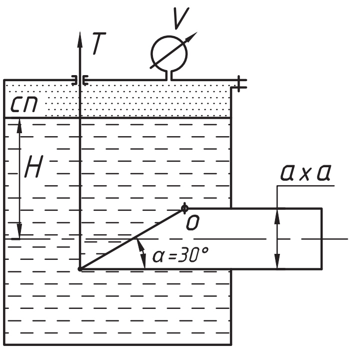



Рис. 3.6

**Задача 3.2.** Резервуар заполнен нефтью ($\rho = 900$ кг/м$^3$). В его боковине монтируется сливная труба с квадратным сечением $a \times a = 0{,}2 \times 0{,}2$ м (рис. 3.6). Определить силу натяжения троса $T$, необходимую для открытия крышки на входе в трубу, если заглубление осевой линии трубы $H = 7$ м, а давление над свободной поверхностью по вакуумметру $V$ равно $p_в = 45$ кПа. Весом крышки, трением в шарнире $O$ и в направляющих с узлом уплотнения пренебречь.

**Решение.** Сила давления жидкости на крышку (рис. 3.7)

$$P = p_C F = (-p_в + \rho g H)F = \rho g h_C F.$$

Заглубление центра тяжести $h_C$ площади $F$ относительно ПП определяем после нахождения $h_0 = \dfrac{V}{\rho g}$: $h_0 = \dfrac{45\,000}{900 \cdot 9{,}81} = 5{,}1$ м;

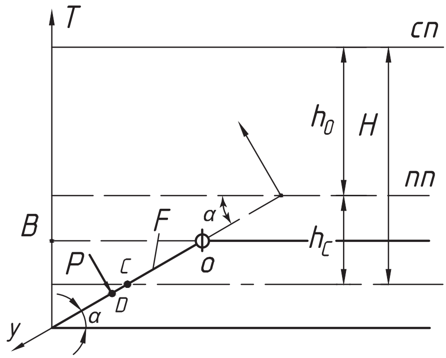



**Рис. 3.7**

$h_C = H - h_0 = 1{,}9$ м. Тогда

$$P = \rho g h_C F = 900 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}9 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{\sin\alpha} = 1342 \text{ Н}.$$

Вектор силы давления $P$ направлен по нормали к площади $F$ и проходит через центр давления (точка $D$). Смещение центра давления относительно центра тяжести:

$$CD = y_D - y_C = \frac{J_C}{y_C F}, \quad \text{где} \quad J_C = \frac{bh^3}{12} = \frac{a \cdot a^3}{12 \sin^3\alpha}.$$

После подстановки получим

$$CD = \frac{a^4}{12 \sin^3\alpha} \frac{\sin\alpha}{h_C} \frac{\sin\alpha}{a^2} = \frac{a^2}{12 \sin\alpha \cdot h_C} = \frac{0{,}04}{12 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}9} = 0{,}0035 \text{ м}.$$

Для определения искомой силы $T$ запишем уравнение моментов относительно точки $O$:

$$P \cdot OD - T \cdot OB = 0; \quad T = P \cdot \frac{OD}{OB};$$

где $OD = OC + CD$.

После подстановки получаем

$$OC = \frac{a/2}{\sin\alpha} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2 \text{ м}; \quad OD = 0{,}2035 \text{ м}; \quad OB = a \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$T = 1342 \cdot \frac{0{,}2035}{0{,}2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha} = 775 \text{ Н}.$$

**Задача 3.3.** Определить минимальную силу тяжести груза $G$, который при заливке формы чугуном нужно положить на верхний стержень, чтобы предотвратить его всплывание (рис. 3.8). Вес стержней с учетом веса чугуна в литнике и выпоре $G_1 = 50$ Н. Плотность жидкого чугуна $\rho = 7000$ кг/м$^3$. Размеры формы: $H = 200$ мм, $D = 140$ мм, $h = 80$ мм, $d = 120$ мм.

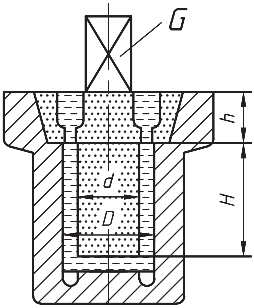



**Рис. 3.8**

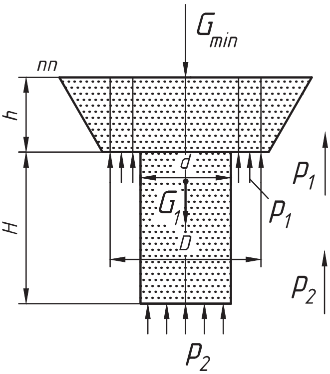



**Рис. 3.9**

**Решение.** Минимальную силу тяжести груза $G_{\min}$ находим из условия равновесия сил, действующих на стержни (рис. 3.9):

$$G_{\min} = P_1 + P_2 - G_1.$$

Сила давления $P_1$:

$$P_1 = p_1 \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \rho g h \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) =$$
$$= 7000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0052 = 22{,}42 \text{ Н}.$$

Сила давления $P_2$:

$$P_2 = p_2 \frac{\pi}{4} d^2 = \rho g(h + H) \frac{\pi}{4} d^2 =$$
$$= 7000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}28 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0144 = 217{,}35 \text{ Н}.$$

Следовательно,

$$G_{\min} = 22{,}42 + 217{,}35 - 50 = 189{,}77 \text{ Н}.$$

# 4. Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные стенки

Распределенная нагрузка, действующая на любую криволинейную поверхность от сил давления жидкости, направленных по нормали в каждой точке поверхности, может быть приведена к главному вектору сил и главному моменту сил. Главный вектор сил определяют по трем составляющим (обычно по вертикальной и двум взаимно перпендикулярным горизонтальным составляющим), главный момент сил — по сумме моментов этих составляющих.

Для криволинейных стенок, симметричных относительно вертикальной плоскости (как в большинстве практических задач), сумму элементарных сил давления приводят к одной равнодействующей силе, лежащей в плоскости симметрии, или к паре сил, лежащей в той же плоскости. Значение и направление равнодействующей силы $P_\Sigma$ опреляют по двум составляющим, обычно горизонтальной и вертикальной ($P_г$ и $P_в$), как показано на рис. 4.1. Горизонтальная составляющая силы давления, воспринимаемая криволинейной стенкой, равна силе давления *на вертикальную проекцию* этой стенки, направленной по нормали к плоскости симметрии, и определяется по формуле

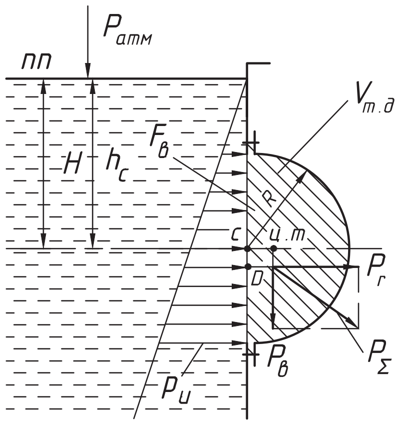



**Рис. 4.1**

$$P_г = \rho g h_C F_в,$$

где $h_C$ — расстояние по вертикали от центра тяжести $C$ вертикальной проекции стенки до пьезометрической поверхности ПП; $F_в$ — площадь вертикальной проекции стенки, $F_в = \pi R^2$.

Линия действия силы $P_г$, проходя через центр давления $D$ вертикальной проекции стенки, лежит в плоскости симметрии и смещена (вниз, если $h_C > 0$, или вверх, если $h_C < 0$) относительно центра тяжести $C$ вертикальной проекции на расстояние

$$\Delta h = \frac{J_C}{h_C F_в},$$

где $J_C$ — момент инерции площади вертикальной проекции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести проекции (аналогично рис. 3.1 и 3.2).

Определение вертикальной составляющей силы давления предлагается провести *графоаналитическим методом*. Суть этого метода заключается в том, что о силе давления, воспринимаемой криволинейной стенкой, можно судить по силе тяжести так называемого объема тела давления $V_{т.д}$, т. е.

$$P = \rho g V_{т.д} = G_{т.д},$$

где $V_{т.д}$ — объем, ограниченный следующими поверхностями: пьезометрической, самой поверхностью стенки и вертикальной проектирующей поверхностью, построенной на контуре стенки.

Примечание. Сила давления жидкости на стенку в любому заданном направлении $S$ может быть определена по формуле

$$P_S = \rho g V_{т.д S} \cos \alpha,$$

где $\alpha$ — угол между заданным направлением $S$ и вертикалью; объем $V_{т.д}$ ограничен проектирующей поверхностью, параллельной этому направлению.

Линия действия силы $P_в$ проходит через центр тяжести (ц. т.) объема $V_{т.д}$ и направлена вниз, если объем строится на смоченной стороне стенки ($P''_в$), и вверх ($P'_в$), если объем строится на несмоченной стороне стенки (рис. 4.2).

При определении вертикальной составляющей силы давления $P_в$ сначала определяют силу $P'_в$ для верхней части полусферы $AB$, построив объем $\underset{ABnm}{V_{т.д}}$, а затем силу $P''_в$ для нижней части полусферы $BC$, построив объем $\underset{BCmn}{V_{т.д}}$. Бóльшая из этих двух сил будет

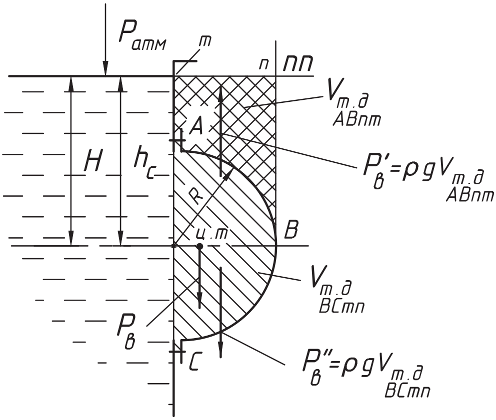



**Рис. 4.2**

определять направление суммарной силы $P_{\text{в}}$, а их разность — ее значение:

$$P_{\text{в}} = P''_{\text{в}} - P'_{\text{в}} = \rho g(\underset{BCmn}{V_{\text{т.д}}} - \underset{ABnm}{V_{\text{т.д}}}) = \rho g V_{\text{т.д}} = \rho g \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Полная сила давления на стенку представляет собой геометрическую сумму сил $P_{\text{г}}$ и $P_{\text{в}}$:

$$P_{\Sigma} = \sqrt{P_{\text{г}}^2 + P_{\text{в}}^2}.$$

Линия действия силы $P_{\Sigma}$ проходит через точку пересечения линий действия сил $P_{\text{г}}$ и $P_{\text{в}}$, а угол $\varphi$ наклона к горизонту определяют по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_{\text{в}}}{P_{\text{г}}}.$$

При избыточном давлении на смоченной стороне стенки все составляющие и полная сила давления жидкости направлены от жидкости к стенке, т. е. изнутри наружу (рассмотренный случай). При разрежении (вакууме) на смоченной стороне стенки силы направлены снаружи внутрь сосуда (рис. 4.3).

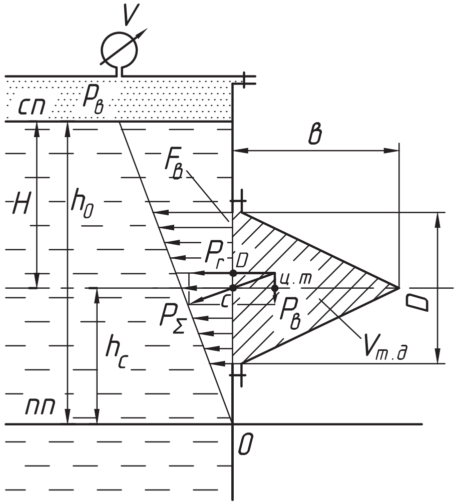



**Рис. 4.3**

Тогда

$$h_0 = \frac{p_в}{\rho g}; \qquad P_г = \rho g h_C F_в = \rho g (h_0 - H) \pi R^2;$$

$$P_в = \rho g V_{т.д} = \rho g V_{кон} = \rho g \frac{1}{3} \pi R^2 b; \qquad P_\Sigma = \sqrt{P_г^2 + P_в^2}.$$

При двухстороннем воздействии жидкостей на стенку сначала определяют горизонтальные и вертикальные составляющие с каждой стороны стенки в предположении одностороннего воздействия жидкости, а затем суммарные горизонтальную и вертикальную составляющие от воздействия обеих жидкостей.

Задачи по определению сил давления жидкости на криволинейные стенки можно решать и *методом сечений*, при котором рассматривают равновесие объема жидкости, заключенного между стенкой и плоским сечением, проведенным через ее граничный контур.

Например, как определить полную силу давления $P_\Sigma$ жидкости на полусферическую крышку (рис. 4.4)? Или какими будут отрывающая $P_y$ и сдвигающая $P_x$ силы, действующие на нее (без учета веса самой крышки)?

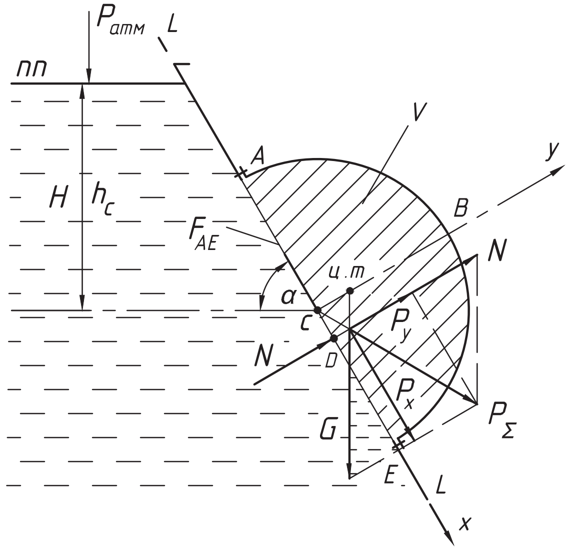



**Рис. 4.4**

Проведя плоскость $L–L$, рассмотрим условие равновесия объема жидкости, ограниченного поверхностью полусферы и этой плоскостью. Векторное уравнение этого условия имеет вид

$$\overline{N} + \overline{G} + \overline{R} = 0,$$

где $\overline{N}$ — сила давления жидкости на плоское сечение $AE$ ($N = \rho g h_C F_{AE}$ и проходит по нормали к сечению через центр давления $D$); $\overline{G}$ — вес выделенного объема жидкости ($G = \rho g V$); $\overline{R}$ — сила действия полусферической крышки на выделенный объем.

Поскольку искомая сила $\overline{P}_\Sigma$ равна по величине и противоположна по направлению силе $\overline{R}$, получаем уравнение

$$\overline{P}_\Sigma = \overline{N} + \overline{G},$$

из которого можно определить как саму силу $\overline{P}_\Sigma$, так и любую ее составляющую:

$$P_x = G \sin\alpha = \rho g \frac{2}{3} \pi R^3 \sin\alpha;$$

$$P_y = N - G\cos\alpha = \rho g \pi R^2 \left(h_C - \frac{2}{3} R \cos\alpha\right); \quad P_\Sigma = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

**Задача 4.1.** Определить полную силу давления воды на полусферическую крышку цилиндрического сосуда радиусом $R = 0{,}2$ м, если манометр $M$ показывает давление $p_{\text{и}} = 50$ кПа. Ось сосуда расположена: а) вертикально; б) горизонтально (рис. 4.5).

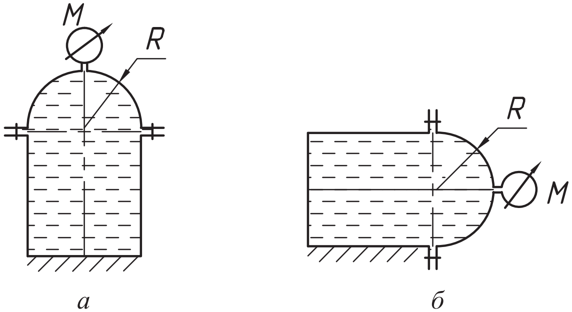



**Рис. 4.5**

**Решение.** В случае решения этой задачи графоаналитическим способом (рис. 4.6) первое, что нужно определить, — это положение пьезометрической поверхности ПП:

$$h_0 = \frac{p_{\text{и}}}{\rho g} = \frac{50\,000}{1000 \cdot 9{,}81} = 5{,}1 \text{ м.}$$

а) Для определения полной силы давления $P_\Sigma$ жидкости на полусферу необходимо определить только вертикальную составляю-

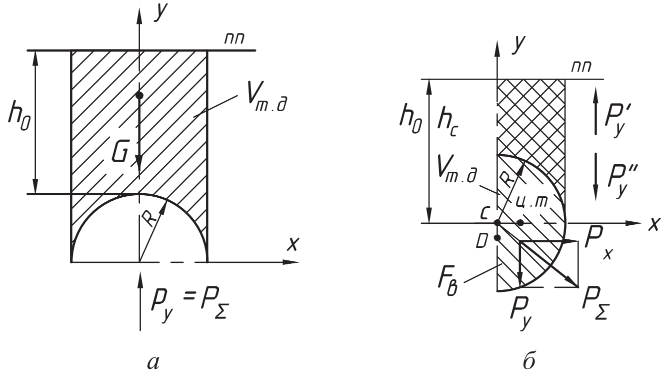



**Рис. 4.6**

щую $P_y$. Так как $P_x = 0$ в силу симметрии нагружения силами давления,

$$P_\Sigma = P_y = \rho g V_{\text{т.д}} = \rho g\left(\pi R^2(h_0 + R) - \frac{2}{3}\pi R^3\right) =$$
$$= 1000 \cdot 9{,}81\left(\pi \cdot 0{,}04 \cdot 5{,}3 - \frac{2}{3}\pi \cdot 0{,}008\right) = 6367 \text{ Н}.$$

б) В этом случае необходимо определить и горизонтальную $P_x$, и вертикальную $P_y$ составляющие сил давления (отрывающую и срезающую силы, нагружающие болтовую группу крышки):

$$P_x = p_C F_{\text{В}} = M F_{\text{в}} = \rho g h_C \pi R^2 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}1 \cdot \pi \cdot 0{,}04 = 6284 \text{ Н};$$

$$P_y = P_y'' - P_y' = \rho g V_{\text{т.д}} = \rho g \frac{2}{3}\pi R^3 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot 0{,}008 = 164 \text{ Н};$$

$$P_\Sigma = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}; \quad P_\Sigma = 6{,}286 \text{ кН}.$$

**Задача 4.2.** В днище замкнутого резервуара (рис. 4.7) с бензином ($\delta = 0{,}7$) сделано отверстие радиусом $R = 1$ м, которое снаружи закрывает полусферическая крышка. Определить полную силу давления на эту крышку, если показание вакуумметра $V$ равно 200 мм рт. ст., а заглубление центра отверстия под свободную поверхность жидкости $H = 2$ м. Весом крышки пренебречь.

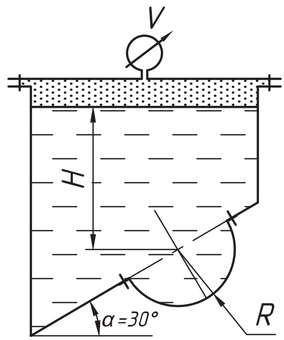


**Рис. 4.7**

**Решение.** Определение полной силы давления на полусферу может быть сделано графоаналитически с построением соответствующих объемов тела давления (рис. 4.8) аналогично решению задачи 4.1. Положение пьезометрической поверхности определяется расстоянием $h_0$:

$$h_0 = \frac{p_{\text{в}}}{\rho g} = \frac{\rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}}}{\rho g} = \frac{13\,600 \cdot 0{,}2}{700} = 3{,}88 \text{ м}.$$

Однако эту задачу предлагается решить *методом сечений*. Условие равновесия объема жидкости, заключенного между полусфери-

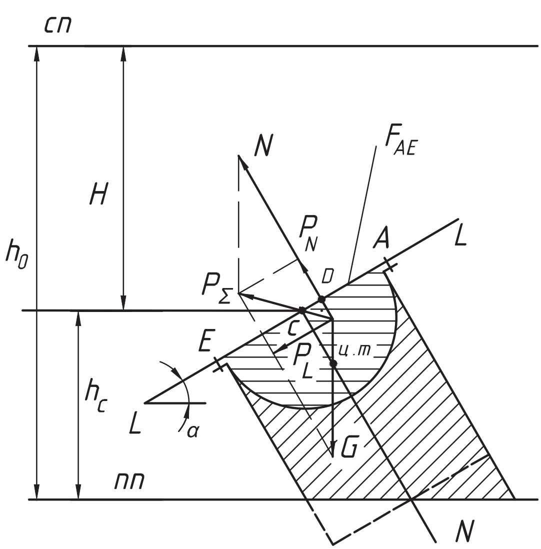



**Рис. 4.8**

ческой крышкой и плоским сечением $L$–$L$:

$$\overline{P} = \overline{N} + \overline{G}.$$

Сила давления жидкости на плоское сечение $AE$

$$N = p_C F_{AE} = (-p_{\text{в}} + \rho g H)\pi R^2 = (-\rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} + \rho g H)\pi R^2 =$$
$$= (-13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2 + 700 \cdot 9{,}81 \cdot 2)\pi \cdot 1 = -40\,660 \text{ Н}.$$

Вес выделенного объема

$$G = \rho g V_{\text{п/сф}} = \rho g \frac{2}{3} \pi R^3 = 700 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 1 = 14\,375 \text{ Н}.$$

Проецируя найденные силы на направления $N$ и $L$, получаем составляющие полной силы давления:

$$P_N = N - G \cos \alpha = 40\,660 - 14\,375 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 28\,226 \text{ Н};$$
$$P_L = G \sin \alpha = 14\,375 \cdot 0{,}5 = 7187 \text{ Н}.$$

Полная сила

$$P_\Sigma = \sqrt{P_N^2 + P_L^2}; \quad P_\Sigma = 29{,}13 \text{ кН}.$$

**Задача 4.3.** Цилиндрический затвор диаметром $D = 3$ м и длиной $L = 6$ м может подниматься по опорной стенке, наклоненной под углом $\alpha = 60°$ (рис. 4.9). Определить минимально допустимый собственный вес $G$ затвора при указанном уровне воды, обеспечивающий прилегание его к гребню плотины.

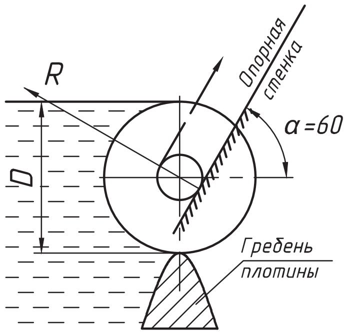



**Рис. 4.9**

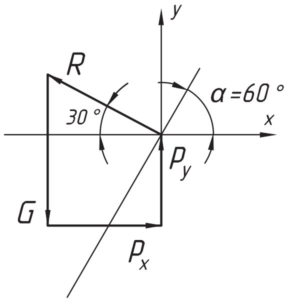



**Рис. 4.10**

**Решение.** Для определения минимального веса $G$ затвора необходимо учесть силу давления жидкости на затвор, определив $P_y$ и $P_x$ — вертикальную и горизонтальную ее составляющие, а также реакцию в опоре $R$ (рис. 4.10). Тогда

$$G = P_y + R \sin 30° = P_y + P_x \operatorname{tg} 30°;$$

$$P_y = \rho g V_{\text{т.д}} = \rho g \frac{\pi D^2}{8} L = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 9 \cdot 6 = 207\,923 \text{ Н};$$

$$P_x = p_C F_{\text{в}} = \rho g \frac{D}{2} DL = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 \cdot 3 \cdot 6 = 264\,870 \text{ Н};$$

$$\operatorname{tg} 30° \approx 0{,}578;$$

$$G = 207\,923 + 264\,870 \cdot 0{,}578 = 361{,}018 \text{ кН}.$$

**Задача 4.4.** Полый барабан диаметром $D = 250$ мм и длиной $l = 1$ м отформован и залит чугуном ($\rho = 7000$ кг/м$^3$). Для получения внутреннего отверстия в форму заложен цилиндрический стержень (относительная плотность $\delta = 2{,}5$) диаметром $d = 80$ мм и длиной $L = 1{,}2$ м. Уровень чугуна в литнике расположен на высоте

$H = 0{,}5$ м над осью формы. Определить вертикальную силу, которая стремится поднять верхнюю опоку при заливке формы. Влиянием литников на исходную силу пренебречь (рис. 4.11).

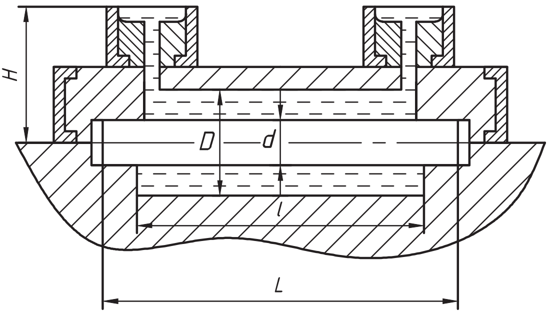



**Рис. 4.11**

**Решение.** Для определения вертикальной силы $P_{в}$ (рис. 4.12), которая стремится поднять опоку при заливке формы чугуном, нужно учесть действие трех сил — $P'$, $P''$ и $G$.

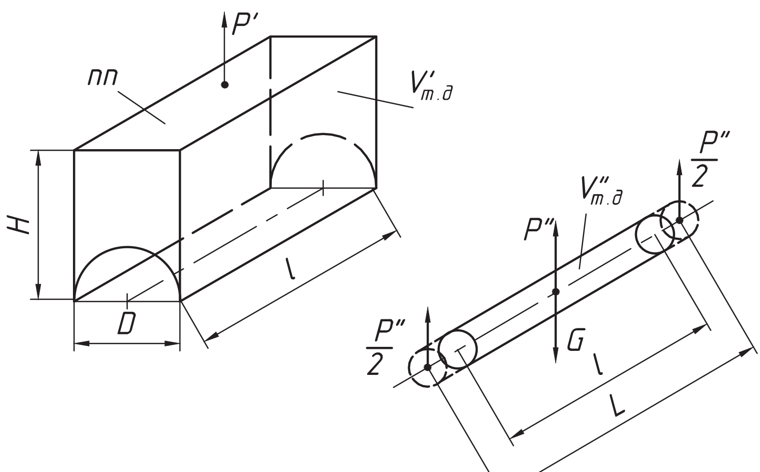



**Рис. 4.12**

Силы действия жидкого чугуна непосредственно на опоку $P'$ и на стержень $P''$:

$$P' = \rho g V'_{\text{т.д}} = \rho g \left( HDl - \frac{\pi D^2}{8}\, l \right) =$$
$$= 7000 \cdot 9{,}81 \left( 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 1 - \frac{\pi}{8} \cdot 0{,}0625 \cdot 1 \right) = 6867 \text{ Н};$$
$$P'' = \rho g V''_{\text{т.д}} = \rho g \frac{\pi}{4}\, d^2 l = 7000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0064 \cdot 1 = 345 \text{ Н}.$$

Вес стержня

$$G = \rho_{\text{ст}} g \frac{\pi}{4}\, d^2 L = 2500 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0064 \cdot 1{,}2 = 148 \text{ Н},$$

тогда

$$P_{\text{в}} = P' + P'' - G = 6867 + 345 - 148 = 7064 = 7{,}064 \text{ кН}.$$

# 5. Равновесие жидкости в движущихся сосудах (относительный покой жидкости)

При равновесии в движущемся сосуде жидкость, заполняющая сосуд, движется вместе с ним как твердое тело. Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$dp = \rho(q_x\,dx + q_y\,dy + q_z\,dz),$$

где $x$, $y$, $z$ — координаты точек жидкости в системе отсчета, связанной с сосудом; $p = p(x, y, z)$ — давление в жидкости; $\rho$ — плотность жидкости; $q_x$, $q_y$, $q_z$ — проекции единичной массовой силы $\overline{q}$ на координатные оси.

Вектор $\overline{q}$ единичной массовой силы определяется соотношением

$$\overline{q} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\overline{Q}}{\Delta M},$$

где $\Delta\overline{Q}$ — суммарная массовая сила, действующая на рассматриваемую частицу жидкости; $\Delta M$ — масса элементарной частицы жидкости, $\Delta M = \rho\Delta V$.

При движении сосуда в поле сил тяжести вектор $\overline{q}$ единичной массовой силы в каждой точке жидкости представляет собой сумму единичной силы веса $\overline{g}$ и единичной силы инерции $\overline{j}$ переносного движения:

$$\overline{q} = \overline{g} + \overline{j}; \qquad \overline{j} = -\overline{a};$$

где $\overline{a}$ — переносное ускорение в данной точке жидкости.

Давление в жидкости изменяется по всем направлениям, кроме тех, которые перпендикулярны вектору $\overline{q}$ единичной массовой силы. Поверхности уровня (поверхности равного давления $p = \mathrm{const}$) в каждой точке перпендикулярны направлению вектора $\overline{q}$. Дифференциальное уравнение поверхностей уровня (в частности, свободной поверхности (СП) жидкости и поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей) имеет вид

$$q_x\,dx + q_y\,dy + q_z\,dz = 0.$$

## 5.1. Равновесие жидкости в сосуде, движущемся прямолинейно с постоянным ускорением

Поле массовой силы представляет собой семейство одинаковых по модулю и направлению векторов $\overline{q}$ (рис. 5.1). Уравнение поверхности уровня, в том числе СП, проходящей через точку $x_0$, $z_0$, имеет вид

$$z - z_0 = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}(x - x_0).$$

Все поверхности равного давления ($p = \text{const}$) наклонены к горизонту под углом $\beta$:

$$\text{tg}\, \beta = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}.$$

Закон распределения давления выражается уравнением

$$p = p_0 - \rho a \cos \alpha(x - x_0) - \rho(g + a \sin \alpha)(z - z_0),$$

где $p_0$ — давление в точке с координатами ($x_0$, $z_0$); $p$ — давление в произвольной точке жидкости с координатами ($x$, $z$).

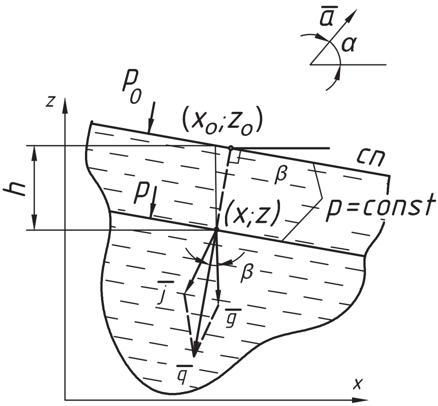



**Рис. 5.1**

Если точка с координатами ($x_0$, $z_0$) расположена на СП жидкости в открытом сосуде, то $p_0 = p_{\text{атм}}$.

Из приведенного выше уравнения следует линейность закона изменения давления в жидкости по любому направлению. Например, в любой точке, находящейся на глубине $h$ (по вертикали) под поверхностью уровня, имеющего давление $p_0$, давление можно найти по выражению

$$p = p_0 + \rho(g + a \sin \alpha)h.$$

Для замкнутых сосудов с избыточным давлением ($p_0 > p_{атм}$) или вакуумом ($p_0 < p_{атм}$) над СП можно отсчитывать заглубление $h_q$ любой точки от пьезометрической поверхности (ПП) вдоль вектора $\overline{q}$. Тогда избыточное давление $p_и$ можно определить по формуле

$$p_и = \rho q h_q.$$

Силы давления жидкости на стенки в рассматриваемом случае равновесия благодаря однородности поля массовых сил определяются зависимостями, аналогичными тем, которые используются в случае равновесия жидкости в поле силы тяжести (см. разд. 3 и 4). Особенностью в этом случае является учет величины и направления вектора $\overline{q}$ единичной массовой силы.

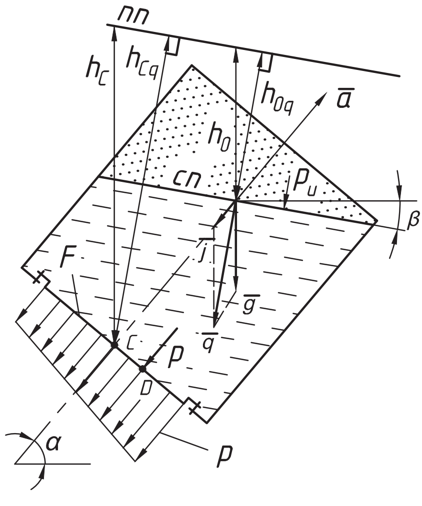



**Рис. 5.2**

Силу давления, воспринимаемую плоской стенкой, на несмоченной стороне которой давление равно атмосферному (рис. 5.2), вычисляют по формуле

$$P = p_C F,$$

где $F$ — площадь стенки; $p_C$ — избыточное давление в центре тяжести $C$ стенки, определяемое по формулам, приведенным выше (нахождение или $h$, или $h_q$).

Расстояние между СП и ПП определяется избыточным давлением $p_и$, плотностью жидкости $\rho$ и величиной $\overline{q}$.

Сила давления $P$ направлена по нормали к стенке и проходит через центр давления $D$, положение которого для данной стенки зависит от модуля и направления вектора $\overline{a}$ переносного ускорения. Смещение центра давления $D$ относительно центра тяжести $C$ определяют по приведенной в разд. 3 формуле

$$\Delta h = h_D - h_C = \frac{J_C}{h_C F}.$$

Силу давления жидкости на криволинейную стенку вычисляют суммированием составляющих по двум взаимно перпендикулярным направлениям (см. разд. 4). Например, для определения составляющих сил давления на полусферическую крышку (рис. 5.3) $P_x$ и $P_y$ (при решении графоаналитическим способом) необходимо построить и определить соответствующие объемы тела давления $V_{\text{т.д}x}$ и $V_{\text{т.д}y}$. Для этого предварительно находят положение ПП по найденному заглублению $h_0$ или $h_{0q}$. Тогда силу давления $P_x$ определяют по формуле

$$P_x = \rho q V_{\text{т.д}x} \sin\gamma.$$

Линия действия этой силы проходит через центр тяжести указанного объема, т. е. через центр тяжести полусферы.

Сила давления $P_y$:

$$P_y = \rho q V_{\text{т.д}y} \cos\gamma.$$

Линия действия этой силы проходит через центр тяжести объема $V_{\text{т.д}y}$. План сил с указанием углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, необходимых для расчетов, показан на рис. 5.4.

Суммарная сила давления $P_\Sigma$ жидкости на полусферическую крышку в этом случае равна

$$P_\Sigma = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

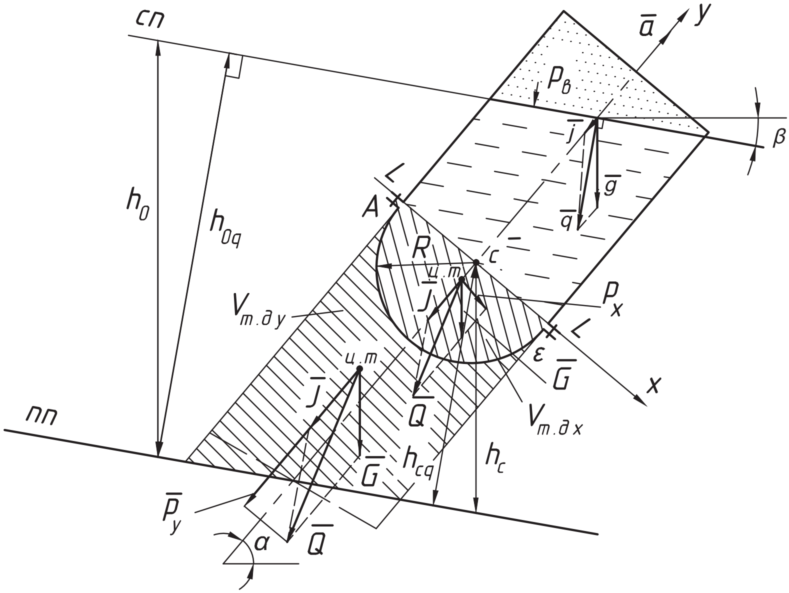

сп
пп
$\bar{a}$
y
$p_в$
β
$\bar{j}$
$\bar{g}$
$\bar{q}$
L
A
R
c
ц.т
$\bar{J}$
$P_x$
$h_0$
$h_{0q}$
$V_{т.д\,y}$
ε
$\bar{G}$
x
$Q$
$V_{т.д\,x}$
$h_{cq}$
$h_c$
$\bar{P}_y$
α
$\bar{Q}$

**Рис. 5.3**

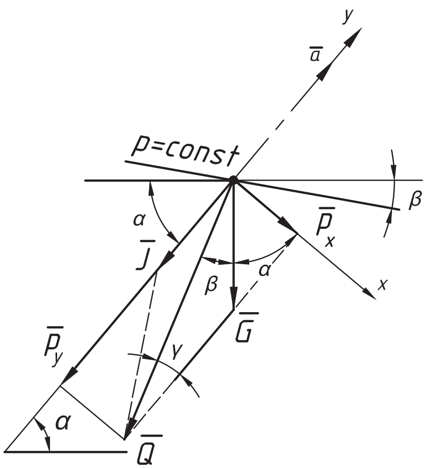

y
$\bar{a}$
p=const
β
α
$\bar{J}$
$\bar{P}_x$
x
$\bar{G}$
$\bar{P}_y$
γ
$\bar{Q}$

**Рис. 5.4**

Силу давления $P_\Sigma$ можно определить также методом сечений (см. разд. 4), рассматривая условие относительного равновесия объема $V$ жидкости, заключенного между криволинейной стенкой и плоским сечением $L$–$L$, проведенным через граничный контур стенки (рис. 5.5). Это условие выражается векторным уравнением

$$\overline{P} = \overline{N} + \overline{G} + \overline{J} = \overline{N} + \overline{Q},$$

где $\overline{N}$ — сила давления на плоское сечение $AE$, проведенное через граничный контур стенки, $N = p_{CB} F_{AE}$; $\overline{G}$ — вес объема $V$ жидкости, $G = \rho g V$; $\overline{J}$ — сила инерции жидкости, заключенной в объеме $V$, $J = \rho a V$; $\overline{Q}$ — суммарная массовая сила, равная $\overline{Q} = \overline{G} + \overline{J}$ и определяемая по формуле $Q = \rho q V$.

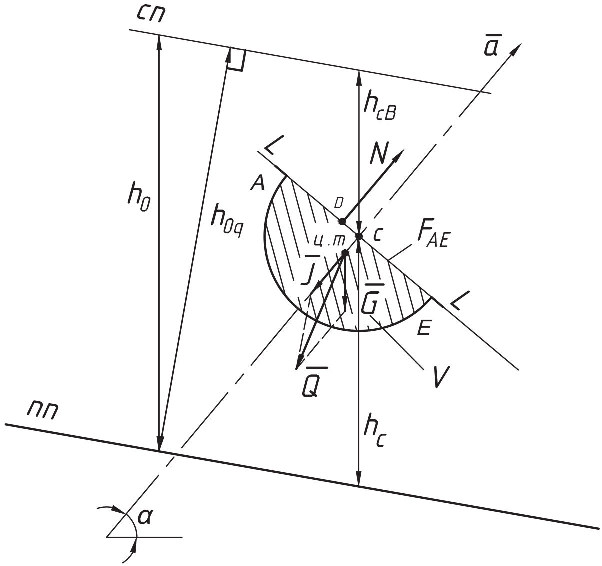



**Рис. 5.5**

**Задача 5.1.** По условиям технологического процесса открытый цилиндрический сосуд диаметром $D = 200$ мм с жидкостью должен сходить с ленты транспортера на неподвижный стол (рис. 5.6). Определить высоту $h$ недолива жидкости, при котором будет гарантирован безопасный сход сосуда на стол с сохранением содержащегося в нем объема жидкости. Коэффициент трения сосуда о стол $f = 0{,}2$.

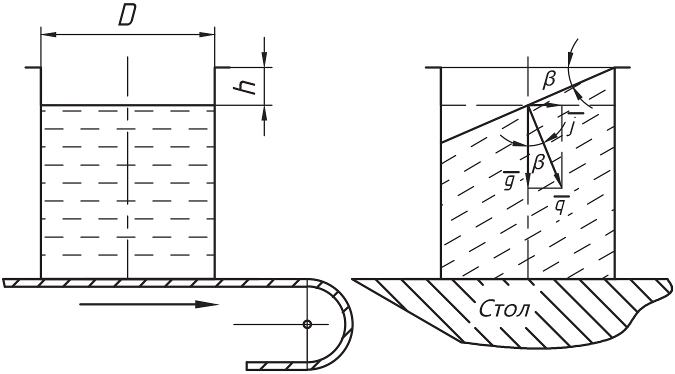



**Рис. 5.6**

**Решение.** В момент схода сосуда на неподвижный стол происходит процесс затормаживания с отрицательным ускорением. Задача по определению высоты $h$ недолива сводится к нахождению угла наклона свободной поверхности жидкости, когда последняя коснется верхнего края сосуда.

Значение и направление суммарной единичной массовой силы $q$ (вектор $\overline{q}$ перпендикулярен СП) определяется единичной силой веса $g$ и единичной силой инерции $j$: $\operatorname{tg}\beta = j/g$. Поскольку ускорение $j = \dfrac{F_{\text{тр}}}{m} = \dfrac{mgf}{m} = gf$, то $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{gf}{g} = f$. Искомое значение $h$:

$$h = \frac{D}{2}\ \operatorname{tg}\beta = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 \text{ м} = 20 \text{ мм}.$$

**Задача 5.2.** Цилиндрический сосуд диаметром $D = 0{,}5$ м и длиной $L = 2$ м (рис. 5.7), имеющий коническую крышку высотой $b = 0{,}5$ м и плоское дно, заполнен жидкостью ($\delta = 0{,}85$) и движется под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту с постоянным ускорением $a = 30$ м/с$^2$. Показание манометра $M$ равно 140 кПа. Определить: а) давление $p_A$ жидкости в точке $A$; б) силы $P_B$ и $P_C$, нагружающие болтовую группу $B$ и $C$.

**Решение.** а) Определяем величину и направление единичной массовой силы $q$ (рис. 5.8). Из рассмотрения прямоугольного тре-

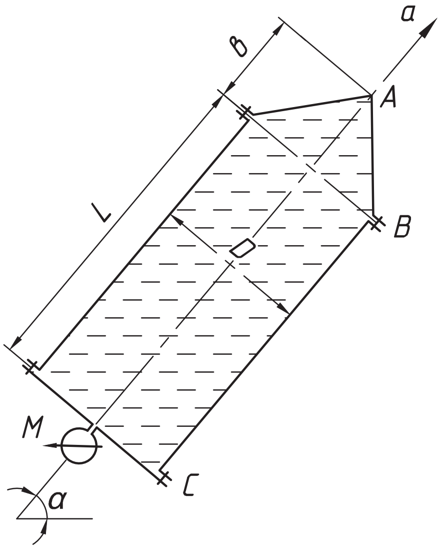



**Рис. 5.7**

угольника $MON$ имеем

$$ON = g\cos\alpha = 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6{,}94 \text{ м/с}^2;$$

$$MN = j + g\sin\alpha = 30 + 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36{,}94 \text{ м/с}^2;$$

$$q = \sqrt{6{,}94^2 + 36{,}94^2} = 37{,}58 \text{ м/с}^2;$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{g\cos\alpha}{j + g\sin\alpha} = \frac{6{,}94}{36{,}94} = 0{,}1879;$$

$$\gamma = 10^\circ 42'.$$

Положение ПП находим после определения $h_0$:

$$h_0 = \frac{p_{\text{и}}}{\rho q} = \frac{140\,000}{850 \cdot 37{,}58} = 4{,}38 \text{ м}.$$

Давление в любой точке жидкости в сосуде (в том числе в точке $A$) определяется заглублением этой точки под ПП. Так,

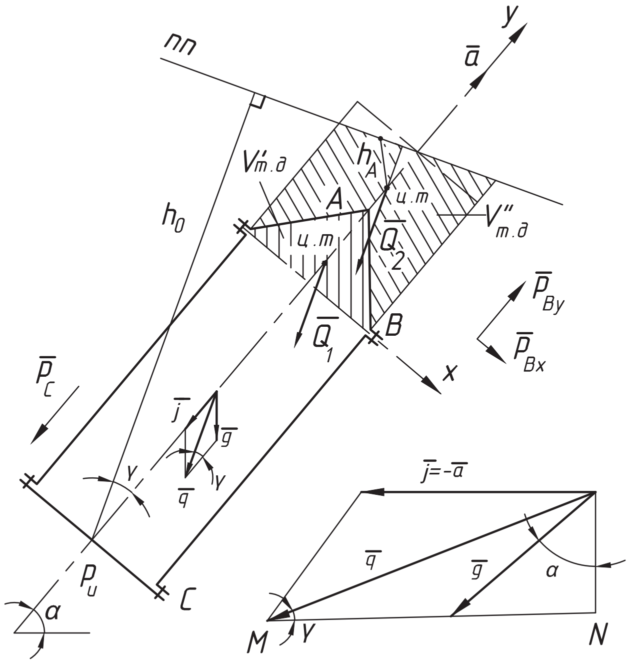



**Рис. 5.8**

для точки $A$

$$p_{иA} = \rho q h_A.$$

Расстояние $h_A = 1{,}92$ м получаем из рассмотрения двух подобных прямоугольных треугольников с катетами $h_0$ и $h_A$. Тогда

$$p_{иA} = 850 \cdot 37{,}58 \cdot 1{,}92 = 61\,331 \text{ Па}.$$

б) Сила в болтовой группе $C$ определяется силой давления на нижнюю плоскую крышку:

$$P_C = p_и \frac{\pi}{4} D^2 = 140\,000 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}25 = 27\,475 \text{ Н} = 27{,}475 \text{ кН}.$$

Болтовая группа $B$ подвергается действию отрывающих $P_{By}$ и срезающих $P_{Bx}$ сил, обусловленных избыточным давлением жидкости на коническую поверхность верхней крышки. Для определения этих слагаемых полной силы давления на крышку графоаналитическим способом необходимо найти объемы $V'_{т.д}$ и $V''_{т.д}$.

Тогда

$$P_{Bx} = \rho q V'_{\text{т.д}} \sin\gamma = 850 \cdot 37{,}58 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1857 = 776\ \text{Н};$$

$$P_{By} = \rho q V''_{\text{т.д}} \cos\gamma = 850 \cdot 37{,}58 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}25\left(2{,}46 - \frac{0{,}5}{3}\right) \cdot 0{,}9826 = \\ = 56\,423\ \text{Н} = 56{,}423\ \text{кН}.$$

Примечание. Силы в болтовой группе $B$ могут быть определены также методом сечений. Рассматривая условие относительного равновесия объема $V$ жидкости (рис. 5.9), получим

$$P_{Bx} = G\cos\alpha; \quad P_{By} = N - J - G\sin\alpha.$$

Силы, входящие в эти уравнения: сила инерции жидкости в объеме $V$(объем конуса) $J = \rho a V$; вес объема $V$ жидкости $G = \rho g V$; сила давления на плоское сечение $BE$ $N = p_{\text{и}C} F_{BE}$; $p_{\text{и}C} = p_{\text{и}} - \rho(g + a\sin\alpha)h_C$, где $h_C$ — расстояние от места подсоединения манометра $M$ с давлением $p_{\text{и}}$ до центра сечения $BE$.

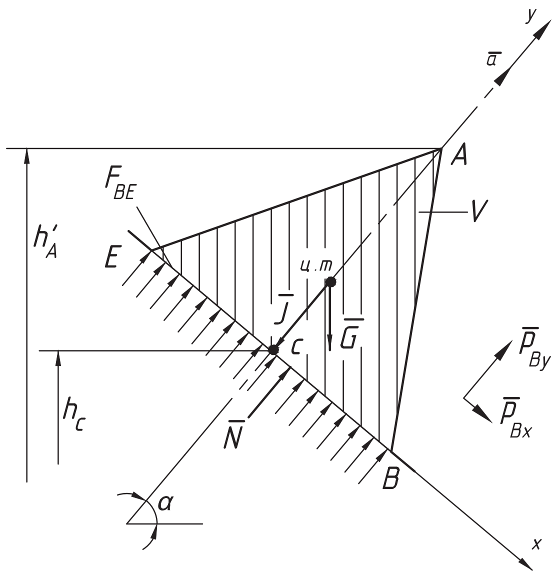



**Рис. 5.9**

Без построения ПП можно также найти избыточное давление и в точке $A$:

$$p_{\text{и}A} = p_{\text{и}} - \rho(g + a\sin\alpha)h'_A.$$

## 5.2. Равновесие жидкости в сосуде, равномерно вращающемся относительно вертикальной оси

Элементарные частицы жидкости, вращающиеся вместе с сосудом с постоянной угловой скоростью $\omega$, находятся в сложном силовом поле. Вектор $\overline{q}$ единичной массовой силы представляет собой сумму вектора $\overline{g}$ и вектора $\overline{j} = \omega^2 r$ центробежной силы инерции. Поверхности равного давления представляют собой конгруэнтные параболоиды вращения, ось которых совпадает с осью вращения сосуда (рис. 5.10). Закон распределения давления в жидкости для этого случая выражается уравнением

$$p = p_0 - \rho g(z - z_0) + \rho\,\frac{\omega^2}{2}\,(r^2 - r_0^2),$$

где $p_0$ — давление в точках параболоида на СП, вертикальная координата вершины которого равна $z_0$; $p$ — давление в произвольной точке жидкости с координатами $r$ и $z$ (на рис. 5.10 это точка $A$).

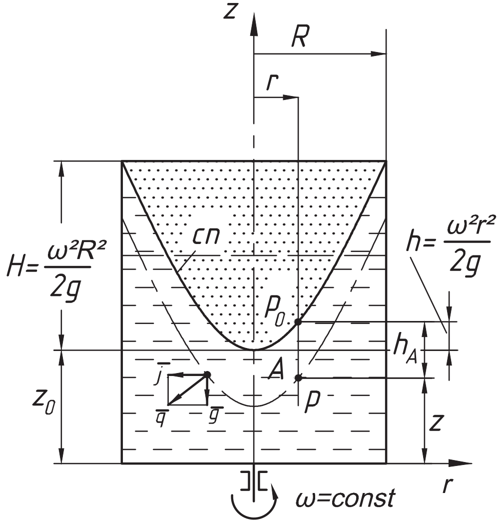



**Рис. 5.10**

Из приведенного выше закона следует *линейность распределения давления в жидкости по вертикальному направлению*. В частности, давление в точке $A$ на глубине $h_A$ под СП с давлением $p_0$:

$$p = p_0 + \rho g h_A.$$

Из этого же закона следует *параболический закон распределения давления по горизонтальному направлению*.

Положение СП жидкости в сосуде (координата $z_0$ вершины параболоида) при заданной его угловой скорости определяется объемом находящейся в нем жидкости. При этом используются следующие расчетные формулы:

$H = \dfrac{\omega^2 R^2}{2g}$ — высота параболоида вращения;

$V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 H$ — объем параболоида вращения.

При решении ряда задач необходимо помнить свойство параболоида вращения: параболоид вращения, построенный в цилиндре, делит объем последнего на две равные части.

Примечание. В случае, когда СП (или ПП при открытом сосуде) пересекает дно сосуда, объем жидкости во вращающемся цилиндрическом

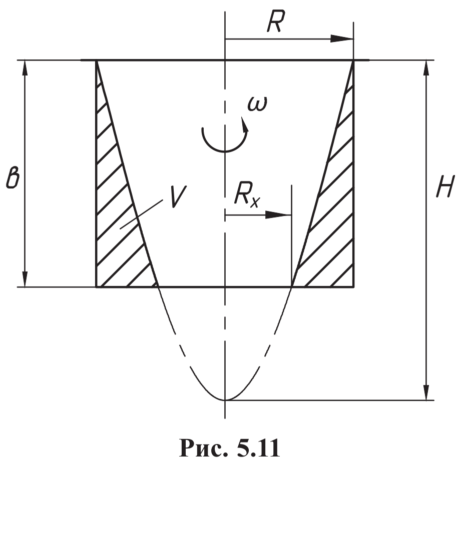



**Рис. 5.11**

сосуде (рис. 5.11) определяют по выражению

$$V = \pi(R^2 - R_x^2)\,\frac{b}{2} = \frac{\pi g}{\omega^2}\,b^2.$$

Когда СП отсутствует, положение ПП находят из условия, что она проходит через точку жидкости, давление в которой равно атмосферному. В каждой задаче имеются граничные условия для этого определения.

При аналитическом определении сил давления жидкости на стенки (плоские и криволинейные) в рассматриваемом случае равновесия жидкости необходимо получить функцию, выражающую закон распределения давления по заданной поверхности, и произвести операцию интегрирования этой функции по площади стенки. Рассмотренный ранее графоаналитический способ определения сил давления жидкости на стенки (см. разд. 4) удобен и в этом случае, если находят вертикальную силу давления на стенки вдоль оси вращения сосуда, так как инерционные силы не проецируются на это направление:

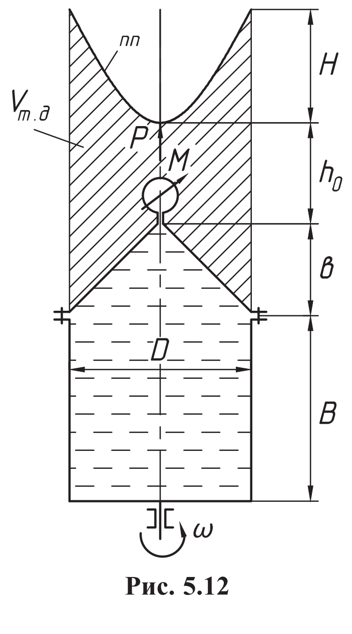



**Рис. 5.12**

$$P_z = \rho g V_z,$$

где $V_z$ — объем тела давления, построенного образующими, параллельными направлению $z$, между стенкой и ПП.

**Задача 5.3.** Цилиндрический сосуд диаметром $D = 1$ м высотой $B = 1$ м (рис. 5.12), закрытый конической крышкой высотой $b = 0{,}5$ м, вращается вокруг своей вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Сосуд предварительно заполнен жидкостью, имеющей плотность $\rho = 800$ кг/м$^3$. Давление в верхней точке крышки сосуда по манометру $M$ равно 10 кПа. Найти максимально возможное давление жидкости в сосуде $p_{\max}$.

Какова при этом будет сила $P$, растягивающая болтовую группу крышки? Весом крышки пренебречь.

**Решение**. При решении задачи графоаналитическим способом необходимо определить положение ПП. Вершину параболоида вращения этой поверхности определяют после нахождения $h_0$:

$$h_0 = \frac{p_{\text{и}}}{\rho g} = \frac{10\,000}{800 \cdot 9{,}81} = 1{,}27 \text{ м.}$$

Максимальным давление жидкости будет в точках дна сосуда, расположенных на окружности радиусом $R$, так как они имеют наибольшее заглубление под ПП, равное $h = H + h_0 + b + B$.

При $H = \dfrac{\omega^2 R^2}{2g} = \dfrac{100 \cdot 0{,}25}{19{,}62} = 1{,}27$ м и $h = 4{,}04$ м

$$p_{\max} = \rho g h = 800 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}04 = 31\,706 \text{ Па} = 31{,}706 \text{ кПа.}$$

Сила, растягивающая болтовую группу крышки, обусловлена давлением жидкости на коническую поверхность крышки:

$$\begin{aligned} P = \rho g V_{\text{т.д}} &= \rho g (V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}} + V_{\text{пар}}) = \\ &= \rho g \left[\pi R^2 (b + h_0) - \frac{1}{3}\pi R^2 b + \frac{1}{2}\pi R^2 H\right] = \\ &= \rho g \pi R^2 \left(b + h_0 - \frac{b}{3} + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) = \\ &= 800 \cdot 9{,}81 \cdot \pi \cdot 0{,}25 \cdot 3{,}96 = 24\,371 \text{ Н} = 24{,}371 \text{ кН.} \end{aligned}$$

**Задача 5.4.** Цилиндрический сосуд диаметром $D = 1{,}4$ м (рис. 5.13), заполненный водой, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Давление в центре крышки сосуда по вакуумметру $V$ равно 3 кПа. Определить силу, действующую на крышку.

**Решение.** При аналитическом способе решения задачи воспользуемся общим законом распределения давления:

$$p = p_0 - \rho g (z - z_0) + \rho \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_0^2).$$

Принимая $p_0 = 0$, закон распределения избыточного давления в жидкости, заполняющей сосуд, можно записать в виде

$$p_и = -\rho g(z - z_0) + \rho\,\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Неизвестную высоту $z_0$ вершины параболоида ПП находим, используя граничные условия при выборе начала координат в центре крышки: $p_и = -p_C$ при $r = 0$, $z = 0$, где $p_C$ — показание вакуумметра $V$. Подстановка этого условия в последнее уравнение приводит к следующему выражению:

$$-p_C = \rho g z_0 \quad \text{или} \quad p_в = -\rho g z_0.$$

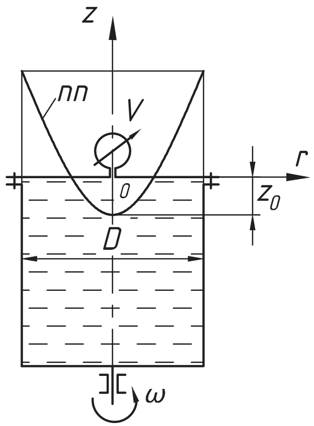



**Рис. 5.13**

Наличие вакуума в центре крышки означает, что вершина параболоида вращения, соответствующего ПП, имеет отрицательную ординату $z_0$, равную

$$z_0 = \frac{p_в}{\rho g} = \frac{3000}{1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Следовательно, искомый закон распределения избыточного давления

$$p_и = -\rho g(z + 0{,}3) + \rho\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Для точек на внутренней поверхности крышки (при $z = 0$) это выражение принимает вид

$$p_и = \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} - 0{,}3\rho g.$$

Силу давления на крышку $P$ найдем аналитически, суммируя элементарные силы избыточного давления $dP$. Разбивая поверхность крышки на элементарные кольцевые площадки $(2\pi r\,dr)$ и используя формулу для избыточного давления на крышке, получаем:

$$dP = p_и \cdot 2\pi r\,dr = 2\pi\left(\rho\frac{\omega^2 r^2}{2} - 0{,}3\rho g\right) r\,dr;$$

$$P = \int_0^R (\pi\rho\omega^2 r^3 - 2\pi\rho g \cdot 0{,}3r)\,dr = \int_0^R (314\,000r^3 - 18\,482r)\,dr =$$

$$= \frac{1}{4}R^4 \cdot 314\,000 - \frac{1}{2}R^2 \cdot 18\,482 = 14\,312 \text{ Н} = 14{,}312 \text{ кН}.$$

Примечание. При возрастании угловой скорости ω вращения сосуда абсолютное давление в центральной части под крышкой будет уменьшаться. Вакуумметр $V$ будет фиксировать увеличение вакуума. Когда абсолютное давление в точке $O$ упадет до давления насыщенных паров жидкости $p_{\text{н.п}}$, при определенной температуре произойдет разрыв ее сплошности и, как следствие, нарушится равновесие жидкости в сосуде. Это случится при вакууме $p_{\text{в}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{н.п}}$.

**Задача 5.5.** При отливке цилиндрической полой заготовки во вращающейся относительно вертикальной оси форме (рис. 5.14) в результате действия силы тяжести нижний внутренний радиус $R_1$ будет меньше верхнего внутреннего радиуса $R_2$. Определить их разность $\Delta R$, если высота отливки $H = 0{,}5$ м, частота вращения формы $n = 1911$ об/мин, ее диаметр $D = 200$ мм и она в начальный момент заполнена жидким расплавом на 30 % своего объема.

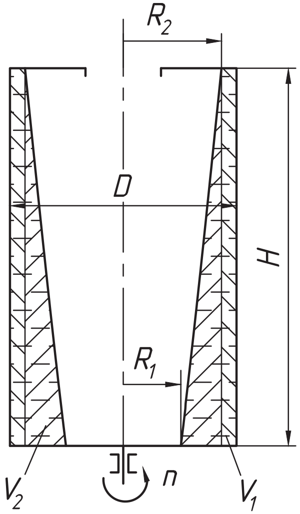



**Рис. 5.14**

**Решение**. Угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1911}{30} = 200 \text{ рад/с}.$$

Объем жидкого расплава в сосуде

$$V = 0{,}3 \cdot \frac{\pi D^2}{4} H = \frac{0{,}3 \cdot \pi \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}5}{4} =$$

$$= 0{,}004\,71 \text{ м}^3.$$

Этот объем можно представить как сумму объемов:

$$V = V_1 + V_2,$$

где $V_1 = \pi H(R^2 - R_2^2)$; $V_2 = \dfrac{\pi g}{\omega^2} H^2$. Тогда

$$V = \pi H(R^2 - R_2^2) + \frac{\pi g}{\omega^2} H^2.$$

Решив это уравнение относительно неизвестного радиуса $R_2$, получим

$$R_2 = \sqrt{\frac{\pi R^2 H + \dfrac{\pi g}{\omega^2} H^2 - V}{\pi H}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01 + \dfrac{\pi \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25}{40\,000} - 0{,}004\,71}{\pi \cdot 0{,}5}};$$

$R_2 = 0{,}084386$ м.

Радиус $R_1$ может быть найден из формулы для определения объема $V_2$:

$$V_2 = \frac{\pi g}{\omega^2} H^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2)\,\frac{H}{2},$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{\pi R_2^2 \dfrac{H}{2} - \dfrac{\pi g}{\omega^2} H^2}{\pi \dfrac{H}{2}}} = \sqrt{\frac{0{,}005\,589\,2 - 0{,}000\,192\,5}{0{,}785}};$$

$$R_1 = 0{,}082\,913\,8 \text{ м}.$$

Следовательно,

$$\Delta R = R_2 - R_1 = 1{,}47 \text{ мм}.$$

**Задача 5.6.** Цилиндрический сосуд (рис. 5.15) размерами $R = 0{,}4$ м и $H = 0{,}7$ м, в который была залита вода объемом $V_0 = 0{,}25$ м$^3$, вращается относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Сосуд закрыт крышкой с малым отверстием в центре. Определить силу $P$, нагружающую болтовую группу крышки. Собственным весом крышки пренебречь.

**Решение**. Наличие отверстия в крышке свидетельствует о том, что давление над водой в сосуде равно атмосферному (рис. 5.16). Возможны три случая положения параболоида вращения, отвечающего ПП при различных значениях $\omega$:

1) параболоид вращения не касается дна сосуда;

2) вершина параболоида касается дна;

3) параболоид вращения пересекает дно.

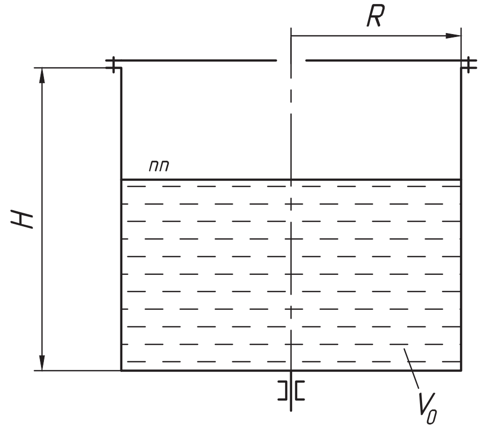



**Рис. 5.15**

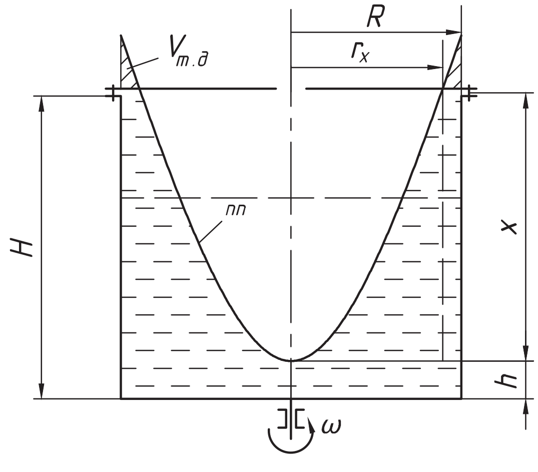



**Рис. 5.16**

Делаем предположение, что при заданной в условии угловой скорости ω имеет место первый случай. Если это предположение верное, то искомая сила давления жидкости на крышку (она определяет нагрузку в болтовой группе) будет равна $P = \rho g V_{\text{т.д}}$.

В доказательство этого найдем высоты $x$ и $h$, необходимые для определения объема $V_{\text{т.д}}$. Воспользовавшись условием сохранения объема жидкости (считаем жидкость несжимаемой), сначала находим объем воздуха в сосуде:

$$V_{\text{в}} = V - V_0 = \pi R^2 H - V_0 = \pi \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}7 - 0{,}25 = 0{,}101 \text{ м}^3.$$

Для вращающегося сосуда этот объем ограничен параболоидом вращения, имеющим основание $r_x$ и высоту $x$:

$$V_{\text{в}} = \frac{1}{2}\pi r_x^2 x.$$

Подставив в это уравнение значение высоты параболоида вращения, равное $r_x = \sqrt{\dfrac{x \cdot 2g}{\omega^2}}$, и решив его относительно неизвестной высоты $x$, получим

$$x = \sqrt{\frac{\omega^2 V_{\text{в}}}{\pi g}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 0{,}01}{\pi \cdot 9{,}81}} = 0{,}57 \text{ м}.$$

Следовательно, высота $h = H - x = 0{,}7 - 0{,}57 = 0{,}13$ м.

В этом случае объем тела давления $V_{\text{т.д}}$ будет равен

$$V_{\text{т.д}} = V_{\text{пар}} + V_h - V_0,$$

где

$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{1}{2}\pi \cdot 0{,}16 \cdot \frac{100 \cdot 0{,}16}{19{,}6} = 0{,}205 \text{ м}^3;$$

$$V_h = \pi R^2 h = \pi \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}13 = 0{,}065 \text{ м}^3;$$

$$V_{\text{т.д}} = 0{,}02 \text{ м}^3.$$

Сила давления $P = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}02 = 196{,}2$ Н.

## 5.3. Равновесие жидкости в сосуде, равномерно вращающемся относительно горизонтальной оси

В случае равномерного вращения сосуда относительно горизонтальной оси поле массовых сил несимметрично относительно этой оси (рис. 5.17). На практике чаще всего приходится иметь дело с таким случаем вращения сосуда с жидкостью, когда угловая скорость $\omega$ столь велика, что единичной силой тяжести $g$ можно пренебречь по сравнению с единичной центробежной силой инерции $j = \omega^2 r$. Подтверждением этому может быть, например, сле-

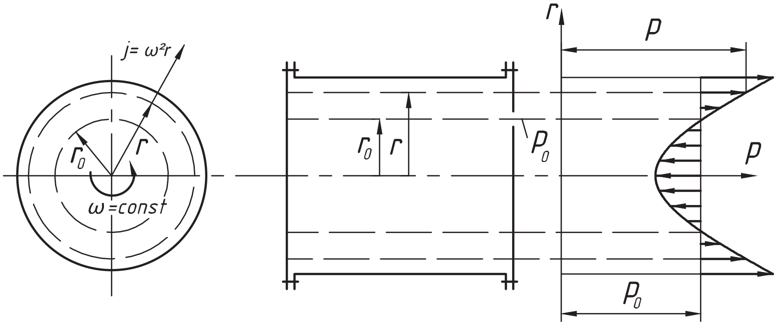



**Рис. 5.17**

дующий расчет. Цилиндрический сосуд радиусом $r = 100$ мм вращается вокруг горизонтальной оси с постоянным числом оборотов $n = 1000$ об/мин ($\omega = 104{,}6$ рад/с). Центробежная сила инерции равна $j = \omega^2 r = 10\,941 \cdot 0{,}1 = 1094{,}1$ м/с$^2$. Очевидно, что $j \gg g = 9{,}81$ м/с$^2$.

Закон изменения давления в жидкости при указанном условии можно представить в следующем виде:

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 (r^2 - r_0^2)}{2}, \qquad (*)$$

где $p_0$ — давление в точках цилиндрической поверхности радиуса $r_0$; $p$ — давление в точках цилиндрической поверхности произвольного радиуса $r$. Следовательно, поверхности равного давления представляют собой цилиндрические поверхности с общей осью — осью вращения сосуда, а закон распределения давления по радиусу $r$ является параболическим.

Приближенная формула ($*$) может применяться при любом расположении оси вращения сосуда, если сила тяжести мала по сравнению с центробежной силой.

Если необходимо определить силу давления $P$ жидкости, вращающейся вместе с сосудом, на его стенку (или на кольцевую часть этой стенки), перпендикулярную оси вращения, сначала определяют силу давления $dP$ на элементарную кольцевую площадку радиусом $r$ и шириной $dr$:

$$dP = \left[p_0 + \rho\,\frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2}\right] 2\pi r\,dr.$$

Интегрирование по площади стенки в нужных пределах дает количественную оценку искомой силы давления $P$.

**Задача 5.7.** Определить осевую силу давления воды на коническую крышку сосуда (рис. 5.18), вращающегося вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. Показание манометра $M$ равно $p_{\text{м}} = 50$ кПа, диаметр $D = 0{,}4$ м. Силой тяжести пренебречь.

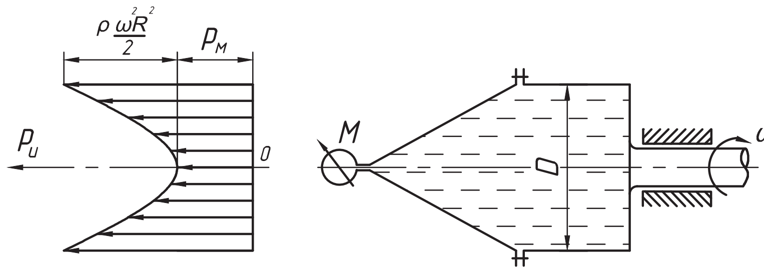



**Рис. 5.18**

**Решение**. Воспользуемся общим законом распределения давления жидкости для этого случая:

$$p = p_0 + \rho\,\frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2}.$$

Используя избыточную систему давления и положив, что $p_0 = p_{\text{м}}$ при $r_0 = 0$, получим

$$p_{\text{и}} = p_{\text{м}} + \rho\,\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Искомая сила давления жидкости на крышку:

$$P = \int_0^R p_{\text{и}} \cdot 2\pi r\,dr = \int_0^R \left(p_{\text{м}} + \rho\,\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) \cdot 2\pi r\,dr = \pi R^2 p_{\text{м}} + \rho\,\frac{\pi\omega^2 R^4}{4} =$$

$$= \pi \cdot 0{,}04 \cdot 50\,000 + \frac{1000 \cdot \pi \cdot 10\,000 \cdot 0{,}0016}{4} = 18\,840 \text{ Н} = 18{,}84 \text{ кН}.$$

П р и м е ч а н и е. Рассмотрим, как изменится сила давления $P$, если коническую крышку заменить полусферической или плоской при той же постановке задачи. Осевая сила давления $P$ не изменится, так как при неучете силы тяжести эпюра распределения жидкости (рис. 5.18, *слева*) на плоскость, перпендикулярную оси вращения сосуда, останется прежней, зависящей от плотности жидкости $\rho$, частоты вращения $\omega$ и внешнего радиуса $R$.

**Задача 5.8.** В машину для центробежной отливки подшипниковых втулок (рис. 5.19) залита расплавленная бронза ($\rho = 8000$ кг/м$^3$). Пренебрегая действием силы тяжести, определить силу, воспринимаемую болтовой группой крышки, если привод машины обеспечивает вращение цилиндрической формы диаметром $D = 150$ мм с частотой $n = 1000$ об/мин. Объем жидкого расплава составляет 3/4 всего объема формы.

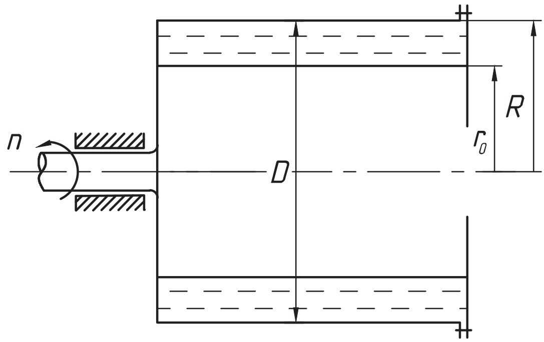



**Рис. 5.19**

**Решение**. Угловая скорость вращения формы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1000}{30} = 104{,}7 \text{ рад/с.}$$

Поверхности равного давления, в том числе ПП, являются цилиндрическими. Радиус $r_0$ для ПП, имеющий давление $p_{\text{и}} = 0$, находим из равенства

$$\frac{3}{4}\,\pi R^2 L = \pi(R^2 - r_0^2)L$$

(где $L$ — длина формы):

$$r_0 = \frac{R}{2}.$$

Закон распределения избыточного давления жидкости (без учета силы тяжести) для рассматриваемого случая:

$$p_{\text{и}} = \rho \frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2}.$$

Сила, нагружающая болтовую группу торцовой крышки:

$$P = \int\limits_{r_0}^{R} \rho \frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2} \cdot 2\pi r\, dr = \int\limits_{R/2}^{R} \frac{\rho\omega^2}{2} \left(r^2 - \frac{R^2}{4}\right) \cdot 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{\rho\omega^2}{2} \cdot 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_{R/2}^{R} - \frac{\rho\omega^2}{2} \frac{R^2}{4} \cdot 2\pi \frac{r^2}{2}\Big|_{R/2}^{R} =$$

$$= 2173{,}7 - 1100{,}7 = 1073 \text{ Н} = 1{,}073 \text{ кН}.$$

# Литература

*Башта Т. М.*, *Руднев С. С.* Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.: Альянс, 2010.

*Гидридов А. Д.* Техническая механика: Учеб. для втузов. М.: Машиностроение, 1987.

*Емцев Б. Т.* Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987.

*Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газов М.: Наука, 1987. 840 с.

*Никитин О. Ф.* Гидравлика и гидропневмопривод: Учеб. пособие для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012.

*Руднев С. С.*, *Подвидз Л. Г.* Лабораторный курс гидравлики, насосов и гидропередач: Учеб. пособие для втузов. М.: Машиностроение, 1974.

Сборник задач по машиностроительной гидравлике / Д. А. Бутаев, З. А. Калмыкова, Л. Г. Подвидз и др.; Под ред. И. И. Куколевского и Л. Г. Подвидза. М.: Машиностроение, 2009.

# Оглавление

*Учебное издание*

**Шабловский** Александр Сергеевич

**Выполнение домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа»**

Часть 1

Гидростатика

*Учебное пособие*

Редактор *С. А. Серебрякова*

Корректор *Е. К. Кошелева*

Компьютерная верстка *М. А. Голуба*

Подписано в печать 26.11.2012. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 4,19. Тираж 100 экз.

Изд. № 124. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана.

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Для заметок