

Н.И. Латанова, А.П. Власова, Н.В. Евсеева

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ**

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Н.И. Латанова, А.П. Власова, Н.В. Евсеева

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ**

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 511(075.8)
ББК 22.13
Л27

Рецензенты: *И.В. Блудова, З.Н. Русакова*

Латанова Н.И.

Л27 Решение уравнений в целых числах : учеб. пособие / Н.И. Латанова, А.П. Власова, Н.В. Евсеева. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 75, [5] с. : ил.

Посвящено разбору и решению уравнений в целых числах. Рассмотрена связанная с решением уравнений в целых числах тема делимости чисел.

Для абитуриентов, школьников старших классов и преподавателей математики.

УДК 511(075.8)
ББК 22.13

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория решений уравнений в целых числах является классическим разделом элементарной математики. Конкретные задачи такого рода решались уже около 4 тысяч лет тому назад.

В школьной программе эта тема затрагивается вскользь в восьмом классе. Задачи, основанные на решении уравнений в целых числах, часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, на олимпиадах по математике в старших классах и являются задачами повышенной сложности.

В 2010 г. эти задачи (С6) были включены в ЕГЭ по математике.

С решением уравнений в целых числах связана тема делимости чисел. Без знания основных принципов и теорем этой темы невозможно решение задач по исследуемой проблеме.

1.1. Признаки делимости натуральных чисел на 3, 4, 8, 9, 11

Число $n:3$ (знак « $:$ » читается как « n делится») тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на число 3.

Например, число 674 523 делится на число 3, так как сумма его цифр равна $6 + 7 + 4 + 5 + 2 + 3 = 27$.

Число $n:4$ тогда и только тогда, когда число, составленное из двух последних цифр делится на число 4. Например, число 47 816 делится на число 4, так как число 16 делится на число 4.

Число $n:8$ тогда и только тогда, когда число, составленное из трех последних цифр делится на число 8. Например, число 35 128 делится на число 8, так как число 128 делится на число 8.

Число $n:9$ тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на число 9. Например, число 148 671 делится на число 9, поскольку сумма его цифр равна $1 + 4 + 8 + 6 + 7 + 1 = 27$.

Число $n \div 11$, когда сумма его цифр, стоящих в четных разрядах¹, либо равна сумме цифр, стоящих в нечетных разрядах, либо отличается от нее на число, кратное 11. Например, число 1474 делится на число 11, поскольку сумма его цифр, стоящих в четных разрядах, равна 8, сумма его цифр, стоящих в нечетных разрядах, равна 8. Таким образом, эти суммы равны.

Любое число n представимо в десятичной системе счисления в виде $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$, где цифры $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ могут принимать значения, равные 0, 1, 2, ..., 9, а цифра a_k может принимать значения, равные 1, ..., 9. Число n записывают в виде $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0}$.

1.2. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное

Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится нацело на натуральное число b , то говорят, что число b является их общим делителем, а наибольший из общих делителей называется наибольшим общим делителем и обозначается или $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, или $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Если натуральное число b является кратным для каждого из натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, то число b называется общим кратным чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, наименьшее число из кратных чисел называется наименьшим общим кратным и обозначается или $\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, или $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Числа называются взаимно простыми, если $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

Два или три последовательных числа взаимно простые, т. е. $\text{НОД}(n, n+1, n+2) = 1$.

При решении задач целесообразно использовать следующие утверждения.

- Для нахождения НОД удобно применять алгоритм Евклида: если при делении a на b получается остаток r , то $a = bq + r$ и $(a, b) = (a, r) = (b, r)$.

¹ Отсчет разрядов начинается справа.

- Если $b > a$, то $(a, b) = (a, b - a)$.
- $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}[a, b] = ab$.
- Если $(a, b) = 1$, то для любых n и $k \in N$ $(a^n, b^k) = 1$, где N – множество натуральных чисел.
- Если целое число c делит произведение ab и при этом $(a, c) = 1$, то число c делит число b .
- Если целые числа a, b, c, k связаны соотношением $a = bk + c$, то $(a, b) = (b, c)$.
- Если $(a, b) = d$, то существуют целые числа x и y , такие, что $d = ax + by$.
- Если остаток от деления a_1 на b равен r_1 , а остаток от деления a_2 на b равен r_2 , то остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b .

Рассмотрим пример, результатом которого мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 1.1. Доказать, что любое целое число представимо в виде: 1) $3t$ или $3t \pm 1$; 2) $4t$ или $4t \pm 1$, или $4t \pm 2$; 3) $5t$ или $5t \pm 1$, или $5t \pm 2$; 4) $7t$, или $7t \pm 1$, или $7t \pm 2$, или $7t \pm 3$, где $t \in Z$ (коэффициент при t может быть любым целым числом), Z – множество целых чисел.

Докажем пункт 1. Пусть произвольное целое число n делится на 3, тогда получим $n = 3t + r$, где остаток $r = 0; 1; 2$. Если $r = 0$, то $n = 3t$; если $r = 1$, то $n = 3t + 1$, если $r = 2$, то $n = 3t + 2$ или $n = 3t + 3 - 1 = 3t_1 - 1$.

Доказательства пунктов 2–4 выполняются аналогично.

Пример 1.2. Найти наибольший общий делитель двух чисел при любом натуральном числе n :

а) $\text{НОД}(9n + 17, 7n + 11) = (2n + 6, 7n + 11) = (5n + 5, 2n + 6) = (3n - 1, 2n + 6) = (n - 7, 2n + 6) = (n + 13, n - 7) = (20, n - 7)$. Представим $n = 20t + r$, $r = 0, 1, \dots, 19$. Подставляя различные значе-

ния для r , получаем, что остаток равен 7. Таким образом, $n = 20t + 7$, $t \in N$;

б) $\text{НОД}(3, 3n + 2)$. Число $(3n + 2)$ должно делиться на число 3, поэтому пусть $n = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$. Подставляя различные значения для r , получаем, что ни одно из найденных чисел не делится на 3. Таким образом, $\text{НОД}(3, 3n + 2) = 1$;

в) $\text{НОД}(2n + 3, n + 7) = (n - 4, n + 7) = (n - 4, 11)$. Пусть $n = 11t + r$. Подставляя различные значения для r , получаем, что подходит число $r = 4$;

г) $\text{НОД}(2^{30} - 1, 2^{40} - 1) = (2^{10} - 1, 2^{30} - 1) = (2^{10} - 1, 2^{20} - 1) = (2^{10} - 1, 2^{10} - 1) = 2^{10} - 1$.

Пример 1.3. Доказать, что $\text{НОД}\left(\underbrace{11\dots1}_8, \underbrace{11\dots1}_{100}\right) = \underbrace{1111}_4$.

Доказательство:

$$\text{НОД}\left(\underbrace{11\dots1}_8, \underbrace{11\dots1}_{100}\right) = \left(\underbrace{11\dots1}_4, \underbrace{11\dots1}_8\right) = \underbrace{1111}_4.$$

Пример 1.4. Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

Доказательство:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(12n+1, 30n+2) &= (18n+1, 12n+1) = \\ &= (6n, 12n+1) = (6n, 6n+1) = (6n, 1) = 1.\end{aligned}$$

Пример 1.5. Определить, сократима ли дробь $\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1}$.

Если сократима, то при каких n ?

Преобразуем дробь:

$$\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1} = n^2 - n + \frac{4n+3}{20n+1}.$$

Находим $\text{НОД}(4n+3, 20n+1) = (16n-2, 4n+3) = (12n-5, 4n+3) = (8n-8, 4n+3) = (4n-11, 4n+3) = (14, 4n-11)$.

Так как число $4n-11$ нечетное, проверяем, делится ли оно на 7. Пусть $n = 7t + r$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Вычисляем значение числа $4n-11$ для различных значений r , получаем, что число $4n-11$ делится на 7 при $r=1$. Следовательно, исходная дробь сократима для $n = 7t+1$.

Пример 1.6. Найти все натуральные числа n , при которых сократима дробь $\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n}$.

Представим исходную дробь в виде

$$\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n} = \frac{(7n+4)(n+1)}{(6n+5)(n)}.$$

Так как $\text{НОД}(n+1, n) = 1$ и $\text{НОД}(6n+5, n+1) = 1$, попробуем найти наибольший общий делитель $(7n+4, n)$ и $(7n+4, 6n+5)$:

$$\text{НОД}(7n+4, n) = (n, 4),$$

поэтому $n = 2t$;

$$\text{НОД}(7n+4, 6n+5) = (n-1, 6n+5).$$

$$\text{Тогда } 6n+5 = 6(n-1) + 11.$$

$$\text{Отсюда следует, что } \text{НОД}(7n+4, 6n+5) = (n-1, 11) \text{ и } n = 11t + 1.$$

$$\text{Таким образом, } n = 2t, n = 11t + 1.$$

Пример 1.7. Найти все натуральные числа n , при которых сократима дробь $\frac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$.

Преобразуем дробь:

$$\frac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5} = n^2 - n + \frac{9n - 8}{3n - 5};$$

$$\text{НОД}(3n-5, 9n-8) = (3n-5, 7).$$

Отсюда следует, что $n = 7t + r$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Перебирая все остатки r , получаем $r = 4$.

Следовательно, $n = 7t + 4$.

Пример 1.8. Найти все натуральные числа n , при которых сократима дробь $\frac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7}$.

Преобразуем дробь:

$$\frac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7} = n^2 - n + \frac{3n + 2}{5n + 7};$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(5n + 7, 3n + 2) &= (2n + 5, 3n + 2) = (n - 3, 2n + 5) = \\ &= (n + 8, n - 3) = (11, n - 3). \end{aligned}$$

Следовательно, $n = 11t + 3$.

Пример 1.9. Найти все натуральные числа n , при которых сократима дробь $\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1}$.

Преобразуем дробь:

$$\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1} = n^2 - n + \frac{4n + 3}{20n + 1};$$

$$\text{НОД}(20n + 1, 4n + 3) = (4n + 3, -14).$$

Следовательно, $n = 7t + 1$.

Пример 1.10. Найти натуральные числа m и n , которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} m + n = 20; \\ \text{НОД}(m, n) = 5. \end{cases}$$

Пусть $m = 5t$, тогда при $t = 1$ $m = 5$, $n = 15$.

Следовательно, $m = 5$, $n = 15$.

Пример 1.11. Найти НОК $[7n + 3, 5n + 2]$.

Используем формулу $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}[a, b] = a \cdot b$, из которой следует, что

$$\text{НОК}[7n + 3, 5n + 2] = \frac{(7n + 3)(5n + 2)}{(7n + 3, 5n + 2)} = (7n + 3)(5n + 2).$$

Так как $\text{НОД}(7n + 3, 5n + 2) = (n, 1) = 1$, то $\text{НОК}[7n + 3, 5n + 2] = [(7n + 3, 5n + 2)]$.

Пример 1.12. Найти наименьшее натуральное число, которое делится на число 7 и дает остаток, равный 1, при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6.

Найдем НОК чисел 2, 3, 4, 5, 6: НОК = 60. Тогда, исходя из условия задачи, получим $7n = 60m + 1$. Если левая часть этого уравнения делится на число 7, то и правая часть тоже должна делиться на число 7.

Представив $m = 7t \pm r$ и подставив в уравнение $7n = 60m + 1$ различные значения r , получим $m = 5$.

Таким образом, искомое число равно 301.

Пример 1.13. Одна гирлянда из лампочек на елке зажигается через каждые 15 с, а другая – через каждые 12 с. В определенный момент времени гирлянды зажглись одновременно. Через сколько времени лампочки вновь зажгутся одновременно?

Ответом будет НОК 12 и 15, т. е.

$$\text{НОК}[12, 15] = 60 \text{ с.}$$

Пример 1.14. Два зубчатых колеса, одно из которых имеет 30 зубцов, а другое – 40 зубцов, до начала вращения соприкасаются зубцами. Через сколько оборотов каждого колеса они будут в том же положении, как до начала вращения?

Ответ: НОК $[30, 40] = 120$ оборотов.

Пример 1.15. Из одного парка утром на линию вышли три автобуса. Первый автобус после прохождения маршрута возвратится в парк через 90 мин; второй – через 50 мин; а третий – через 70 мин. Через сколько времени после выхода автобусов из парка все три автобуса вернутся в парке?

Ответ: НОК $[90, 50, 70] = 3150$ мин.

Пример 1.16. (Олимпиада «Ломоносов–2009»²) Каким может быть НОД натуральных чисел m и n , если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 9 раз?

Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$, тогда $\text{НОД}(m+6, n) = 9d$. Отсюда следует, что числа m и n делятся на d , поэтому число $m+6$ тоже делится на d . Таким образом, число 6 должно делиться на d . Делителями числа 6 являются числа 2, 3, 6. Проверкой убеждаемся, что все эти делители подходят.

Таким образом, $\text{НОД}(m, n)$ равен любому из чисел 2, 3 или 6.

Пример 1.17. (МГУ, факультет государственного управления, 2009) Указать наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 5 и 9 дает в остатке 1.

Пусть n искомое натуральное число, тогда $n = 2a + 1 = 3b + 1 = 5c + 1 = 9d + 1$, откуда следует, что число $n - 1$ должно одновременно делиться на числа 2, 5 и 9.

Таким образом, получим $n = [2, 5, 9] + 1 = 91$.

Пример 1.18. Найти хотя бы одну пару целых чисел $(x; y)$, таких, что $ax + by = d$, где $d = (a, b)$.

Пусть $a = 7$ и $b = 5$, тогда $d(7, 5) = 1$. При $x = -2$, $y = 3$ выполняется равенство $-2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 1$.

Пусть $a = 15$ и $b = 25$, тогда $d(25, 15) = 5$. При $x = -3$, $y = 2$ выполняется равенство $-3 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 5$.

Пример 1.19. Доказать, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на k , то число $ad - bc$ делится на k .

² Здесь и далее в скобках указаны источники.

Из условия примера имеем систему уравнений

$$\begin{cases} al + b = kn; \\ cl + d = km. \end{cases} \quad (1.1)$$

Умножим первое уравнение системы (1.1) на d , а второе – на b , получим

$$\begin{cases} dab + db = knd; \\ bcl + bd = bkm. \end{cases} \quad (1.2)$$

Каждое уравнение системы (1.2) разделим на l :

$$\begin{cases} ad + \frac{db}{l} = \frac{knd}{l}; \\ bc + \frac{db}{l} = \frac{bkm}{l}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Вычитая из первого уравнения системы (1.3) второе, получим $ad - bc = k\left(\frac{nd}{l} - \frac{bm}{l}\right)$, что и требовалось доказать.

Пример 1.20. Найти натуральные числа a и b , такие, что их разность равна 18, а НОК = 165.

Из условия примера имеем $a - b = 18$, $\frac{165}{a} = n$, $\frac{165}{b} = m$. Отсюда $\frac{165}{n} = a$, $\frac{165}{m} = b$ и $\frac{165}{n} - \frac{165}{m} = 18$.

Приводя последнее выражение к общему знаменателю, получим $55(m - n) = 6mn$. Это равенство выполняется, если $m - n = 6$; $mn = 55$.

Таким образом, $m = 11$, $n = 5$; $a = \frac{165}{5} = 35$; $b = \frac{165}{11} = 15$.

Пример 1.21. Найти натуральные числа a и b , такие, что сумма их квадратов равна 13, а НОК = 6.

Из условия примера имеем $a^2 + b^2 = 13$, $\frac{6}{a} = n$, $\frac{6}{b} = m$. Отсюда $\frac{6}{n} = a$, $\frac{6}{m} = b$. Тогда $\frac{36}{n^2} + \frac{36}{m^2} = 13$ или $36(m^2 + n^2) = 13n^2 \cdot m^2$, откуда получим $n = 3$, $m = 2$ и $a = \frac{6}{3} = 2$, $b = \frac{6}{2} = 3$.

Пример 1.22. Доказать, что число $\overline{ab} - \overline{ba}$ делится на число 9.

Числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ имеют одинаковую сумму цифр $a + b$ и, следовательно, одинаковые остатки от деления на число 9. Поэтому эти остатки при вычитании уничтожатся. Таким образом, получим утверждение: если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9.

Пример 1.23. Доказать, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на число 11.

Запишем сумму в виде $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$, что и требовалось доказать.

Пример 1.24. Найти цифру X , при которой число $\overline{36X847X}$ делится на число 3.

Поскольку число $\overline{36X847X}$ делится на число 3 при условии, что сумма цифр этого числа делится на 3, то найдем сумму цифр: $3 + 6 + X + 8 + 4 + 7 + X = 28 + 2X$. При $X = 1, 4, 7$ эта сумма цифр делится на 3.

Пример 1.25. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является квадратом целого числа.

Запишем сумму квадратов двух нечетных чисел как $(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4q + 2$, где $q = n^2 + m^2 + n + m$.

При делении на 4 получившееся число дает в остатке 2, чего быть не может, так как остаток от деления квадрата целого числа на 4 дает в остатке 0 или 1. Докажем это.

Пусть некоторое целое число $k = 4t + r$, где $r = 0, 1, 2, 3$. Остаток от деления k^2 на 4 будет равен остатку от деления r^2 на это число. Учитывая, что $r^2 = 0, 1, 4, 9$, получим ответ: при делении на 4 остаток равен 0 или 1, что и требовалось доказать.

Пример 1.26. Доказать, что сумма $10^n - 1 + 18n$ делится на 27. Запишем исходное число в виде

$$9 \cdot \underbrace{11\dots1}_n + 18n = 9 \left(\underbrace{11\dots1}_n + 2n \right).$$

Докажем теперь, что число $\underbrace{11\dots1}_n$ делится на 3.

Используем метод математической индукции:

- 1) для $n = 1$ получим $1 + 2 = 3$;
- 2) предположим теперь, что наше утверждение справедливо для $n = k$ и число $\underbrace{11\dots1}_k + 2k$ делится на 3, тогда и число 10

$\left(\underbrace{11\dots1}_k + 2k \right)$ тоже будет делиться на три;

- 3) докажем, что наше утверждение справедливо и для $n = k + 1$.

При этом значении n получим $\underbrace{11\dots1}_{k+1} + 2(k+1) = \underbrace{11\dots10}_k + 1 + 2k + 2 = \underbrace{11\dots10}_k + 20k - 20k + 3 + 2k = \left(10 \left(\underbrace{11\dots1}_k + 2k \right) - 20k + 3 + 2k \right) = 10 \left(\underbrace{11\dots1}_k + 2k \right) - 18k + 3$, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Сократима ли дробь $\frac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7}$? Если сократима, то при каких n ?

Ответ: сократима при $n = 11t + 3$.

Задача 1.2. Сократима ли дробь $\frac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$? Если со-

кратима, то при каких n ?

Ответ: сократима при $n = 7t + 4$.

Задача 1.3. Найти НОД($4, 2n + 1$).

Ответ: 1.

Задача 1.4. Найти НОД($n^6 - n^2, 10$).

Ответ: 10.

Задача 1.5. Найти натуральные числа m и n , для которых выполняется система уравнений
$$\begin{cases} m \cdot n = 6; \\ \text{НОД}(m, n) = 1. \end{cases}$$

Ответ: $m = 2, n = 3$.

Задача 1.6. Найти НОК[$3n + 1, 5n + 2$].

Ответ: $(3n + 1)(5n + 2)$.

Задача 1.7. Из одного порта вышли три парохода. Первый пароход дошел до порта назначения и возвратился обратно в порт через 6 сут, второй – через 9 сут, третий – через 4 сут. Через сколько суток после начала навигации все пароходы вернутся в порт?

Ответ: 36.

Задача 1.8. Отец и сын измеряли шагами расстояние между деревьями. Длина шага отца 70 см, длина шага сына 50 см. Каково расстояние между деревьями, если след отца и сына совпал десять раз, включая начальный и конечный?

Ответ: 31,5 м.

Задача 1.9. Найти наименьшее четырехзначное число, которое делится на 9, а при делении на 4 дает в остатке 3.

Ответ: 1027.

Задача 1.10. (МГУ) Интервалы движения маршрутных такси по трем маршрутам, начинающимся у станции метро, составляют 10, 12 и 15 мин соответственно. Сколько раз в день в период с 10 ч 40 мин до 14 ч 20 мин того же дня у этой станции метро одновременно встретятся такси всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 13 ч 05 мин?

Ответ: 4.

ГЛАВА 2. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Александрийский математик Диофант, живший около 2 тысяч лет тому назад, решил большое число таких уравнений и описал общие методы их решения в своей книге «Арифметика». Уравнения в целых числах называют *диофантовыми уравнениями*.

Примером диофантового уравнения является уравнение вида

$$ax + by = 0. \quad (2.1)$$

Подобные уравнения называются *однородными линейными уравнениями*. Они имеют бесконечно много решений в целых числах. Эти решения описываются формулами $x_n = bn$, $y_n = -an$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.1. Однородные линейные уравнения

Пример 2.1. На кольцевой дороге проводилась эстафета велосипедистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой трассы 55 км, а длина каждого этапа 25 км (движение одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета? Место старта тоже считать за пункт. Каково расстояние между соседними пунктами?

Спортсмены проходят путь равный $25k$ км, где k – целое число. Этот путь должен равняться целому числу кругов, или 55 n км.

Получим уравнение $25k$ км = $55n$ км, или $5k$ км = $11n$ км, откуда $n = 5$, $k = 11$.

Следовательно, число пунктов равно 11, расстояние между пунктами равно $\frac{55}{11} = 5$ км.

Пример 2.2. На кольцевой дороге проводилась эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой трассы 176 км, а длина каждого этапа 80 км, (движение одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета? Место старта тоже считать за пункт. Каково расстояние между соседними пунктами?

Решение данного примера аналогично решению примера 2.1. Число пунктов равно 11, расстояние между пунктами равно 16 км.

Пример 2.3. Трамвай курсирует по кольцевой трассе длиной, равной 5 км. Начало и конец маршрута не совпадают. Сколько остановок находится на маршруте трамвая, если расстояние между остановками равно 3 км? Найти длину маршрута трамвая.

Решение этого примера аналогично решению примера 2.1. Число остановок на маршруте равно 5, длина маршрута 15 км.

2.2. Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим неоднородные линейные уравнения вида

$$ax + by = c, \quad (2.2)$$

которые решаются в целых числах, коэффициенты a, b, c – целые числа.

При решении таких уравнений нужно иметь в виду следующие теоремы.

Теорема 2.1. Если число c не делится на $\text{НОД}(a, b)$, то уравнение (2.2) не имеет решений.

Теорема 2.2. Если $(x_0; y_0)$ – какое-либо целочисленное решение уравнения (2.2), то любые числа вида

$$\begin{cases} x = x_0 - bt; \\ y = y_0 + at, \end{cases}$$

где t – произвольное целое число, также являются решениями уравнения (2.2).

Пример 2.4. (Олимпиада МГУ, 1969) Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления числа n на 30?

Из условия примера получим систему уравнений

$$\begin{cases} n = 6k + 4; \\ n = 15t + 7, \end{cases} \quad k, t \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Отсюда

$$2k - 5t = 1. \quad (2.4)$$

Как следует из системы уравнений (2.3), $\text{НОД}(2,5) = 1$, поэтому решение имеется.

Решим уравнение (2.4), выразив переменную k через t , так как коэффициент при k меньше по модулю, чем при t . Получим $k = \frac{5t+1}{2}$ или $k = 2 + \frac{t+1}{2}$. Чтобы число k было целым, дробь должна быть целой. Для этого примем $t = 1$ и тогда получим $k = 3$. Это будет некоторое частное решение, и решения уравнения (2.4) запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} k = 3 + 5m; \\ t = 1 + 2m, \end{cases} \quad m \in Z.$$

Подставив найденные значения k и t в систему уравнений (2.3), получим $n = 6(3 + 5m) + 4 = 22 + 30m$ и $n = 15(1 + 2m) + 7 = 22 + 30m$.

Следовательно, остаток от деления числа n на 30 равен 22.

Пример 2.5. На станцию привезли 420 т угля в вагонах вместимостью 15, 20 и 25 т. Сколько таких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

Пусть было использовано x , y , z вагонов вместимостью соответственно 15, 20 и 25 т. Тогда условие примера будет удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} 15x + 20y + 25z = 420; \\ x + y + z = 27. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$15(27 - y - z) + 20y + 25z = 420,$$

или

$$y + 2z = 3,$$

откуда $y = z = 1$, $x = 25$.

Следовательно, было использовано 25 вагонов вместимостью 15 т, 1 вагон вместимостью 20 т и 1 вагон вместимостью 25 т.

Пример 2.6. (ЕГЭ, 2010) Найти все целые решения уравнения

$$113x + 179y = 17, \quad (2.5)$$

удовлетворяющие неравенствам $x > 0$, $y + 100 > 0$.

Используем один из вариантов алгоритмов Евклида.

Выразим переменную x , перед которой стоит меньший коэффициент, из уравнения (2.5). Получим

$$x = \frac{-179y + 17}{113} = -y + \frac{-66y + 17}{113}. \quad (2.6)$$

Введем новую переменную:

$$x_1 = x + y,$$

где $x_1 = \frac{-66y_1 + 17}{113}$.

Тогда уравнение (2.5) запишем в виде

$$113x_1 = -66y + 17. \quad (2.7)$$

Вновь выразим переменную с меньшим коэффициентом, в данном случае переменную y из уравнения (2.7):

$$y = \frac{-113x_1 + 17}{66} = -x_1 + \frac{-47x_1 + 17}{66}. \quad (2.8)$$

Введем новую переменную:

$$y_1 = y + x_1,$$

где $y_1 = \frac{-47x_1 + 17}{66}$.

Тогда уравнение (2.7) запишем как

$$66y_1 = -47x_1 + 17. \quad (2.9)$$

Выразим переменную с меньшим коэффициентом из уравнения (2.9):

$$x_1 = \frac{-66y_1 + 17}{47} = -y_1 + \frac{-19y_1 + 17}{47}. \quad (2.10)$$

Опять введем новую переменную:

$$x_2 = y_1 + x_1,$$

где $x_2 = \frac{-19y_1 + 17}{47}.$

Уравнение (2.9) будет иметь вид:

$$47x_2 = -19y_1 + 17. \quad (2.11)$$

Выразим переменную с меньшим коэффициентом y_1 из уравнения (2.11):

$$y_1 = \frac{-47x_2 + 17}{19} = -2x_2 + \frac{-9x_2 + 17}{19}. \quad (2.12)$$

Введем новую переменную:

$$y_2 = y_1 + 2x_2,$$

где $y_2 = \frac{-9x_2 + 17}{19}.$

Подставим ее в уравнение (2.11):

$$19y_2 = -9x_2 + 17. \quad (2.13)$$

Выразим переменную x_2 из уравнения (2.13):

$$x_2 = \frac{-19y_2 + 17}{9} = -2y_2 + \frac{-y_2 + 17}{9}. \quad (2.14)$$

Обозначим новую переменную:

$$x_3 = x_2 + 2y_2,$$

где $x_3 = \frac{-y_2 + 17}{9}$.

Тогда уравнение (2.13) запишем в виде

$$9x_3 = -y_2 + 17. \quad (2.15)$$

Таким образом, преобразованное с помощью алгоритма Евклида уравнение (2.5) приведено к уравнению (2.15).

Общее решение уравнения (2.15) имеет вид

$$\begin{cases} x_3 = t; \\ y_2 = -9t + 17, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$x_3 = x_2 + 2y_2 = 5x_2 + 2y_1 = 5x_1 + 7y_1 = 12x + 19y = t;$$

$$y_2 = y_1 + 2x_2 = 3y_1 + 2x_1 = 3y + 5x_1 = 8y + 5x = -9t + 17.$$

С учетом последних равенств запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 12x + 19y = t; \\ 8y + 5x = -9t + 17. \end{cases} \quad (2.16)$$

Решив систему уравнений (2.16) относительно переменных x и y , запишем общее решение для исходного уравнения:

$$\begin{cases} x = 179t - 323; \\ y = -113t + 204, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Приняв во внимание условия $x > 0$, $y + 100 > 0$, найдем $t = 2$, $x = 35$, $y = -22$. Следовательно, $x = 35$, $y = -22$.

Пример 2.7. Решить в целых числах уравнение $25x - 18y + 1 = 0$.

Найдем НОД пары чисел 25 и 18 с помощью цепных дробей, т. е. используем один из вариантов алгоритма Евклида.

Преобразуем неправильную дробь $\frac{25}{18}$, последовательно выделяя целые части неправильных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{25}{18} &= 1 + \frac{7}{18} = 1 + \frac{1}{\frac{18}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}},\end{aligned}$$

где выражение $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$ называется цепной дробью.

Числа **1, 2, 1, 1**, выделенные в этом выражении полужирным шрифтом, являются последовательными частными алгоритма Евклида для нахождения НОД пары чисел 25 и 18.

Отбросим дробь $\frac{1}{3}$ и преобразуем полученную цепную дробь в обыкновенную:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}.$$

Вычтем дробь $\frac{7}{5}$ из исходной дроби $\frac{25}{18}$:

$$\frac{25}{18} - \frac{7}{5} = \frac{125 - 126}{18 \cdot 5} = \frac{-1}{18 \cdot 5}.$$

Приведем ее к общему знаменателю: $25 \cdot 5 - 18 \cdot 7 + 1 = 0$.

Таким образом частное решение исходного уравнения имеет вид $x = 5$, $y = 7$.

Общее решение исходного уравнения выглядит так: $x = 5 + 18t$; $y = 7 + 25t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Родительский комитет закупил на 750 руб. тетради по цене 35 руб. и ручки по цене 25 руб. Сколько было куплено тетрадей и ручек, если ручек было куплено больше, чем тетрадей, а разность между числом ручек и тетрадей наименьшая.

Ответ: 16 ручек, 10 тетрадей.

Задача 2.2. На празднике всем ребятам раздали подарки, в которые был положены 350 мандаринов – по 3 или по 4 мандарина в подарок. Сколько было всего подарков, если подарков, в которых находились 3 мандарина было больше 47 и меньше 53.

Ответ: 100.

Задача 2.3. (МГУ, факультет управления, 2005) Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе 100 руб. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы?

Ответ: 69 руб. 43коп.

Задача 2.4. Какое наименьшее число банок по 0,5 и по 0,4 л понадобится маме, чтобы разложить в них 3 л варенья?

Ответ: 2 банки по 0,5 л и 5 банок по 0,4 л.

Задача 2.5. Можно ли набрать 25 руб. монетами по 5 руб. и по 2 руб.?

Ответ: можно, 1 монета по 5 руб. и 10 монет по 2 руб.

Задача 2.6. Конфеты массой 13 кг распределили в коробки по 3 и по 5 кг. Какое наименьшее количество таких коробок понадобится?

Ответ: 1 коробка по 3 кг и 2 коробки по 5кг.

ГЛАВА 3. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Эта глава посвящена решению уравнений вида

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (3.1)$$

в целых числах.

Избавляясь от знаменателя в уравнении (3.1), запишем его так:

$$zy + zx = xy. \quad (3.2)$$

Прибавляя к обеим частям уравнения (3.2) z^2 , получаем уравнение

$$xy - zy - zx + z^2 = z^2. \quad (3.3)$$

Преобразуем уравнение (3.3):

$$y(x - z) - z(x - z) = z^2, \text{ или } (x - z)(y - z) = z^2. \quad (3.4)$$

Число решений уравнения (3.4) на единицу меньше количества делителей числа z^2 .

Пусть d – делитель z^2 , тогда решение (3.4) получим из решения совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{cases} x - z = d; \\ y - z = \frac{z^2}{d}; \end{cases} \quad \left\{ \begin{cases} x - z = -d; \\ y - z = -\frac{z^2}{d}. \end{cases} \right.$$

В случае если делитель $d = -z$, решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - z = -z; \\ y - z = -z \end{cases}$$

является $x = 0$; $y = 0$, которое не имеет смысла.

Пример 3.1. Решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8},$$

где $x \geq y$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$xy - 8x - 8y + 64 = 64; (x - 8)(y - 8) = 64; x - 8 = d; y - 8 = 64 / d.$$

Перебираем натуральные делители числа 64 и результат для удобства записываем в таблицу. Из таблицы выбираем пары чисел, соответствующие условию примера $x \geq y$.

d	1	2	4	8	16	32	64
x	9	10	12	16	24	40	72
y	72	40	24	16	12	10	9

В результате получаем: (16; 16); (24; 12); (40; 10), (72; 9).

Пример 3.2. Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$xy - 3x - 3y + 9 = 9; (x - 3)(y - 3) = 9.$$

Перебираем натуральные делители числа 9 и результат записываем в таблицу, из которой получаем следующий ответ: (4; 12); (6; 6); (12; 4).

d	1	3	9
x	4	6	12
y	12	6	4

Пример 3.3. Решить в целых числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$;

$x > y$.

После преобразования исходного уравнения получаем

$$(x - 9)(y - 9) = 81.$$

Перебираем натуральные делители числа 81 и результаты записываем в таблицу, из которой получаем пары чисел, соответствующие условию $x > y$: (36; 12); (90; 10); (8; -72); (6; -18).

d	1	3	9	27	81	-1	-3	-9	-27	-81
x	10	12	18	36	90	8	6	0	-18	-72
y	90	36	18	12	10	-72	-18	0	6	8

Пример 3.4. (ЕГЭ, 2010) Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{25}$, где $x > y$.

Решение этого примера аналогично решениям примеров 3.1–3.3, следовательно, получим пары чисел (150; 30); (650; 26).

Пример 3.5. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары натуральных чисел различной четности, удовлетворяющие уравнению: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$.

Решение этого примера аналогично решениям примеров 3.1–3.3, следовательно, получим пары чисел (13; 156); (15; 60); (21; 28); (156; 13); (60; 15); (28; 21).

ГЛАВА 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении нелинейных уравнений, как правило, необходимо ограничить перебор различных вариантов. Для этого используют различные методы.

4.1. Разложение на множители

Пример 4.1. Решить в натуральных числах уравнение $xу - 7у + 3х = 39$.

Используя разложение на множители, приведем уравнение к следующему виду:

$$(x - 7)(y + 3) = 18.$$

Полученное уравнение равносильно решению совокупности следующих систем уравнений

$$\begin{cases} x - 7 = 2; \\ y + 3 = 9; \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} x - 7 = 9; \\ y + 3 = 2; \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} x - 7 = 3; \\ y + 3 = 6; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} x - 7 = 6; \\ y + 3 = 3; \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} x - 7 = 1; \\ y + 3 = 18. \end{cases} \quad (4.5)$$

Решением системы уравнений (4.1) является пара чисел (9; 6); решением системы (4.2) – пара (2; -1); решением системы (4.3) – пара (10; 3); решением системы (4.4) – пара (13; 0); решением системы (4.5) – пара (8; 15).

Выбирая подходящие решения в виде натуральных чисел, получаем следующий ответ: (10; 3); (9; 6); (8; 15).

Пример 4.2. Решить в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 6y + 21$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$(x - y - 3)(x + y + 3) = 12.$$

Полученное уравнение равносильно решению совокупности следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 3; \\ x + y + 3 = 4; \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 4; \\ x + y + 3 = 3; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 2; \\ x + y + 3 = 6; \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 6; \\ x + y + 3 = 2; \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = -2; \\ x + y + 3 = -6; \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = -6; \\ x + y + 3 = -2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Решением системы уравнений (4.6) является пара чисел $\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$; решением системы (4.7) – пара $\left(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2}\right)$; решением системы (4.8) – пара $(4; -1)$; решением системы (4.9) – пара $(4; -5)$; решением системы (4.10) – пара $(-4; -5)$; решением системы (4.11) – пара $(-4; -1)$.

Выбирая подходящие решения в виде целых чисел, получаем следующий ответ: $(4; -1)$; $(4; -5)$; $(-4; -5)$; $(-4; -1)$.

Пример 4.3. Автоколонне поручили перевезти некоторый груз. В автоколонне имеются три машины разной грузоподъемности.

Машина наименьшей грузоподъемности может перевезти весь груз за 32 рейса, а две другие машины – за 5 совместных рейсов. Сколько рейсов сделает машина наибольшей грузоподъемности, чтобы перевезти весь груз?

Пусть Q – груз; k, m, n – число рейсов для каждой машины разной грузоподъемности, причем $32 > k > m > n > 5$.

Тогда $5\left(\frac{Q}{m} + \frac{Q}{n}\right) = Q$, откуда $5(m+n) = mn$ или $(m-5)(n-5) = 25$ и $m = 30, n = 6$.

Следовательно, машина наибольшей грузоподъемности выполнит 6 рейсов.

Пример 4.4. Решить в натуральных числах уравнение $xy = 2011(x+y)$.

Прибавим к обеим частям исходного уравнения число 2011^2 и разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x-2011)(y-2011) = 2011^2. \quad (4.12)$$

Число 2011 простое, поэтому все решения уравнения (4.12) можно получить, решив совокупность следующих систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-2011=1; \\ y-2011=2011^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y-2011=1; \\ x-2011=2011^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-2011=2011; \\ y-2011=2011, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x=2012, y=4046132; \\ x=4046132, y=2012; \\ x=4022, y=4022. \end{array}$$

Следовательно, решением будут следующие пары чисел: (2012; 4046132); (4046132; 2012); (4022; 4022).

Пример 4.5. Решить в целых числах уравнение $2xy - 8y + x - 9 = 0$.

Приведем исходное уравнение к виду

$$2xy - 8y + x - 4 - 5 = 0$$

или к виду

$$2y \cdot (x - 4) + (x - 4) = 5. \quad (4.13)$$

Разложив на множители уравнение (4.13), получим

$$(2y + 1)(x - 4) = 5. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) равносильно решению совокупности следующих систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2y + 1 = 1; \\ x - 4 = 5; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2y + 1 = -1; \\ x - 4 = -5; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2y + 1 = 5; \\ x - 4 = 1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2y + 1 = -5; \\ x - 4 = -1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решим эти системы уравнений, объединим решения и получим следующие пары чисел: $(5; 2)$; $(3; -3)$; $(9; 0)$; $(-1; -1)$.

Пример 4.6. (ЕГЭ, 2010) Найти все целые решения уравнения $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$.

Решим уравнение

$$3x^2 + 4xy - 7y^2 = 0$$

относительно переменной x :

$$x_1 = \frac{-2y + \sqrt{4y^2 + 21y^2}}{3} = y; \quad x_2 = \frac{-2y - \sqrt{4y^2 + 21y^2}}{3} = \frac{-7y}{3}.$$

Разложив левую часть исходного уравнения на множители, получим

$$(x - y)(3x + 7y) = 13, \quad (4.15)$$

где $x - y$ и $3x + 7y$ — целые числа.

Уравнение (4.15) равносильно решению совокупности следующих систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1; \\ 3x + 7y = 13; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1; \\ 3x + 7y = -13; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 13; \\ 3x + 7y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -13; \\ 3x + 7y = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Решив эти системы уравнений, получим следующие пары чисел: $(2; +1)$; $(-2; +1)$.

Пример 4.7. (МГУ, 2003) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$.

Перепишем исходное уравнение в виде $3y^2 + 6xy - xy - 2x^2 = 5$ и разложим его на множители:

$$(3y - x)(y + 2x) = 5. \quad (4.16)$$

Число 5 простое, поэтому уравнение (4.16) равносильно решению совокупности следующих систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3y - x = 1; \\ y + 2x = 5. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 3y - x = -1; \\ y + 2x = -5. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 3y - x = 5; \\ y + 2x = 1. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 3y - x = -5; \\ y + 2x = -1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Исходя из условия целочисленности решения, получим следующие пары чисел: $(2;1)$; $(-2;-1)$.

Пример 4.8. (ЕГЭ, 2010) Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Перепишем исходное уравнение в виде $2x^2 - x - 2xy + 10x + y = 2$.

Разложим его на множители:

$$(1 - 2x)(x - y + 5) = 3. \quad (4.17)$$

Число 3 простое, поэтому уравнение (4.17) равносильно решению совокупности следующих систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x = 1; \\ -y + x + 5 = 3. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x = -1; \\ -y + x + 5 = -3. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x = 3; \\ -y + x + 5 = 1. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x = -3; \\ -y + x + 5 = -1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Целочисленные решения получаются во всех приведенных системах: $(0;2)$; $(-1;3)$; $(1;9)$; $(2;8)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. Решить в целых числах уравнение $5x^2 + 6xy + y^2 = -7$.

Ответ: $(2;-9)$, $(-2;3)$, $(-2;9)$, $(2;-3)$.

Задача 4.2. Решить в целых числах уравнение $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$.

Ответ: $(5;-4)$, $(-13;20)$, $(-5;4)$, $(13;-20)$.

Задача 4.3. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y + 3$.

Ответ: $(2;5)$, $(0;-3)$, $(3;3)$, $(-1;-1)$, $(5;2)$, $(-3;0)$.

Задача 4.4. Решить в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Ответ: $(4;1)$, $(4;-3)$, $(-4;-3)$, $(-4;1)$.

Задача 4.5. Решить в целых числах уравнение $xy + x - 3y = -4$.

Ответ: $(-4;0)$, $(2;6)$, $(4;-8)$, $(10;-2)$.

Задача 4.6. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$ (МГУ, 2003).

Ответ: $(5;6)$, $(13;6)$, $(-5;-6)$, $(-13;-6)$.

Задача 4.7. Решить в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 69$.

Ответ: $(35;34)$, $(13;10)$.

4.2. Сравнение левой и правой частей уравнения по модулю

Пример 4.9. (МГУ, ВМК, устный экзамен, 1997) Решить в целых числах уравнение $x^2 - 7y^2 = 5$.

Представим исходное уравнение в виде

$$x^2 - 5 = 7y^2. \quad (4.18)$$

Правая часть уравнения (4.18) делится на 7, следовательно, и левая его часть должна делиться на 7. Пусть $x = 7t + r$, где остаток $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Подставив в уравнение (4.18) выражение для x с различными значениями r , получим, что левая часть уравне-

ния (4.18) не делится на 7. Таким образом, у исходного уравнения решений нет.

Пример 4.10. Решить в целых числах уравнение $4x + 6y = 9$.
Левая часть исходного уравнения – четное число, а правая – нечетна. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Пример 4.11. Решить в целых числах уравнение $15x - 12y = 7$.
Левая часть исходного уравнения делится на 3, а правая часть не делится на 3. Следовательно, уравнение решений не имеет.

Пример 4.12. Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 1 = 2xy$.
Перепишем исходное уравнение в виде $2x^2 - 2xy = 1$. Левая часть этого уравнения – четное число, а правая – нечетна. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Пример 4.13. Решить в натуральных числах уравнение $2^n + 7 = k^2$.

При k четном ($k = 2t$) и $n > 1$ при делении на 4 правой части исходного уравнения, получим остаток, равный нулю, а при делении на 4 левой части получим остаток, равный 3. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

При k нечетном ($k = 2t + 1$) и $n > 1$ при делении на 4 правой части исходного уравнения, получим остаток, равный единице, а при делении на 4 левой части получим остаток, равный 3. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Пусть $n = 1$, тогда $k = 3$. Это и есть решение уравнения.

Пример 4.14. Существует ли целое число, такое, что $x^3 - 3x^2 + 2x + 2011 = 0$?

Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$x(x-1)(x-2) = -2011. \quad (4.19)$$

Левая часть уравнения (4.19) делится на 6 как произведение трех последовательных чисел, а число 2011 не делится на 6.

Следовательно, целого числа не существует.

Пример 4.15. Решить в целых числах уравнение $21x + 35y = 17$.
Вынесем из левой части исходного уравнения число 7 и получим $7 \cdot (3x + 5y) = 17$. Очевидно, что левая часть этого уравнения кратна 7, а правая – нет.

Следовательно, такое уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 4.16. Найти наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие уравнению $2x - 15 = y^2$.

Перепишем исходное уравнение в виде $2x = 15 + y^2$.

Если есть решение этого уравнения, то его правая часть должна делиться на 2. Пусть $y = 2t + r$, где $r = 0, 1$. Решение получим при $r = 1$ и $y = 2t + 1$.

При $t = 0$ имеем $x = 8$, $y = 1$.

Пример 4.17. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число, т. е. $n = 2k$. Тогда

$$2^m = (3^k - 1)(3^k + 1). \quad (4.20)$$

Правая часть уравнения (4.20) представляет собой произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Отсюда получим $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$. Таким образом, находим $k = 1$ и $n = 2$, а $m = 3$.

Пусть n – нечетное число. Нечетная степень числа 3 при делении на 4 дает остаток, равный 3. Значит, число $3^n - 1$ делится на 4 с остатком, равным 2. Так как при $m \geq 2$ число 2^m делится на 4 без остатка, то равенство $2^m = 3^n - 1$ возможно при $m = 1$ и $n = 1$.

Таким образом, уравнение (4.20) имеет два решения: $n = 2$, $m = 3$ и $m = 1$, $n = 1$.

Пример 4.18. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Пусть n – четное число, т. е. $n = 2k$. Тогда при любом k число $3^{2k} + 1$ при делении на 8 дает остаток, равный 2. При нечетном n , т. е. $n = 2k + 1$, число $3^{2k+1} + 1$ при делении на 8 дает остаток, равный 4.

Поскольку при $m \geq 3$ число 2^m делится на 8 без остатка, то равенство $2^m = 3^n + 1$ возможно при $m = 1$ или $m = 2$.

Если $m = 1$, то число n равно 0 и не является натуральным. Если $m = 2$, то $n = 1$.

Пример 4.19. (ЕГЭ, 2010) Решить в натуральных числах уравнение $2^x - 15 = y^2$.

Пусть x – нечетное число и $x = 2k + 1$. Тогда $2^x = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k}$, причем $2^{2k} = 4^k = (3+1)^k$. Число $(3+1)^k$ при делении на 3 дает в остатке 1. Следовательно, число 2^{2k+1} при делении на 3 дает в остатке 2.

При делении правой части исходного уравнения y^2 на 3 в остатке получим 0 или 1. Докажем последнее утверждение. Пусть $y = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$, тогда $y^2 = 3q + r^2$. Остатки при делении y^2 на 3 будут такими же, как и при делении r^2 на 3. Учитывая возможные значения r , получим, что остаток может быть равным либо 0, либо 1.

Число 15 делится на 3 без остатка, поэтому исходное уравнение при $x = 2k + 1$ решений не имеет.

Пусть $x = 2k$ – четное число. Тогда $2^{2k} - y^2 = 15$. Отсюда

$$(2^k - y)(2^k + y) = 15. \quad (4.21)$$

Поскольку множитель $(2^k + y)$ положительный, то и множитель $(2^k - y)$ положительный.

Уравнение (4.21) равносильно решению совокупности двух систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (2^k - y) = 1; \\ (2^k + y) = 15; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (2^k - y) = 3; \\ (2^k + y) = 5. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решив эти системы, получим следующие пары чисел: $(4;1)$; $(6;7)$.

Пример 4.20. Решить в натуральных числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

Левая часть исходного уравнения при делении на 3 дает остаток, равный 1. В правой части исходного уравнения стоят степени числа 2. Степени числа 2 оканчиваются цифрами 2, 4, 8, 6, а при делении на 3 остаток, равный 1, дают только четные степени, т. е. $n = 2k$.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$3^m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7.$$

Выражение $4^k - 7$, стоящее в правой части этого уравнения, при делении на 4 дает остаток, равный 1.

Остаток, равный 1, дают только четные степени числа 3. Значит, m тоже четное число ($m = 2p$).

$$\text{Таким образом, } 3^{2p} = 2^{2k} - 7 \text{ или } 7 = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p).$$

Учитывая, что оба множителя положительны, получим $2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$, откуда $m = 2$, $n = 4$.

При $m = 0$ имеем $n = 3$.

Следовательно, $m = 2$, $n = 4$.

Пример 4.21. (ЕГЭ, 2010) Решить уравнение в целых числах $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$.

Подберем решение $x = 3, y = 11$ и докажем, что других решений нет.

Исходное уравнение представим в виде

$$x(x+1)(x^2+1)=y^2-1. \quad (4.22)$$

В левой части уравнения (4.22) стоит произведение двух последовательных чисел $x(x+1)$, которое всегда делится на 2. В случае, когда число y четное, правая часть уравнения (4.22) не делится на число 2. В случае, когда число y нечетное, в правой части уравнения (4.22) стоит разность квадратов нечетных чисел, которая всегда делится на 8, а выражение в левой части уравнения (4.22) не делится на 8 при $x > 3$.

Таким образом, $x = 3$; $y = 11$.

Пример 4.22. (ЕГЭ, 2010) Решить в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

Подберем решение $n = 0$, $x = \pm 3$ и докажем, что других решений нет.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2 = 3^n + 6 + 2 = 3q + 2. \quad (4.23)$$

Докажем, что квадрат целого числа не может равняться числу $3q + 2$.

Отметим, что квадрат целого числа k при делении на 3 дает остаток, равный 0 или 1. Действительно, всякое целое число можно с учетом делимости на 3 записать в виде $k = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$. Тогда $k^2 = 9t^2 + 6tr + r^2$; числа k^2 и r^2 дают один и тот же остаток, поскольку $r^2 = 0, 1, 4$. Остатки при делении числа k^2 на 3 будут равны 0 или 1. Следовательно, $k^2 = 3t$ или $k^2 = 3q + 1$ и квадрат целого числа не может равняться $3q + 2$.

Таким образом, $x = 3$, $n = 0$, $x = -3$, $n = 0$.

Пример 4.23. (ЕГЭ, 2010) Решить уравнение в натуральных числах $3^m + 4^n = 5^k$.

Левая и правая части исходного уравнения должны давать один и тот же остаток при делении на 3.

Докажем, что степени числа 5^k при делении на 3 дают остаток, равный 1, если число k четное, и остаток, равный 2, если число k нечетное.

Если число k четное, то $k = 2t$. Тогда $5^{2t} = (3 + 2)^{2t} = 3q + 2^{2t}$, а число 2 в четной степени дает при делении на 3 остаток, равный 1.

Действительно, можно представить число 2 в виде разности $2 = 3 - 1$, тогда $2^{2t} = (3 - 1)^{2t} = 3q_1 + 1$.

Если число k нечетное, то $k = 2t + 1$. Тогда $5^k = (3 + 2)^{2t+1} = 3s + 2^{2t+1}$, а число 2 в нечетной степени при делении на 3 дает остаток, равный 2.

Действительно, $2^{2t+1} = (3 - 1)^{2t+1} = 3s_1 + (-1)^{2t+1} = 3s_1 - 1 = 3s_1 + 2 - 3 = 3(s_1 - 1) + 2$.

Левая часть исходного уравнения при делении на 3 дает остаток, равный 1, поэтому, используя доказанное утверждение, получим, что число k должно быть четным.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$3^m = 5^k - 4^n.$$

Правая часть этого уравнения делится на 4 с остатком, равным 1, поэтому стоящая в левой его части степень 3^m тоже должна давать при делении на 4 остаток, равный 1. Это возможно, когда число m четное. Поэтому $4^n = 5^k - 3^m = 5^{2k_0} - 3^{2m_0}$ или $2^{2n} = (5^{k_0} - 3^{m_0})(5^{k_0} + 3^{m_0})$.

Множители $5^{k_0} - 3^{m_0} = 2^p$ и $5^{k_0} + 3^{m_0} = 2^q$, где p и q — целые неотрицательные числа и $p + q = 2n$, причем $5^{k_0} = \frac{1}{2}(2^p + 2^q)$ и

$$3^{m_0} = \frac{1}{2}(2^p - 2^q) = 2^{p-1} - 2^{q-1}.$$

Число $2^{p-1} - 2^{q-1}$ должно быть нечетным, потому что оно равно степени числа 3. Это выполняется только при $q = 1$. Поэтому

$$3^{m_0} = 2^{p-1} - 1.$$

Число $p-1$ должно быть четным, чтобы правая часть последнего уравнения делилась на 3, т. е. $p-1=2s$, где s – целое число. Тогда $3^{m_0} = (2^s - 1)(2^s + 1)$ – произведение двух множителей, различающихся числом 2 и являющихся степенями числа 3. Эти множители могут быть равны только 1 и 3. Поэтому $s=1$, $2s+1=3$. Таким образом, $m=n=k=2$.

4.3. Окончание частей уравнения на одну и ту же цифру

Основной принцип решения уравнения в целых числах заключается в следующем: левая и правая его части должны оканчиваться на одну и ту же цифру.

Пример 4.24. Решить в целых числах уравнение $x^2 = 5y^2 + 3$.

Очевидно, что число $5y^2$ оканчивается на 0 либо на 5, а число $5y^2 + 3$ оканчивается на 3 либо на 8. Нетрудно убедиться, что x^2 может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9. Значит, левая и правая части исходного уравнения оканчиваются на разные цифры. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

4.4. Метод оценки

Основной принцип этого метода состоит в преобразовании уравнения в целых числах в уравнение с очевидной оценкой. В большинстве случаев уравнение сводится к неотрицательному выражению.

Пример 4.25. Решить в целых числах уравнение $5x^4 - 40x^2 + 2y^6 - 32y^3 = -208$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$5(x^4 - 8x^2 + 16) + 2(y^6 - 16y^3 + 64) = 0.$$

Используя формулы сокращенного умножения, получим

$$5(x^2 - 4)^2 + 2(y^3 - 8)^2 = 0.$$

Поскольку $5(x^2 - 4)^2 \geq 0$ и $2(y^3 - 8)^2 \geq 0$, то решение возможно лишь при $5(x^2 - 4)^2 = 0$ и $2(y^3 - 8)^2 = 0$, что соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0; \\ y^3 - 8 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует $x = \pm 2$; $y = 2$.

4.5. Решение квадратного уравнения относительно одной из переменных

Пример 4.26. Решить в натуральных числах квадратное уравнение $2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

Решим исходное уравнение относительно переменной k :

$$2k^2 + (7 - 2m)k - 3m - 36 = 0;$$

$$D = 49 - 28m + 4m^2 + 24m + 288 = 4m^2 - 4m + 337;$$

$$k_{1,2} = \frac{2m - 7 \pm \sqrt{4m^2 - 4m + 337}}{4}.$$

Поскольку k и $2m - 7$ – целые числа (k и m – натуральные числа по условию), то $\sqrt{4m^2 - 4m + 337}$ является целым числом.

Пусть $L = \sqrt{4m^2 - 4m + 337}$, $L > 0$; L – целое число. Тогда

$$L^2 = 4m^2 - 4m + 337.$$

Решим это квадратное уравнение относительно m :

$$4m^2 - 4m + 337 - L^2 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 4L^2 - 1348 = 4L^2 - 1344; \quad 4m_1 = 2 + 2\sqrt{L^2 - 336};$$

$$4m_2 = 2 - 2\sqrt{L^2 - 336}.$$

Поскольку $4m$ – натуральное число (m – натуральное число по условию), то $\sqrt{L^2 - 336}$ является целым числом.

Пусть ($N = \sqrt{L^2 - 336}$), $N > 0$; N – целое число. Тогда

$$N^2 = L^2 - 336,$$

откуда $(L - N)(L + N) = 336$. Решим это уравнение в натуральных числах (метод решения изложен в примере 4.1).

Получим $L = 25$, $N = 17$ и $k = 9$, $m = 9$.

ГЛАВА 5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ С ФАКТОРИАЛАМИ

Пример 5.1. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 4n - 9 = k^2$.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$n! + 4n = k^2 + 9.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой сумму квадратов двух чисел (одно из них нечетное число 3^2), которая при делении на 4 дает остатки, соответственно равные 1 или 2. Левая часть уравнения делится на 4 при $n \geq 4$.

Следовательно, исходное уравнение при $n \geq 4$ решений не имеет.

Рассматривая натуральные числа $n < 4$, получим решения: $n = 2$, $k = 1$ и $n = 3$, $k = 3$.

Пример 5.2. Решить в натуральных числах уравнение $n! - 3n + 29 = k^2$.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$n! - 3n + 30 = k^2 + 1.$$

Левая часть этого уравнения делится на 3, а правая часть дает остаток, равный 1 и 2. Таким образом, имеем $n = 3, k = 5$.

Пример 5.3. Решить в целых числах уравнение $12 \cdot n! + 11^n + 2 = k^2$.

При $n \geq 5$ факториал $n!$ оканчивается на 0, а любая степень числа 11 оканчивается на 1.

Таким образом, получим, что левая часть исходного уравнения оканчивается на 3, а это невозможно, так как в правой его части стоит квадрат целого числа. Рассмотрим случай $n < 5$: при $n = 1$ левая часть исходного уравнения равна 25, при $n = 2$ – равна 147, при $n = 3$ – равна 1405; при $n = 4$ – равна 14931.

Отсюда следует, что $n = 1, k = \pm 5$.

Пример 5.4. Решить в целых числах уравнение $n! + 6^n + 11 = k^2$.

Решение примера получаем аналогично решению примера 5.2. Следовательно, $n = 2, k = \pm 7$.

Пример 5.5. (ЕГЭ, 2010) Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.

При $n \geq 5$ факториал $n!$ оканчивается на 0, поэтому левая часть исходного уравнения может оканчиваться на 3 или на 8. Однако на эти цифры не может оканчиваться квадрат натурального числа k^2 . Переберем значения числа n ($n < 5$). Получим ответ: $n = 2, k = 5$.

Пример 5.6. (Московская математическая регата, 2003/2004, 11-й класс) Найти все натуральные числа n , для которых выполняется равенство $n^3 - n = n!$.

Запишем исходное уравнение в виде

$$n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1. \quad (5.1)$$

Поскольку $n = 1$ не является решением исходного уравнения, то разделим обе части уравнения (5.1) на $n(n-1)$. Получим

$$(n+1) = (n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1. \quad (5.2)$$

Подставив последовательные натуральные числа n , начиная с $n = 2$, в уравнение (5.2), получим, что решением уравнения является $n = 5$.

Так как для всех $n > 5$ выполняется неравенство $n+1 < 2n-4 = 2(n-2)$, с учетом уравнения (5.2) получим $n+1 < (n-2)2 < (n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1$, поэтому других натуральных решений исходное уравнение не имеет.

Следовательно, исходное уравнение имеет одно решение: $n = 5$.

Пример 5.7. (Московская математическая регата, 2001/2002, 10-й класс) Найти две последние цифры в десятичной записи числа: $1! + 2! + \dots + 2001! + 2002!$.

Факториал $n!$, начиная с $n = 5$, оканчивается на 0, а начиная с $n = 10$ — двумя нулями. Поэтому две последние цифры искомого числа совпадают с двумя последними цифрами суммы первых девяти членов последовательности: $1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 + 362880 = 409113$.

Таким образом, последние цифры — это 1 и 3.

Пример 5.8. (Московская математическая регата, 2009/2010, 11-й класс) Найдите все натуральные решения уравнения $n^2 + 2n - n! = 0$.

Преобразуем исходное уравнение к виду

$$(n+2)n = n! \text{ или } (n-1)! = n+2. \quad (5.3)$$

При $n > 4$ решений уравнения (5.3) нет, так как $(n-1)! > 2(n-1) > n+2$. Подставляя $n = 1, 2, 3, 4$ в уравнение (5.3), получаем, что решением исходного уравнения будет $n = 4$.

Пример 5.9. (Московская математическая регата, 2005/2006, 9-й класс) На какую наибольшую степень числа 3 может делиться сумма вида $1!+2!+3!+\dots+n!$?

Обозначим сумму $1!+2!+3!+\dots+n!=S_n$. Тогда $S_1=1$; $S_2=3$; $S_3=9$; $S_4=33$; $S_5=153$; $S_6=873$; $S_7=5913$; $S_8=46233$.

На число 3^3 делится только S_7 . При $k \geq 9$ число $k!$ делится на число 27. Тогда при $n \geq 9$ сумма $S_n = S_7 + 8! + 9! + 10! + \dots + n!$, где слагаемое $8!$ не делится на 27, а остальные слагаемые делятся; поэтому эта сумма не делится на 27. Получаем ответ $3^3 = 27$.

Пример 5.10. (Московская математическая регата, 2002/2003, 9-й класс) Указать все натуральные числа n , такие, что число $(n-1)!$ делится на n .

Никакое простое число решением являться не может, так как число $(n-1)!$ не содержит простой множитель n .

Пусть n – составное число, большее 5; тогда $n = ab$, где $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, или $n = p^2$, где p – простое число. В первом случае число $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)$ содержит сомножители a и b , значит, число $(n-1)!$ делится на n . Во втором случае, если $n > 5$, число $(n-1)!$ содержит сомножители p и $2p$ (так как $2p < p^2 = n$), т. е. число $(n-1)!$ делится на n . Остается проверить число 4 – единственное составное число, меньшее 5. Оно не является решением, так как число $3! = 6$ не делится на 4.

Таким образом, все составные числа, большие 5, делятся на n .

ЛИТЕРАТУРА

Буфеев С.В. Коллекция задач по арифметике целых чисел. Задания С6 ЕГЭ: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 344 с.

Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. М.: Макс Пресс, 2005. 180 с.

Дэвенпорт Г. Высшая арифметика: Введение в теорию чисел / Пер. с англ. под ред. Ю.В. Линника. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 176 с.

Корянов А.Г. Математика. Уравнения и неравенства в целых числах. <http://alexlarin.narod.ru/>

Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др. М.: АСТ: Астрель, 2010. 318 с.

Хорошилова Е.В. Элементарная математика: Учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч. 1: Теория чисел. Алгебра. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 472 с.

Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 480 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П1. Примеры задач на нелинейные уравнения в целых числах

Пример П1.1. (ЕГЭ, 2010) Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря двумя способами: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причем число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем число рейсов каждого автобуса типа A . В каждом случае автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A ?

Пусть в автобус типа B входит k человек, а в автобус типа A — $k + 7$ человек и каждый из автобусов типа B сделает m рейсов, а каждый из автобусов типа A — $m + 1$ рейсов. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество школьников, получим уравнение

$$3km = 2(k + 7)(m + 1),$$

или

$$km = 14m + 2k + 14,$$

откуда

$$(m - 2)(k - 14) = 42.$$

Делителями числа 42 являются числа 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Перебор всех делителей дает восемь систем уравнений, решив которые, получим возможные решения для чисел k и m : (15;44), (16;23), (17;16), (20;9), (21;8), (28;5), (35;4), (56;3). Для каждой пары чисел найдем количество перевозимых школьников, равное $3km$, а именно: 1980, 1104, 816, 540, 420, 420, 504.

Следовательно, максимальное количество школьников, которое можно перевезти, составляет 1980.

Пример П1.2. (ЕГЭ, 2010) Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакете будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

В первом случае в каждой коробке лежит по 3 пакетика и таких коробок пусть будет x , а в каждом пакете находится по n шариков. Во втором случае коробок будет $x + 2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакете $n + 3$. Из условия примера получим $3nx = 2(n + 3)(x + 2)$, откуда

$$n = \frac{6x + 12}{x - 4} = 6 + \frac{36}{x - 4}.$$

Числа x , n натуральные, поэтому число 36 должно делиться на $x - 4$. Перебрав делители числа 36 (1, 2, 3, 6, 12, 18, 36), получим решение $x = 40$, тогда $3nx = 840$.

Следовательно, наибольшее количество шариков равно 840.

Пример П1.3. (ЕГЭ, 2010) Шарiki можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарiki разложить в пакетики так, что в каждом пакете будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

В первом случае в каждой коробке лежит по 2 пакетика и таких коробок пусть будет x , а в каждом пакете находится по n шариков. Во втором случае коробок будет $x - 2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакете $n - 5$.

Из условия примера получим $2nx = 3(n - 5)(x - 2)$, откуда

$$n = \frac{15x - 30}{x - 6} = 15 + \frac{60}{x - 6}.$$

Числа x , n натуральные, поэтому число 60 должно делиться на $x - 6$.

Перебрав делители числа 60 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30), получим решение $x = 36$, тогда $2nx = 1224$.

Следовательно, наибольшее количество шариков равно 1224.

Пример П1.4. (ЕГЭ, 2010) Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное при указанных условиях значение числа b .

Пусть $a = (\alpha)^2$, $b = (\beta)^2$, $c = (\gamma)^2$, где $\alpha < \beta < \gamma$, $\alpha \geq 32$.

Допустим, что $\beta = \alpha + d$, где d – некоторое число, $d \in \mathbb{Z}$. Из свойства арифметической прогрессии следует, что $2b = a + c$, $2(\alpha + d)^2 = (\alpha)^2 + (\gamma)^2$, или $(\alpha)^2 + 4\alpha d + 4d^2 - (\gamma)^2 = 2d^2$, откуда $(\alpha + \gamma + 2d)(\alpha - \gamma + 2d) = 2d^2$.

Обозначим $\alpha + \gamma + 2d = p$, $\alpha - \gamma + 2d = q$. Разность $p - q = 2\gamma$, а произведение $pq = 2d^2$, поэтому p и q – четные числа.

Тогда $p = 2n$, $q = 2m$, $d = 2t$; $n, m, t \in \mathbb{N}$. Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2d = \frac{p+q}{2} = m+n; \\ \gamma = \frac{p-q}{2} = n-m; \\ nm = 2t^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha = n+m-4t \geq 32; \\ \gamma = n-m \geq 34; \\ nm = 2t^2. \end{cases}$$

По условию примера надо найти наименьшее значение $\beta = n + m - 2t$. Поскольку $m \geq 1$, $n \geq 35$, то $2t^2 = nm \geq 35$ и $t \geq 5$.

С учетом того, что $\beta = \alpha + 2t \geq 32 + 2t$, рассмотрим следующие случаи:

1) $t = 5$, тогда $nm = 50$, $n + m \geq 52$, $n - m \geq 34$, $n \geq 35$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 50$, $m = 1$ и $\beta = 51 - 10 = 41$. Так как $\beta \geq 32 + 2t$, этот случай не подходит;

2) $t = 6$, тогда $nm = 72$, $n + m \geq 56$, $n - m \geq 34$, $n \geq 35$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 72$, $m = 1$ и $\beta = 73 - 12 = 61$. Если $n = 36$, $m = 2$, то $\beta = 38 - 12 = 26$. Число 26 не является решением, так как $\beta \geq 32 + 2t$;

3) $t = 7$, тогда $nm = 98$, $n + m \geq 60$, $n - m \geq 34$, $n \geq 35$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 98$, $m = 1$ и $\beta = 99 - 14 = 85$. Если $n = 49$, $m = 2$, то $\beta = 51 - 14 = 37$. Число 37 не является решением, так как $\beta \geq 32 + 2t$;

4) $t = 8$, тогда $nm = 128$, $n + m \geq 64$, $n - m \geq 34$, $n \geq 35$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 128$, $m = 1$ и $\beta = 129 - 16 = 113$. Если $n = 64$, $m = 2$, то $\beta = 50$. Эти числа могут быть решениями;

5) $t = 9$, тогда $nm = 162$, $n + m \geq 68$, $n - m \geq 34$, $n \geq 35$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 162$, $m = 1$ и $\beta = 163 - 118 = 145$. Если $n = 81$, $m = 2$, то $\beta = 65$. Эти числа могут быть решениями.

Следовательно, наименьшее значение числа $b = (\beta)^2 = (50)^2 = 2500$, при этом $a = (32)^2$, $c = (62)^2$.

Пример П1.5. (ЕГЭ, 2010) Натуральные числа a , b , c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найти наименьшее возможное при указанных условиях значение числа b .

Пусть $a = (\alpha)^2$, $b = (\beta)^2$, $c = (\gamma)^2$, где $\alpha < \beta < \gamma$, $\alpha \geq 23$. Допустим, что $\beta = \alpha + d$, где d – некоторое число, $d \in \mathbb{Z}$. Из свойства арифметической прогрессии следует $2b = a + c$, $2(\alpha + d)^2 = (\alpha)^2 + (\gamma)^2$, или $(\alpha)^2 + 4\alpha d + 4d^2 - (\gamma)^2 = 2d^2$, откуда $(\alpha + \gamma + 2d) \times (\alpha - \gamma + 2d) = 2d^2$.

Обозначим $\alpha + \gamma + 2d = p$, $\alpha - \gamma + 2d = q$. Разность $p - q = 2\gamma$, а произведение $pq = 2d^2$, поэтому p и q – числа четные.

Тогда $p = 2n$, $q = 2m$; $d = 2t$; $n, m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$.

Таким образом, получим

$$\begin{cases} \alpha + 2d = \frac{p+q}{2} = m+n; \\ \gamma = \frac{p-q}{2} = n-m; \\ nm = 2t^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha = n + m - 4t \geq 23; \\ \gamma = n - m \geq 25; \\ nm = 2t^2. \end{cases}$$

По условию примера надо найти наименьшее значение $\beta = n + m - 2t$. Поскольку $m \geq 1$, $n \geq 26$, то $2t^2 = nm \geq 26$ и $t \geq 4$.

С учетом того, что $\beta = \alpha + 2t \geq 23 + 2t$, рассмотрим следующие случаи:

1) $t = 4$, тогда $nm = 32$, $n + m \geq 39$; $n - m \geq 25$, $n \geq 26$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 32$, $m = 1$, $\beta = 33 - 8 = 25$. Число 25 не подходит, так как $\beta \geq 31$;

2) $t = 5$, тогда $nm = 50$, $n + m \geq 43$, $n - m \geq 25$, $n \geq 26$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 50$, $m = 1$, $\beta = 41$. Это число может стать решением;

3) $t = 6$, тогда $nm = 72$, $n + m \geq 47$, $n - m \geq 25$, $n \geq 26$, $m \geq 1$.

Отсюда $\beta = 61$. Это число может стать решением;

4) $t = 7$, тогда $nm = 98$, $n + m \geq 51$, $n - m \geq 25$, $n \geq 26$, $m \geq 1$.

Отсюда $n = 98$, $m = 1$ и $\beta = 85$. Если $n = 49$, $m = 2$, то $\beta = 37$.

Эти числа могут стать решением;

5) $t = 8$, тогда $\beta \geq 23 + 2t \geq 23 + 16 = 39$.

Следовательно, наименьшее значение числа $b = (\beta)^2 = (37)^2 = 1369$, при этом $a = 23^2$; $c = 47^2$.

Пример П1.6. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9$, $b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найти число членов в каждой прогрессии.

Для арифметической прогрессии $a_m = 5 + 3(m - 1)$, $m = 1, \dots, N$ и $b_k = 9 + 5(k - 1)$, $k = 1, \dots, M$.

Согласно условию примера общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению $5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1)$, откуда

$$3m = 5k + 2. \quad (\text{П1.1})$$

Поскольку левая часть уравнения (П1.1) делится на 3, то правая часть тоже должна делиться на 3. При этом $k = 3t - 1$. Тогда $3m = 5(3t - 1) + 2$, т. е. $3m = 15t - 3$, где $1 \leq t \leq L$, L – количество совпадающих членов прогрессий.

Общие члены двух прогрессий сами составляют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 14, и разностью чисел, равной 15, в сумме всех членов этой прогрессии, равной 815.

Следовательно, используя формулу суммы L членов арифметической прогрессии, получим $815 = \frac{(28 + 15(L - 1))L}{2}$ или $15L^2 + 13L - 1630 = 0$. Из этого уравнения найдем $L = 10$.

Подставив $L = 10$ вместо t , получим число членов арифметической прогрессии $N = 5L - 1 = 49$ и $M = 3L - 1 = 29$.

Пример П1.7. Решить в целых числах уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Запишем исходное уравнение в виде

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0,$$

где x, y, z – целые числа. Поскольку правая часть этого уравнения делится на 2, то число x четное. После замены $x = 2x_1$ получим уравнение $8(x_1)^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$. Разделим это уравнение почленно на 2, тогда

$$4(x_1)^3 - y^3 - 2z^3 = 0.$$

Следовательно, и число y четное.

После замены $y = 2y_1$ получим уравнение $4x_1^3 - 8y_1^3 - 2z^3 = 0$. Разделим это уравнение почленно на 2, тогда получим $2x_1^3 - 4y_1^3 - z^3 = 0$.

Следовательно, число z четное.

После замены $z = 2z_1$ получим уравнение $2x_1^3 - 4y_1^3 - 8z_1^3 = 0$. Разделим это уравнение почленно на 2, тогда получим $2x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$, которое имеет такой же вид, как и исходное уравнение.

Выполнив действия, аналогичные изложенным выше, приходим к выводу, что числа x_1, y_1, z_1 также четные. Но это возможно лишь в случае, когда $x = y = z = 0$.

Пример П1.8. (ЕГЭ, 2010) Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Преобразуем уравнение:

$$y(2x - 1) = 2x^2 + 9x - 2.$$

Поскольку x – целое число, то число $2x - 1$ не равно 0, поэтому выразим y через x :

$$y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x - 1} = x + 5 + \frac{3}{2x - 1}.$$

Поскольку x и y – целые числа, то $\frac{3}{2x - 1}$ тоже целое число.

Следовательно, число $2x - 1$ является делителем числа 3.

В результате получим: 1) если $2x - 1 = 1$, то $x = 1$; 2) если $2x - 1 = -1$, то $x = 0$; 3) если $2x - 1 = 3$, то $x = 2$; 4) если $2x - 1 = -3$, то $x = -1$.

Для каждого значения x найдем y и получим ответ: (1;9), (2;8), (0;2), (-1;3).

Пример П1.9. (ЕГЭ, 2010) Решить в целых числах уравнение $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

При $k = 1$ получим уравнение $n^2 = 11$, которое не имеет решений в целых числах, при $k = 0$ – уравнение $n^2 = 4$, откуда $n = \pm 2$.

При $k = -1$ уравнение не имеет решений в целых числах.

При $k < -1$ уравнение не имеет решений в целых числах, так как левая часть данного уравнения принимает значения из промежутка (1;2).

Рассмотрим случай $k \geq 2$. Четные степени числа 2 при делении на 3 дают остаток, равный 1; нечетные степени числа 2 – остаток, равный 2. Отсюда следует, что число $1 + 2^{2k+1}$ делится на 3 без

остатка, а число $1+2^k+2^{2k+1}$ при делении на 3 дает такой же остаток, как и число 2^k , т. е. 1 либо 2. Однако квадраты целых чисел не могут давать при делении на 3 остаток, равный 2. Таким образом, число k четное. Положим $k=2d$, $d \in \mathbb{N}$, и запишем исходное уравнение в виде $1+4^d+2 \cdot 4^{2d}=n^2$, откуда следует, что n – нечетное число, т. е. $n=2x+1$, $x \in \mathbb{N}$. Тогда получим уравнение

$$1+4^d+2 \cdot 4^{2d}=4x^2+4x+1. \quad (\text{П1.2})$$

Преобразуем уравнение (П1.2) к виду

$$4^d(1+2 \cdot 4^d)=4(x^2+x).$$

Обозначив $y=d-1$, $y > 0$, получим следующее уравнение:

$$4^y(1+8 \cdot 4^y)=x(1+x). \quad (\text{П1.3})$$

Уравнение (П1.3) не имеет решений.

Одно из чисел x и $1+x$ четное, и оно делится на 4^y . Представим x в виде $x=m \cdot 4^y$, где m – нечетное число, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$4^y(1+8 \cdot 4^y)=m \cdot 4^y(m \cdot 4^y+1)$$

или

$$1+8 \cdot 4^y=m^2 \cdot 4^y+m.$$

Следовательно,

$$(8-m^2)4^y=m-1. \quad (\text{П1.4})$$

Сравнив знаки левой и правой частей уравнения (П1.4), получим лишь одно нечетное число $m=1$, которое не является решением.

Пусть $x+1=m \cdot 4^y$, где m – нечетное число, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$4^y(1+8 \cdot 4^y)=(m \cdot 4^y-1)m \cdot 4^y$$

или

$$1 + 8 \cdot 4^y = m^2 4^y - m.$$

Следовательно,

$$(m^2 - 8)4^y = m + 1,$$

где выражение $m^2 - 8$ неотрицательное при натуральных числах $m \geq 3$. Если $m = 3$, то $y = 1$ (что приводит к решению исходного уравнения $k = 4; n = \pm 23$). При натуральных числах $m \geq 4$ выполняется неравенство $m^2 - 8 > m + 1$. Отсюда следует, что при этих значениях m решений нет.

Таким образом, $k = 0; n = \pm 2$ или $k = 4; n = \pm 23$.

Пример П1.10. (МГУ, геологический факультет, 2003) Целые числа k, n, m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 21 больше, чем число k , а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m ?

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии, тогда ее члены соответственно равны: $k, n = kq; m = kq^2; k, q \in \mathbb{Z}$. Из условия примера следует, что $m - k = 21$, тогда $k(q^2 - 1) = 21$.

Делителями числа 21 являются числа $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$. Поскольку число $q^2 - 1$ целое и $q^2 \geq 0$, то $q^2 - 1 \geq -1$. Поэтому из делителей числа 21 подходят только положительные числа.

Рассмотрим различные варианты систем уравнений:

$$\begin{cases} k = 1; \\ q^2 - 1 = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 21; \\ q^2 - 1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 3; \\ q^2 - 1 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 7; \\ q^2 - 1 = 3. \end{cases}$$

Из этих систем уравнений целочисленное решение получается только у четвертой системы при $k = 7; q^2 = 4; q = \pm 2$. Но при положительном целом знаменателе $q = 2$ прогрессия будет возрастающей, поэтому $k = 7; q = -2$. Тогда $n = -14; m = 28$ и, следовательно, $k + n + m = 21$.

Пример П1.11. (МГУ, Черноморский филиал, 2003) Для всех значений параметра $b \in (2; 4)$ найти все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $x^2 - 3xy + 2y^2 = b$.

Из условия примера следует, что b – целое число, равное 3. Разложив левую часть исходного уравнения на множители, получим $(x - 2y)(x - y) = 3$. Таким образом, последнее уравнение равносильно совокупности четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 1; \\ x - y = 3; \end{cases} \begin{cases} x - 2y = 3; \\ x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x - 2y = -1; \\ x - y = -3; \end{cases} \begin{cases} x - 2y = -3; \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решения этих систем уравнений следующие: $(5; 2)$, $(-1; -2)$, $(-5; -2)$, $(1; 2)$.

Пример П1.12. (ЕГЭ, 2010) Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x = 1$ являются простыми числами. Найти значения параметров a, b и корни трехчлена $f(x)$.

Обозначим $3a + 10 = p, 5b - 14 = q$. Тогда значение трехчлена при $x = 1$ равно $f(1) = 1 + p + q$. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена, причем $x_1 < x_2$. По теореме Виета $x_1 x_2 = q$, $x_2 + x_1 = -p$.

Запишем выражение $f(1)$ в виде $f(1) = 1 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2$ и преобразуем его, разложив правую часть на множители: $f(1) = 1 - x_1 + x_2(x_1 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Поскольку $f(1)$, x_1 , x_2 по условию примера являются простыми числами, то числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ натуральные и меньшее из них должно быть равным 1. Следовательно, $x_1 - 1 = 1$, откуда $x_1 = 2$. Тогда $f(1) = x_2 - 1$, т. е. $x_2 - 1$ и x_2 – два последовательных простых числа, что возможно только, если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2 = 3$, поэтому $p = 3a + 10 = -5$, $q = 5b - 14 = 6$. Из двух последних равенств получим $a = -5$, $b = 4$.

Пример П1.13. (ЕГЭ, 2010) Найти все целые числа a и b , такие, что корни уравнения $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ являются раз-

личными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ – простыми числами.

Обозначим корни квадратного уравнения x_1 и x_2 . По теореме Виета $x_1x_2 = 3b+5$ – простое число. Если $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm(3b+5)$, то $2a+9 = \pm(3b+6) = \pm 3(b+2)$. Поскольку $2a+9$ – простое число, то $2a+9 = 3$ и $a = -3$. Тогда $b+2 = 1$ и $b = -1$.

Таким образом, $a = -3$, $b = -1$.

Пример П1.14. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары натуральных чисел k и n , таких, что $k < n$ и $(n)^k = (k)^n$.

Прологарифмируем исходное уравнение, тогда $k \ln n = n \ln k$, или $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, где $x > 0$.

Производная этой функции равна $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Поскольку $f'(x) \leq 0$ при $x \geq e$ и $f'(x) \geq 0$ при $0 < x \leq e$, то функция $f(x)$ возрастает на $(0; e]$ и убывает на $[e; \infty)$. График функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ представлен на рис. П1.1.

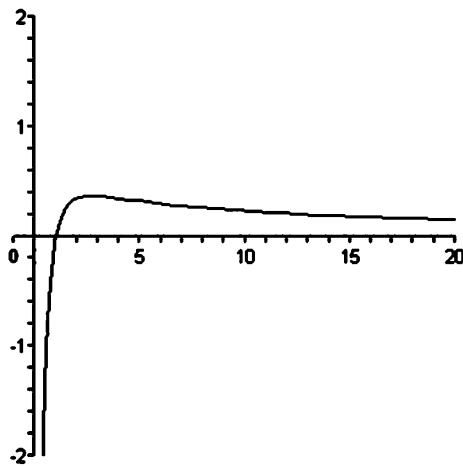


Рис. П1.1. График функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Поскольку $k < n$, равенство $f(n) = f(k)$ может выполняться только при условии $k < e < n$. Отсюда следует, что $k = 1$ или $k = 2$, причем для каждого числа k может найтись не более одного значения n , удовлетворяющего исходному уравнению. Если $k = 1$, то получим $n = 1$. Но по условию примера $k < n$. Если $k = 2$, то получим $(n)^2 = (2)^n$ и найдем решение $n = 4$.

Следовательно, $k = 2$.

Пример П1.15. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары натуральных чисел k и n , таких, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n$.

Исходное уравнение приведем к виду $(n)^k = (k)^n$. Таким образом, получим условие примера П1.14.

Следовательно, $k = 2$, $n = 4$.

Пример П1.16. (ЕГЭ, 10-й класс, 2010) Найти все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции $y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Исходная функция определена и непрерывна для всех действительных x .

Выделим целую часть функции: $y = 1 - \frac{2x + 6 - a}{6 + x^2}$. Отсюда следует, что для любого значения параметра a единица входит в множество значений y . Чтобы единица была ровно одним целым числом, необходимо условие $y \in (0; 2)$. Таким образом, получим

$$0 < 1 - \frac{2x + 6 - a}{6 + x^2} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0; \\ x^2 + 2x + 12 - a > 0. \end{cases}$$

Поскольку эти неравенства должны выполняться при всех значениях x , параметр a найдем из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 - a < 0; \\ 1 - 12 + a < 0. \end{cases}$$

Отсюда получим $1 < a < 11$.

Пример П1.17. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166; \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Выделив полные квадраты, получим систему неравенств

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15; \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Из первого неравенства этой системы следует, что $(x-9)^2 < 15$. Поэтому значения x , удовлетворяющие последнему неравенству, могут быть равны 8, 9, 10, 11, 7, 6, 12, т. е. $6 \leq x \leq 12$. Аналогично из второго неравенства системы найдем $(x-16)^2 < 21$ ($x = 15, 16, 17, 18, 14, 13, 19, 12, 20$), т. е. $12 \leq x \leq 20$, откуда $x = 12$. Подставив значение $x = 12$ в систему неравенств, получим

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6; \\ (y+6)^2 < 5, \end{cases} \quad y \in \mathbb{Z}.$$

Из первого неравенства полученной системы следует, что значение y , удовлетворяющее этому неравенству, может быть равно -7 и -8 . Из второго неравенства системы определим возможные значения y , равные $-5, -8$, откуда $y = -8$.

Таким образом, $x = 12, y = -8$.

Пример П1.18. (ЕГЭ, 2010) Найти все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0; \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Выделим полные квадраты:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2}; \\ x+2y < \frac{15}{2}, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Оба слагаемых первого неравенства этой системы могут быть равны 0 или одно из них равно 0, а второе равно 1. Подберем возможные решения: $(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$, $(-6; 8)$. С учетом второго неравенства получим решение: $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

П2. Примеры задач, предлагаемых на математических олимпиадах в различных вузах

Пример П2.1. (Государственный университет управления) Найти все значения параметра a , при которых среди решений неравенства

$$2|x-7+a| - |2x-a-5| + 3|3-a| \leq 0 \quad (\text{П2.1})$$

имеется ровно два натуральных числа.

На рис. П2.1 представлено множество решений неравенства (П2.1) на координатной плоскости aOx . Оно обозначено двойной штриховкой. Два натуральных числа $x=1$ и $x=2$ являются решениями неравенства (П2.1) при $a \in (4; 5]$.

Пример П2.2. (Олимпиада МАДИ) Найти максимальное натуральное число n , при котором число $13n^2 + 14n + 13$ делится на $n-15$ без остатка.

Преобразуем исходное выражение: $13n^2 + 14n + 13 = 13n + 209 + \frac{3148}{n-15}$.

Отсюда следует $n-15 = 3148$ и $n = 3163$.

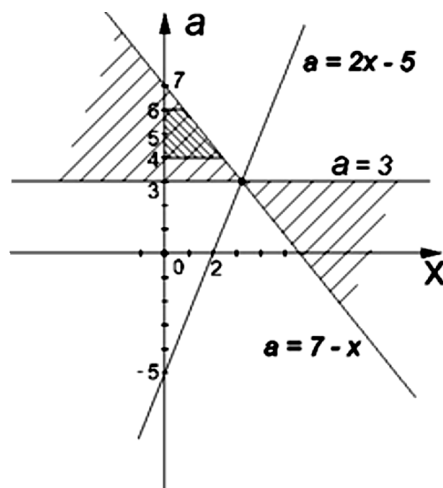


Рис. П2.1. Изображение на координатной плоскости aOx множества всех точек (x, a) , значения которых удовлетворяют заданному уравнению

Пример П2.3. (Олимпиада МАДИ) При каком наибольшем целом значении параметра a графики функций $f(x) = x^3 - 6x - 10$ и $g(x) = ax + 6$ имеют наименьшее число общих точек?

График функции $g(x) = ax + 6$ представляет собой прямую, проходящую через точку с координатами $(0; 6)$. График функции $f(x) = x^3 - 6x - 10$ приведен на рис. П2.2.

При $a = 0$ прямая $g(x)$ параллельна оси Ox и пересекает график функции $y = f(x)$ в одной точке. При увеличении значения параметра a прямая $y = g(x)$ поворачивается против хода часовой стрелки. При этом общая точка обоих графиков будет единственной до тех пор, пока прямая $g(x) = ax + 6$ не будет касаться графика функции $y = f(x)$. В этом случае графики будут иметь две общие точки. Определим значение параметра a , при котором прямая $g(x) = ax + 6$ является касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 6x - 10$. Для этого напишем уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке с абсциссой, равной x_0 :

$$y = x_0^3 - 6x_0 - 10 + (3x_0^2 - 6)(x - x_0). \quad (\text{П2.2})$$

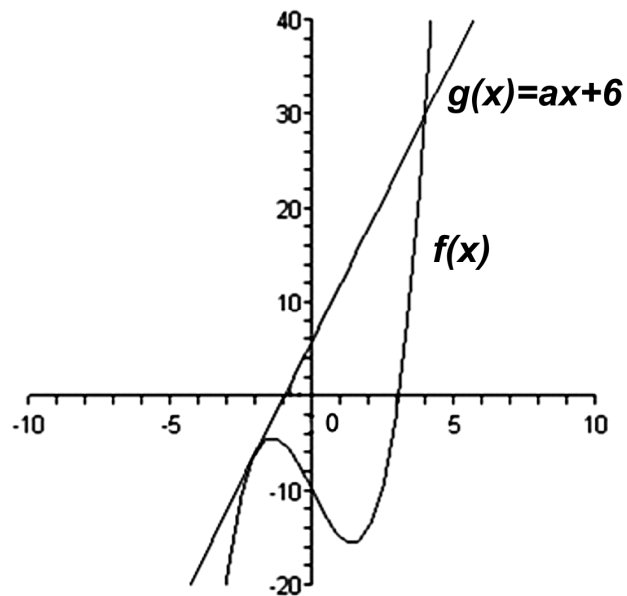


Рис. П2.2. Графики функций $f(x)$ и $g(x)$

Преобразуем уравнение (П2.2):

$$y = (3x_0^2 - 6)x - 2x_0^3 - 10.$$

Эта касательная совпадает с графиком функции $g(x) = ax + 6$, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} 3x_0^2 - 6 = a; \\ -2x_0^3 - 10 = 6. \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

Решение второго уравнения системы (П2.3):

$$x_0 = -2. \quad (\text{П2.4})$$

Подставив выражение (П2.4) в первое уравнение системы (П2.3), получим $a = 6$.

Таким образом, при $a = 6$ графики исходных функций имеют две общие точки, а при $a < 6$ – единственную точку.

По условию примера необходимо выбрать наибольшее целое значение параметра a , при котором графики приведенных функций имеют наименьшее число общих точек. Как было указано выше, наименьшее число общих точек, равное одной точке, достигается при $a < 6$. Следовательно, наибольшее целое значение параметра $a = 5$.

Пример П2.4. (Олимпиада МИФИ) Разность цифр двузначного натурального числа A равна 4, а сумма квадратов цифр этого числа больше произведения его цифр на 37. Найти число A .

Пусть a и $a + 4$ – цифры двузначного числа A . Тогда $a^2 + (a + 4)^2 = a(a + 4) + 37$, откуда $a^2 + 4a - 21 = 0$ и $a = 3$.

Таким образом, $A = 37$ или $A = 73$.

Пример П2.5. (Олимпиада МИФИ) Двузначное число больше квадрата цифры единиц на 4. Если исходное число разделить на цифру его десятков, то в частном получится число 11, а в остатке – 2. Найти исходное число.

Пусть a – цифра десятков, а b – цифра единиц. Согласно условию примера получим систему уравнений

$$\begin{cases} a10 + b = b^2 + 4; \\ a10 + b = 11a + 2. \end{cases}$$

Решением этой системы являются: $a = 6, b = 8$ и $a = 1, b = 3$.

Таким образом, двузначное число равно 68 или 13.

Пример П2.6. (Олимпиада МТУСИ) Доказать, что выражение $1994 \cdot 1995 \cdot 1996 \cdot 1997 + 1$ является квадратом целого числа.

Обозначим $n = 1994$, тогда $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n(n+3)) \times ((n+1)(n+2))+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$, что и требовалось доказать.

Пример П2.7. Найти целочисленное решение системы неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 2y \leq x + 7; \\ x + 4y + 4 \leq 0; \\ x + 7y + 5 \geq 0. \end{cases}$$

На рис. П2.3 представлено решение системы неравенств на координатной плоскости xOy . Таким образом, решением являются две точки с координатами $(-5; 0)$, $(-4; 0)$.

Пример П2.8. (Олимпиада Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина) Сколько целых чисел входит в область решений неравенства $\log_{x-156} 7 > \log_x 49$?

Перейдя к основанию, равному e , получим неравенство, которое равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x > 156; \\ x \neq 157; \\ \frac{\ln 7}{\ln(x-156)} - \frac{2\ln 7}{\ln x} > 0. \end{cases}$$

Перейдем к совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{cases} \ln x > \ln(x-156)^2; \\ \ln(x-156) > 0; \\ \ln x < \ln(x-156)^2; \\ \ln(x-156) < 0, \end{cases} \right.$$

· 2y - 7

$\overrightarrow{y}$

на ко-
мно-
ля ко-
инным

откуда $\begin{cases} x \in (157; 169); \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

Число целых чисел, входящих в промежуток $(157; 169)$, равно 11.

Пример П2.9. (Олимпиада Санкт-Петербургского государственного технического университета) Сколько целых чисел содержится в арифметической прогрессии длиной $n = 100$, если известно, что ее первый член $a_1 = \frac{1}{7}$, а ее разность $d = \frac{2}{7}$?

Вычислим $a_n = a_1 + d(n-1) = \frac{199}{7}$ при $n = 100$.

Целые значения принимают члены арифметической прогрессии с номерами $n = 4, n = 11, n = 18, n = 25$ и так далее через каждые 7 номеров.

Всего таких членов для $n < 100$ получится 14.

Пример П2.10. (Олимпиада Санкт-Петербургского государственного технического университета) При каких целых значениях n неравенство $nx^2 - 2nx - 2 < 0$ выполняется для всех действительных x ?

Из условия примера следует, что при $n \leq 0$ дискриминант квадратного трехчлена должен быть отрицательным: $n^2 + 2n < 0$.

Отсюда получим ответ: $\{0, -1\}$.

Пример П2.11. (Олимпиада Саратовского государственного университета) Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $\frac{8}{3}$, а, кроме того, разность искомого числа и числа, записанного теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

Пусть a – цифра десятков и b – цифра единиц. Тогда из условия примера следует система уравнений

$$\begin{cases} a10 + b = \frac{8}{3}ab; \\ (a10 + b) - (b10 + a) = 18, \end{cases}$$

откуда $8b^2 - 17b - 60 = 0$ и $b = 4$, $a = 6$.

Таким образом, искомое число равно 64.

Пример П2.12. (Олимпиада МФТИ) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$.

Перепишем исходное равенство и выделим целую часть:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 7}{x - 3} = \frac{x^2(x - 3) - 3x(x - 3) + 4(x - 3) + 19}{x - 3} = \\ &= x^2 - 3x + 4 + \frac{19}{x - 3}. \end{aligned}$$

Так как число y является целым, то дробь $\frac{19}{x - 3}$ должна быть целым числом. Тогда $x - 3 = 1$, либо $x - 3 = -1$, либо $x - 3 = 19$, либо $x - 3 = -19$.

Отсюда найдем $x = 4$, $y = 27$, или $x = 2$, $y = -17$, или $x = 22$, $y = 423$, или $x = -16$, $y = 307$.

Таким образом, ответом являются следующие пары чисел: $(4; 27), (2; -17), (22; 423), (-16; 307)$.

Пример П2.13. (Олимпиада МГУ, географический факультет) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $5y = 2x^2 - 7x + 3$, и доказать, что для каждой такой пары разность $x^2 - y^2$ является нечетным числом.

Исходное уравнение имеет решение, когда правая его часть делится на 5. Пусть $x = 5t + r$, где остаток $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

Вычислим правую часть исходного уравнения для указанных значений r . Если $r = 3$, то правая часть исходного уравнения делится на 5.

Тогда $x = 5t + r$ и $y = 10t^2 + 5t$.

Если x — нечетное число, то число $y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{5}$ будет четным, и, наоборот, если число x четное, то число y нечетное. То

есть x и y – числа разной четности, поэтому $x^2 - y^2$ является нечетным числом.

Следовательно, ответом будет пара чисел $(5t + 3; 10t^2 + 5t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Пример П2.14. (Олимпиада МФТИ) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 3y - 2x < 45; \\ x + y > 24; \\ 3x - y < 3. \end{cases}$$

Умножив третье неравенство исходной системы на 3 и сложив его с первым неравенством, получим $x < \frac{54}{7}$.

Перепишем второе неравенство:

$$-3x - 3y < -72. \quad (\text{П2.5})$$

Сложив неравенство (П2.5) с первым неравенством исходной системы, получим $-5x < -27$; $x > \frac{27}{5}$. Следовательно, $5 < x \leq 7$ или $x = 6, x \leq 7$.

Условию исходной системы удовлетворяют $x = 6, y = 19$ и $x = 7; y = 19$.

Пример П2.15. (Олимпиада МФТИ) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4; \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение исходной системы к виду

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

откуда следует

$$\begin{cases} (x-2)^2 \leq 1; \\ (y-1)^2 \leq 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |x-2| \leq 1; \\ |y-1| \leq 1. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений являются числа $x = 1, 2, 3$; $y = 0, 1, 2$. Из них исходной системе уравнений удовлетворяют только пары чисел $(2;0)$ и $(2;2)$.

Пример П2.16. (МГУ, механико-математический факультет, 2003) Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Пусть d – разность исходной прогрессии и $a_1, a_2, \dots \in Z$, $d \in Z$. Согласно условию примера

$$\begin{aligned} & |(a_8 + \dots + a_{14}) - (a_1 + \dots + a_7)| = \\ & = |(a_8 - a_1) + (a_9 - a_2) + \dots + (a_{14} - a_7)| = \\ & = |7 \cdot 7d| = |49d| < 400, \end{aligned}$$

откуда следует $|d| < \frac{400}{49} \leq 8$.

По условию примера $S_6 - S_5 > 3$, т. е. $a_6 > 3$ или $a_6 \geq 4$, аналогично $S_6 - S_7 > 3$, т. е. $-a_7 > 3$ или $a_7 < -3$ и $a_7 \leq -4$.

Поскольку $d = a_7 - a_6$, то $d \geq -8$. Тогда $a_6 = 4$, $a_7 = -4$ и $a_1 = a_6 - 5d = 44$. Но, как получено выше, $|d| \leq 8$, следовательно, $d = -8$, $a_1 = 44$.

Пример П2.17. (МГУ, факультет ВМК, устный экзамен) Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Рассмотрим сумму $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Пусть $n = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$. Тогда $3n(n^2 + 2) = 3(3t + r)(9t^2 + 6tr + r^2 + 2) = 3(3q + r^3 + 2r)$, где $q = 9t^3 + 9t^2r + 3tr^2 + 2t$.

Подставив в последнее выражение различные значения для r , получим, что число $r^3 + 2r$ делится на число 3 для всех $r = 0, 1, 2$, что и требовалось доказать.

Пример П2.18. (МГУ, факультет ВМК, устный экзамен) Каждое из целых чисел n, m, k не делится на 3. Доказать, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на 3.

Известно, что квадрат целого числа при делении на 3 дает остаток, равный 1.

Если представить число $n = 3t + r$, где $r = 0, 1, 2$, то $n^2 = 9t^2 + 6tr + r^2$.

Последнее выражение при делении на 3 дает остаток $r = 1$ или $r = 2$. А поскольку исходных чисел три и каждое дает в остатке 1, то сумма остатков равна 3, т. е. число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на 3, что и требовалось доказать.

Пример П2.19. (Олимпиада «Ломоносов–2008») Найти все натуральные числа n , удовлетворяющие уравнению $2002 \left[n\sqrt{1001^2 + 1} \right] = n \left[2002\sqrt{1001^2 + 1} \right]$, где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа x .

Пусть $\sqrt{1001^2 + 1} = 1001 + \alpha$. Тогда

$$0 < \alpha = \sqrt{1001^2 + 1} - 1001 = \frac{1}{\sqrt{1001^2 + 1} + 1001} < \frac{1}{2002}.$$

Поскольку $1001 < \sqrt{1001^2 + 1}$, то $2002 \cdot 1001 < 2002 \cdot \sqrt{1001^2 + 1}$ и $2002 \cdot \sqrt{1001^2 + 1} = 2002 \cdot 1001 + 2002 \cdot \alpha$. Как получено выше, $\alpha < \frac{1}{2002}$, поэтому $2002 \cdot \sqrt{1001^2 + 1} < 2002 \cdot 1001 + 1$, т. е. $\left[2002 \sqrt{1001^2 + 1} \right] = 2002 \cdot 1001$.

Исходное уравнение принимает вид

$$2002 \left[n \sqrt{1001^2 + 1} \right] = 2002 \cdot 1001n \quad \text{или} \quad \left[n \sqrt{1001^2 + 1} \right] = 1001n.$$

Это значит, что $1001n < n \sqrt{1001^2 + 1} < 1001n + 1$. Отсюда

$$n < \frac{1}{\sqrt{1001^2 + 1} - 1001}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\sqrt{1001^2 + 1} - 1001} = \sqrt{1001^2 + 1} + 1001.$$

Поскольку согласно исходному уравнению $\sqrt{1001^2 + 1} = 1001 + \alpha$, то $\frac{1}{\sqrt{1001^2 + 1} - 1001} = 2002 + \alpha$.

Следовательно, $n \leq 2002$, т. е. $n = 1, 2, \dots, 2002$.

Пример П2.20. (МГУ, факультет ВМК, 2009) Найти все натуральные числа n, m, k, l , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} nm + kl = 13; \\ nk - ml = 6. \end{cases}$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнений исходной системы получим

$$\begin{cases} n^2 m^2 + 2nmkl + k^2 l^2 = 169; \\ n^2 k^2 - 2nmkl + m^2 l^2 = 36, \end{cases}$$

откуда $n^2m^2 + k^2l^2 + n^2k^2 + m^2l^2 = 205$ или $(m^2 + k^2)(n^2 + l^2) = 5 \cdot 41$.

Так как числа n, m, k, l – натуральные числа, можно найти их значения, решив совокупность двух систем уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 + k^2 = 5; \\ n^2 + l^2 = 41; \end{array} \right. \quad (\text{П2.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 + k^2 = 41; \\ n^2 + l^2 = 5. \end{array} \right. \quad (\text{П2.7})$$

Система уравнений (П2.6) дает следующие решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1; \\ m = 2; \\ l = 4; \\ n = 5; \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1; \\ m = 2; \\ l = 5; \\ n = 4; \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2; \\ m = 1; \\ l = 4; \\ n = 5; \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2; \\ m = 1; \\ l = 5; \\ n = 4. \end{array} \right\}$$

Полученные решения должны удовлетворять исходной системе уравнений. Проверка показывает, что подходит только решение

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 2; \\ m = 1; \\ l = 4; \\ n = 5. \end{array} \right.$$

Аналогично из системы уравнений (П2.7) получим решения

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 5; \\ m = 4; \\ l = 1; \\ n = 2. \end{array} \right.$$

Таким образом, $n = 5$, $m = 1$, $k = 2$, $l = 4$ или $n = 2$, $m = 4$, $k = 5$, $l = 1$.

Пример П2.21. (Московский педагогический государственный университет) Если из натурального двузначного числа вычесть 63, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число, если цифра десятков, уменьшенная на 1, в 4 раза больше цифры единиц числа.

Если x – цифра десятков, а y – цифра единиц, то условие примера запишется в виде

$$\begin{cases} x10 + y - 63 = y10 + x; \\ x = 4y + 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $y = 2$, $x = 9$.

Следовательно, искомое число равно 92.

Пример П2.22. (Олимпиада МГУ «Абитуриент–2008») Найти целые корни уравнения $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0$.

По теореме Виета $x_1 x_2 = 2(\sqrt{3} - 1)$; $x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + 2$.

Отсюда следует $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{3} - 1$.

Целым корнем является число 2.

Пример П2.23. (МГУ, экономический факультет) Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества золотых монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 монет?

Пусть n – количество монет, $n \leq 500$, а x, y, z – количество пиратов при первом, втором и третьем дележе соответственно. Тогда по условию примера имеем

$$n = 13x + 8; \tag{П2.8}$$

$$n = 11y + 3; \quad (\text{П2.9})$$

$$n = 8z + 5. \quad (\text{П2.10})$$

Приравняв уравнения (П2.8) и (П2.9), получим $13(x - 3) = 11(y - 4)$, приравняв уравнения (П2.9) и (П2.10), получим $8(z + 3) = 11(y + 2)$.

Отсюда $y = 13t + 4$ или $y = 8k - 2$.

Приравняем значения переменной y : $13t + 4 = 8k - 2$, получим $t = 8 + 2p$, $k = 4 + 13p$.

Подставим эти значения переменной t в уравнение (П2.9):

$$n = 11y + 3 = 11(13t + 4) + 3 = 11(13(8 + 2p) + 4) + 3 \leq 500.$$

Решив последнее неравенство, получим $p = 0$ и $n = 333$.

Пример П2.24. (МГУ, Черноморский филиал) Пообедав в кафе, приятели решили поделить расходы поровну. Если каждый внесет по 20 гривен, то для оплаты обеда не хватит 36 гривен. Если же каждый внесет по 27 гривен, то им не хватит 8 гривен. Сколько было приятелей и сколько стоил обед?

Пусть n – количество приятелей, тогда обед стоит $20n + 36 = 27n + 8$.

Отсюда $n = 4$, а обед стоит $20 \cdot 4 + 36 = 116$.

Следовательно, было 4 человека, обед стоил 116 гривен.

Пример П2.25. (МГУ, геологический факультет, устный экзамен) Решить в целых числах уравнение $9^x - 12y = 1$.

При $x = 0$ и $y = 0$ является решением. Левая часть исходного уравнения делится на 3, а правая – нет, поэтому исходное уравнение не имеет решений в целых числах при $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Пример П2.26. (Олимпиада МГУ «Абитуриент–2008») Целые числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, а числа $5x - 4, y^2, 3z + 2$ – арифметическую прогрессию. Найти x, y, z .

По условию примера получим

$$\begin{cases} y^2 = xz; \\ 2y^2 = 5x + 3z - 2, \end{cases} \quad x, y, z \in Z. \quad (\text{П2.11})$$

Подставим первое уравнение системы (П2.11) во второе уравнение: $2xz = 5x + 3z - 2$ или $2zx - 3z = 5x - 2$, т. е. $z(2x - 3) = 5x - 2$, откуда $z = \frac{5}{2} + \frac{11}{2(2x - 3)}$ и $2z = 5 + \frac{11}{2x - 3}$.

Из условия целочисленности z получим $\frac{11}{2x - 3} \in Z$.

Следовательно, число $2x - 3$ является делителем числа 11.

Поскольку 11 – простое число, то делители у него равны ± 1 или ± 11 . Решив уравнения $2x - 3 = \pm 1$ и $2x - 3 = \pm 11$, с учетом того, что $xz > 0$, получим $x = 2, z = 8$ и $x = 7, z = 3$. Произведение xz должно быть квадратом целого числа y из первого уравнения системы (П2.11), поэтому подходит только $x = 2, z = 8$, и тогда $y = \pm 4$.

Ответом являются числа $x = 2, z = 8, y = 4, x = 2, z = 8, y = -4$.

Пример П2.27. (МГУ, факультет государственного управления, 2009) Строительная компания получила заказ на строительство 60 двухэтажных и 20 трехэтажных коттеджных домов. Каждая из 22 строительных бригад затрачивает на строительство 5 двухэтажных домов время, за которое она могла бы построить 3 трехэтажных дома. Сколько бригад следует выделить для строительства домов каждого типа, чтобы выполнить заказ за наименьшее время при условии, что все бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята строительством домов одного типа?

Пусть время, затрачиваемое одной бригадой на строительство одного двухэтажного коттеджа, равно x , а время, затрачиваемое одной бригадой на строительство одного трехэтажного коттеджа, равно y ; количество бригад, строивших двухэтажные дома, равно n , тогда количество бригад, строивших трехэтажные дома, равно $22 - n$. Все двухэтажные дома будут изготовлены за время, равное

$t_1 = \frac{60x}{n}$, а на все трехэтажные коттеджи будет затрачено время, равное $t_2 = \frac{20y}{22-n}$. По условию примера получим

$$5x = 3y. \quad (\text{П2.12})$$

Требуется найти такое распределение бригад (число бригад для строительства каждого типа домов), чтобы время выполнения заказа было наименьшим.

С учетом (П2.12) запишем $t_1 = \frac{36y}{n}$, $t_2 = \frac{20y}{22-n}$.

Исходя из условия, получим $t_1 = t_2$, $\frac{36y}{n} = \frac{22y}{22-n}$ и $\frac{18}{n} = \frac{11}{22-n}$,

откуда $n = \frac{396}{29} = 13\frac{19}{29}$.

На рис. П2.4 представлены графики функций $\frac{18}{n}$ и $\frac{11}{22-n}$.

Поскольку n – целое число, то $n = 14$, а $22 - n = 8$. Получили ответ: 14 и 8 бригад.

Пример П2.28. (МГУ, Черноморский филиал, 2009) Девяносто писем разложили по тринадцати ячейкам. В каждой ячейке оказалось по крайней мере по одному письму. Показать, что по меньшей мере в две ячейки попало одинаковое число писем.

Допустим противное. Пусть в каждую ячейку попало разное число писем, тогда общее число писем во всех ячейках равно $1 + 2 + \dots + 13 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 91$, т. е. получили писем больше, чем 90. Таким образом, наше предположение неверно и по меньшей мере в две ячейки попало одинаковое число писем, что и требовалось доказать.

Пример П2.29. (Олимпиада МФТИ, 2004) Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $-3xy + 10x - 16y + 45 = 0$.

Выразим из исходного уравнения значение

$$x = \frac{16y - 45}{10 - 3y} = -5 + \frac{y + 5}{10 - 3y}.$$

Выражение $\frac{y + 5}{10 - 3y}$ должно быть целым числом.

Умножив обе части равенства $x = -5 + \frac{y + 5}{10 - 3y}$ на число 3 и преобразовав его, получим

$$3x = -15 - 1 + \frac{25}{-3y + 10}.$$

Дробь $\frac{25}{-3y + 10}$ должна быть целым числом. Делители числа 25 следующие числа: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$. Перебрав все делители числа 25, получим решения: $x = 3, y = 3$; $x = -7, y = 5$; $x = -5, y = -5$, т. е. ответом будут пары чисел $(3; 3); (-7; 5); (-5; -5)$.

Пример П2.30. (МГУ, ИСАА) Определить сумму всех таких натуральных чисел n , для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

Разложим числа на простые множители: $3920 = 2^4 7^2 5$, $4320 = 2^5 3^3 5$.

По условию число 3920 должно делиться на n , а число 4320 – на $n + 7$. Числа n и $n + 7$ делятся на 7, а число 4320 не делится на 7, поэтому число n будем искать в виде $2^k 5^t$, где $k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $t = \{0, 1\}$.

Теперь переберем все делители, проверив делимость числа 4320 на $n + 7$. При $t = 0$ получим $n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$; $n + 7 =$

$= \{8, 9, 11, 15, 23, 37\}$. Из этих чисел подходящими парами являются $(1; 8)$, $(2; 9)$, $(8, 15)$.

При $t = 1$ получим $n = \{5, 10, 20, 40, 80, 160\}$; $n + 7 =$ Из чисел n и $n + 7$ подходящими парами будут $(5; 12)$, $(20; 27)$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют лишь $n = 1, 2, 8, 5, 20$. Их сумма равна 36.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Основные понятия	3
1.1. Признаки делимости натуральных чисел 3, 4, 8, 9, 11	
1.2. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное	
Глава 2. Диофантовы уравнения	15
2.1. Однородные линейные уравнения	15
2.2. Неоднородные линейные уравнения	16
Глава 3. Дробно-рациональные уравнения	23
Глава 4. Нелинейные уравнения	25
4.1. Разложение на множители	26
4.2. Сравнение левой и правой частей уравнения по модулю	32
4.3. Окончание частей уравнения на одну и ту же цифру	39
4.4. Метод оценки	39
4.5. Решение квадратного уравнения относительно одной из переменных	40
Глава 5. Задачи с факториалами	41
Литература	45
Приложения	46

Учебное издание

Латанова Нина Ивановна
Власова Алла Петровна
Евсеева Наталья Владимировна

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ**

Учебное пособие

Редактор *Королева О.М.*
Корректор *Е.В. Авалова*
Компьютерная верстка *А.Ю. Ураловой*

Подписано в печать 16.10.2012. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 4,65. Тираж 300 экз. Изд. № 101. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

Для заметок

Для заметок