

21.3
313
Министерство высшего и среднего специального образования СССР

— • —
Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

С. И. МАСЛЕННИКОВА, С. С. НИКОЛАЕВ

**ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие по курсу ТОЭ

6243
14-315
Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

С.И.Масленникова, С.С.Николаев

Утверждено
редсоветом МВТУ
как учебное пособие

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие по курсу ТОЭ

Под редакцией Ю.А.Осокина

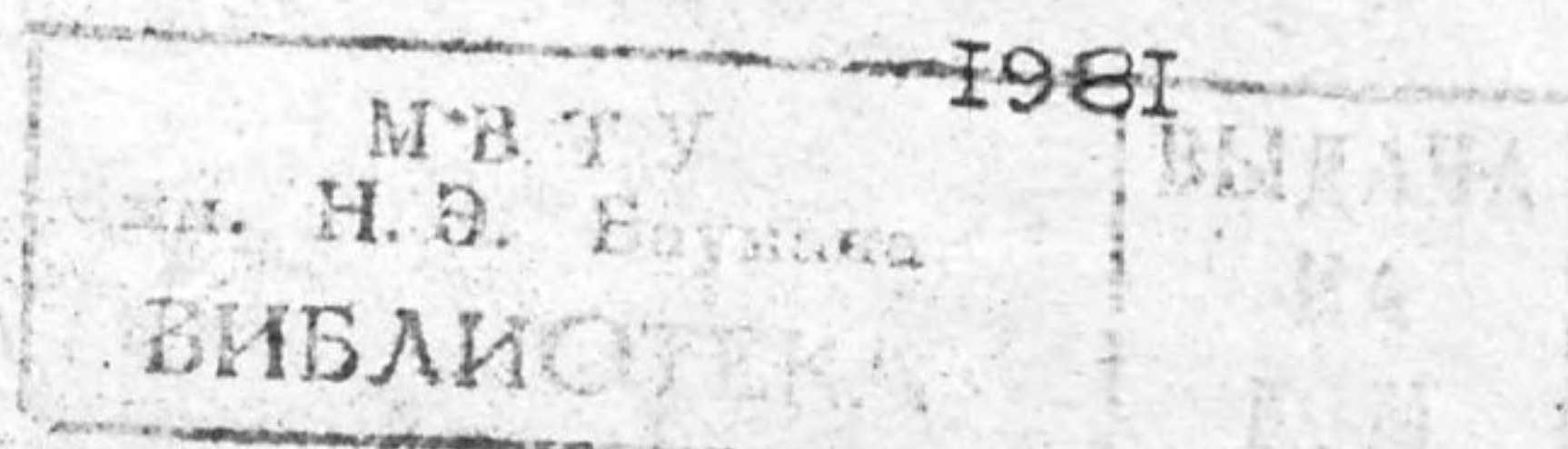
НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



146951R

Ретрофонд

Москва



Данное пособие издается в соответствии с учебным планом.

Рассмотрено и одобрено кафедрой П-10 30.11.79 г., Методической комиссией факультета П и Учебно-методическим управлением.

Главы I и II написаны С.И.Масленниковой, глава III - С.С.Николаевым.

Рецензенты: д.т.н. проф. МИФИ Собенин Н.П.,
к.т.н. доц. МИФИ Емельянов В.К.

С Московское высшее техническое училище им.Н.Э.Баумана

Оглавление

Введение. Переходные процессы в линейных электрических цепях..	3
Глава I. Классический метод расчета переходных процессов	4
§ 1. Основные положения метода	4
§ 2. Определение корней характеристического уравнения.....	5
§ 3. Определение начальных условий	8
§ 4. Порядок расчета переходных процессов классическим методом	12
§ 5. Переходные процессы при некорректных коммутациях.....	31
Глава II. Операторный метод расчета переходных процессов.....	32
Порядок расчета переходных процессов операторным методом	33
Глава III. Расчет переходных процессов в электрических цепях при произвольных воздействиях	45
§ 1. Представление воздействий	46
§ 2. Переходная и импульсная характеристики цепи	49
§ 3. Интеграл Дюамеля	56
§ 4. Метод переменных состояний	64
§ 5. Операторный метод расчета переходных процессов при произвольных воздействиях	70
§ 6. Расчет реакции системы на непрерывную последовательность импульсов	72
Литература	80

Редактор Ю.Н.Хлебинский

Корректор В.Т.Карасева

Заказ 1465. Объем 5 п.л. (4,9 уч.-изд.л.) Тираж 1000 экз.

Подписано к печати 16.09.81г. Цена 18 коп. План 1981 г., № 17

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

Введение. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Процесс перехода от одного энергетического состояния цепи к другому называется переходным процессом. Переходный процесс вызывается какими-либо внешними воздействиями на цепь. Эти воздействия называются коммутациями. Коммутация - это мгновенное изменение параметров схемы (γ, L, C), самой схемы или приложенного к схеме напряжения (тока).

Переход от одного режима работы (докоммутационного) к другому режиму происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени, которое называется временем переходного процесса.

Это объясняется тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас электромагнитной энергии. Изменение же энергии в реактивных элементах не может происходить мгновенно, так как в этом случае мощность $p = \frac{dw}{dt}$, развиваемая в цепи, достигла бы бесконечно больших значений. Таким образом, энергия магнитного поля w_L , запасаемая в индуктивности, и энергия электрического поля w_C , запасаемая в емкости, не могут изменяться мгновенно. Следствием этих положений и являются законы коммутации.

При расчете переходных процессов полагают, что:

- 1) коммутация происходит мгновенно, т.е. за время $\Delta t = 0$,
- 2) начало отсчета времени $t = 0$ совпадает с моментом коммутации.

Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначают $t = 0_-$, непосредственно после коммутации $t = 0_+$:

$$t(0_+) - t(0_-) = \Delta t = 0.$$

Так как для линейной цепи $w_L = \frac{Li_L^2}{2}$ и $w_C = \frac{Cu_C^2}{2}$, то первый и соответственно второй законы коммутации формулируются так: ток в индуктивности и напряжение на емкости не меняются скачком, т.е.

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+);$$

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+).$$

Значения $i_L(0)$ и $u_C(0)$ называют независимыми начальными условиями.

При расчете переходных процессов требуется знание также

зависимых начальных условий: значения токов и напряжений (кроме i_L и u_C) и их производных в начальный момент времени.

Задача об определении тока, напряжения как функции времени есть по сути дела задача о решении неоднородных дифференциальных уравнений. Рассмотрим различные методы расчета переходных процессов.

Глава I. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ I. Основные положения метода

Расчет переходных процессов классическим методом сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, составленных на основании законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Эта система приводится к неоднородному дифференциальному уравнению n -го порядка, общее решение которого ищется в виде суммы

$$y(t) = y_{\text{частн}}(t) + y_{\text{общ}}(t),$$

где $y_{\text{частн}}(t)$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

$y_{\text{общ}}(t)$ — общее решение однородного уравнения.

Здесь под $y(t)$ понимается любой искомый ток или напряжение. Частное решение $y_{\text{частн}}(t)$ неоднородного уравнения определяется видом функции, стоящей в правой части уравнения, и поэтому называется принужденной составляющей $y_{\text{пр}}(t)$. Для цепей с постоянными или периодическими напряжениями (или токами) источников энергии принужденное решение совпадает с установившимися значениями искомых величин. Общее решение $y_{\text{общ}}(t)$ однородного уравнения описывает процесс, происходящий без воздействия внешних источников, и называется свободной составляющей $y_{\text{св}}(t)$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение однородного уравнения ищется в виде

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{s=1}^n A_s e^{\rho_s t},$$

где ρ_s — корни характеристического уравнения;

A_s — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Корни характеристического уравнения реальных электрических цепей с потерями — отрицательные или комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью, так как при отсутствии внешних источников все процессы в схеме должны затухать, потому что нет поступления энергии в схему. Общий вид решения для свободных составляющих переходного процесса существенно зависит от вида корней характеристического уравнения.

1. Корни ρ_s — действительные и разные, в этом случае

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{s=1}^n A_s e^{\rho_s t}.$$

2. Среди корней имеется m кратных корней $\rho_i = -\alpha$ для них

$$y_{m \text{ св}}(t) = e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^m B_i t^{i-1}.$$

3. Среди корней имеются комплексные сопряженные корни

$$\rho_k = -\delta_k \pm j\omega_k; \text{ для этой пары корней}$$

$$y_{k \text{ св}}(t) = e^{-\delta_k t} (N_k \sin \omega_{\text{св}} t + M_k \cos \omega_{\text{св}} t).$$

Таким образом,

$$y(t) = y_{\text{пр}}(t) + y_{\text{св}}(t) = y_{\text{пр}}(t) + \sum_{s=1}^n A_s e^{\rho_s t}$$

При больших t $\lim y_{\text{св}}(t) = 0$
и $\lim y(t) = y_{\text{уст}} = \lim y_{\text{пр}}(t).$

§ 2. Определение корней характеристического уравнения

Наиболее простым методом составления характеристического уравнения является метод входного сопротивления. Характеристическое уравнение получается по формуле $Z_{\text{вх}}(\rho) = 0$; $Z_{\text{вх}}(\rho)$ можно получить из комплексного сопротивления $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ заменой $j\omega = \rho$.

Число корней (и их вид) определяет характер переходного процесса. Число корней равно степени характеристического уравнения и не может превышать числа накопителей электромагнитной энергии. Порядок характеристического уравнения можно определить из упрощенной схемы цепи, которая получается при замене последовательных или параллельных соединений индуктивностей и соответственно емкостей. Тогда порядок характеристического уравнения равен числу основных независимых начальных условий

$i_L(0), u_C(0)$ в послекоммутационной схеме при максимальном ее упрощении.

Так, схема рис. 1 после упрощения приводится к схеме рис. 2, где $L_3 = L_1 + L_2 \pm 2M$; $C_3 = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$.

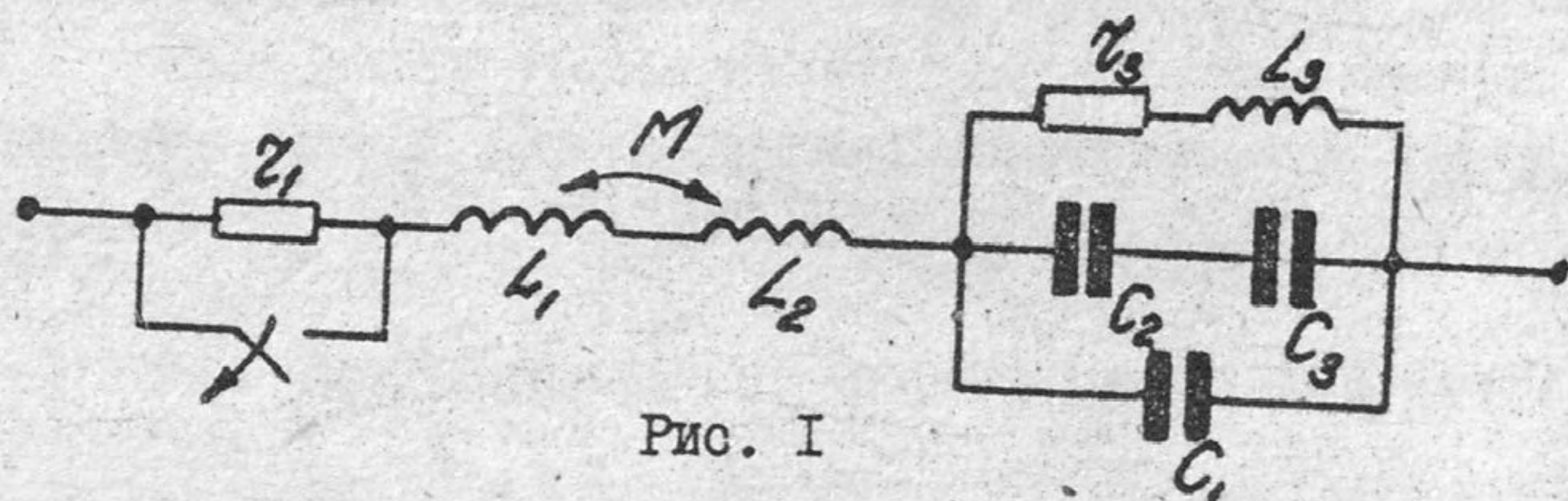


Рис. 1

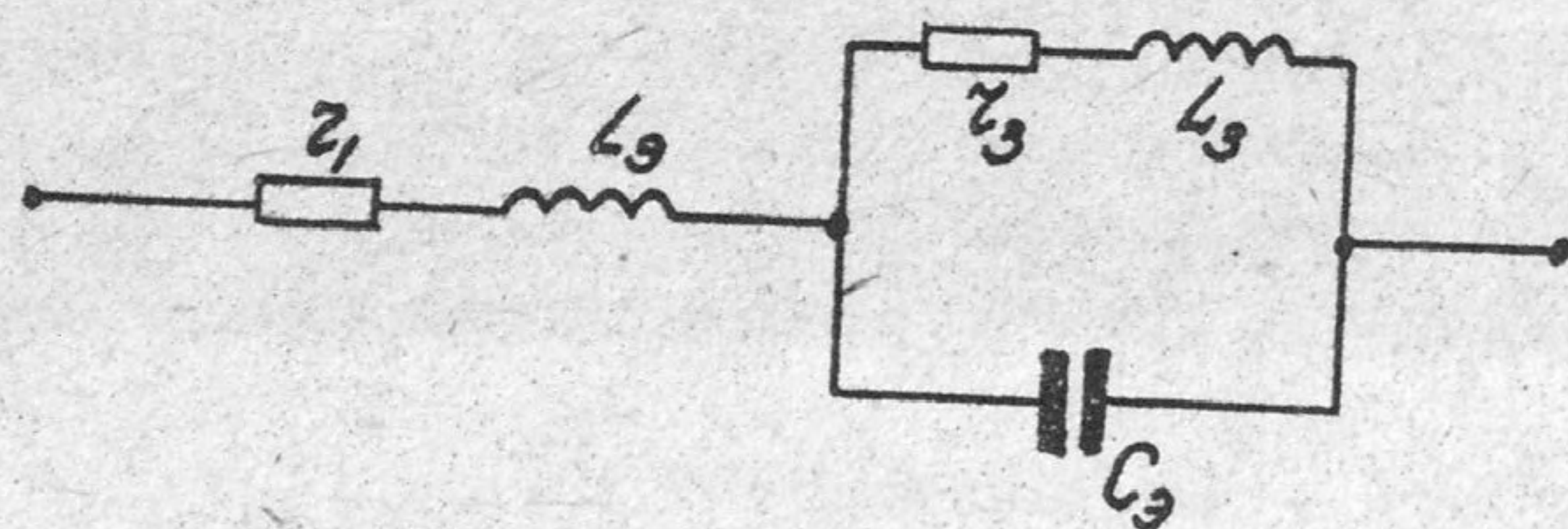


Рис. 2

Для получения характеристического уравнения:

1) Составляют схему для свободных составляющих токов. Для этого в схеме, полученной после коммутации, все источники энергии заменяют их внутренними сопротивлениями, а элементы z, L, C заменяют сопротивлениями, соответственно равными $z, \rho L, \frac{1}{\rho C}$.

2) Если в схеме для свободных токов нет ветвей, замкнутых накоротко, размыкают любую ветвь, определяют входное сопротивление $Z_{вх}(\rho)$ и приравнивают его нулю. Получают характеристическое уравнение. Чтобы упростить алгебраические преобразования, для получения характеристического уравнения следует размыкать ветвь с наибольшим числом элементов, отдавая при этом предпочтение ветви с сопротивлением $\frac{1}{\rho C}$.

В схемах с индуктивно-связанными катушками при определении $Z_{вх}(\rho)$ следует предварительно устранить магнитные связи. Если в схеме для свободных токов есть короткозамкнутая ветвь, то размыкают ту ветвь, в которой рассчитывают переходный ток.

Пример I. Для схем рис. 3а, 4а, 5а составить характеристические уравнения.

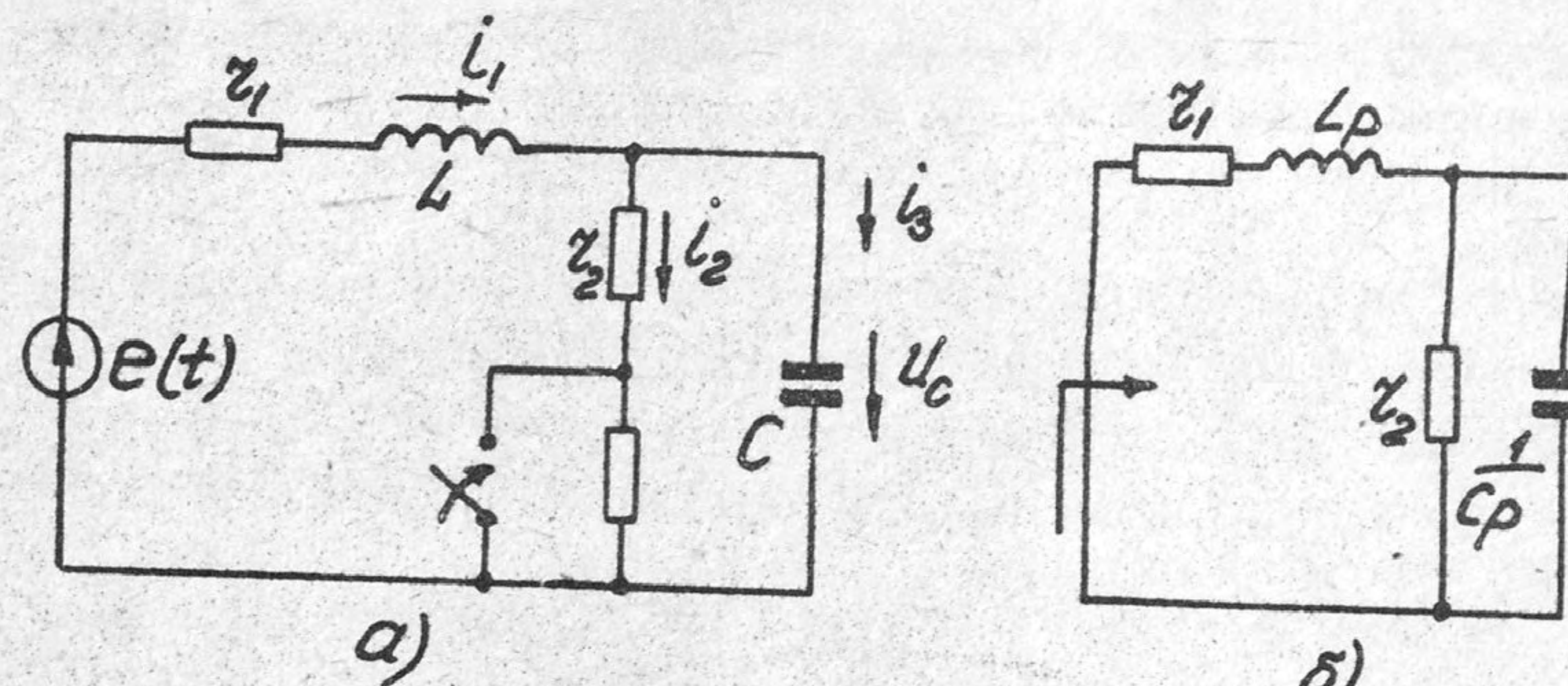


Рис. 3

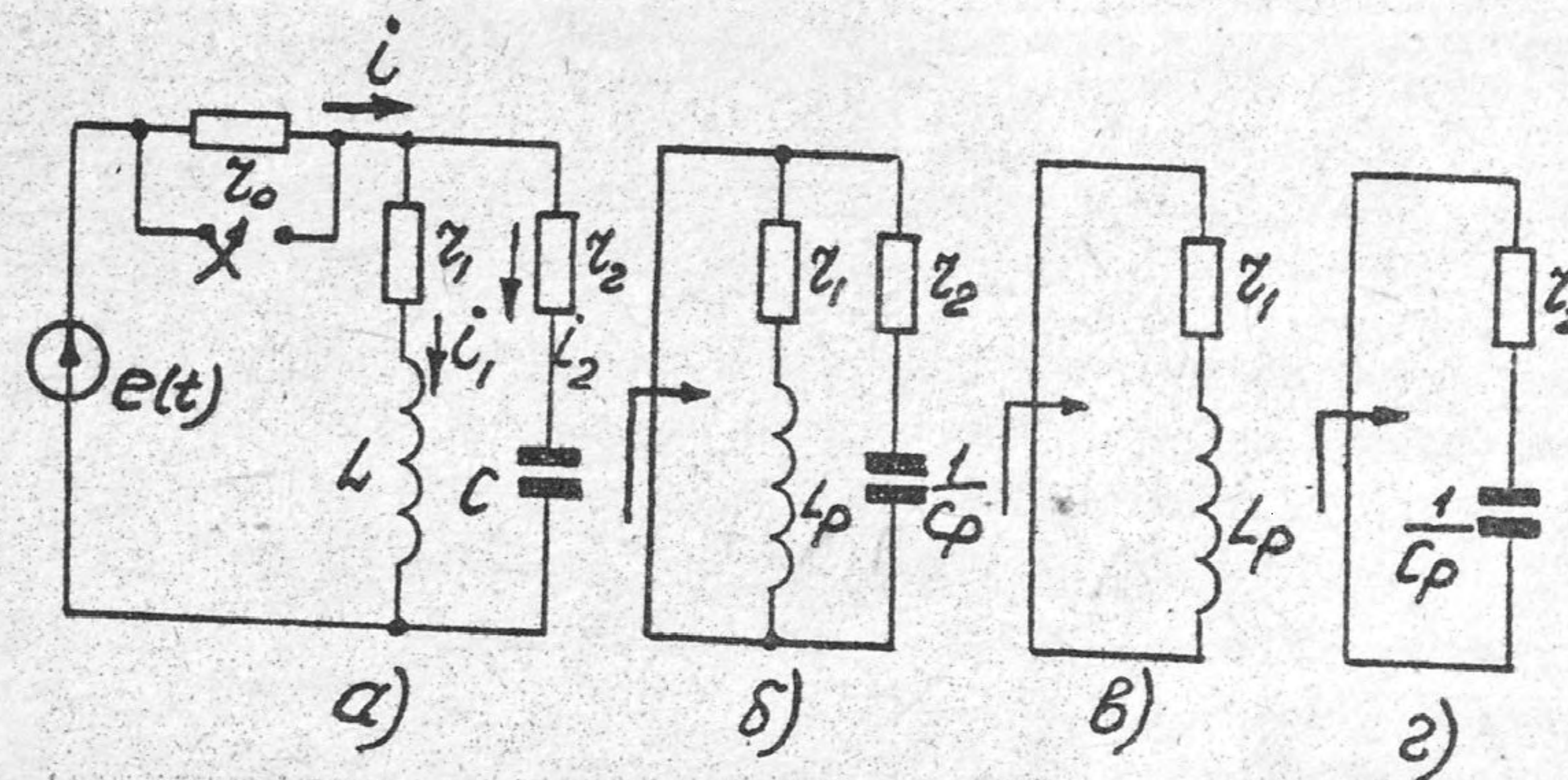


Рис. 4

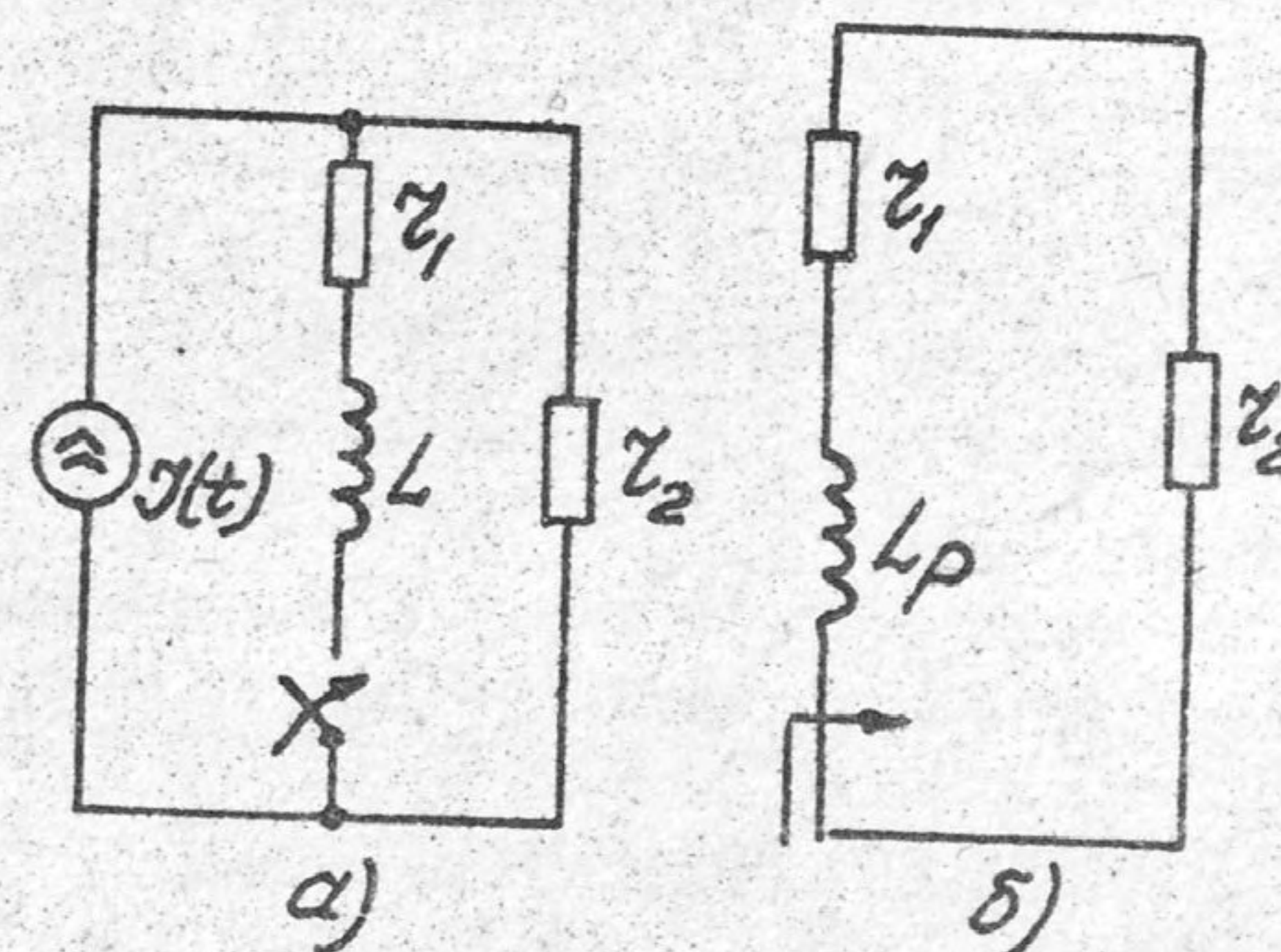


Рис. 5

Решение. Для цепи рис. 3а составляем после коммутации схему для свободных составляющих токов (рис. 3б). Размыкаем любую ветвь (например, $z - \rho L$) и определяем входное сопротивление схемы

$$Z_{bx_1}(\rho) = z_1 + L\rho + \frac{z_2 \frac{1}{C\rho}}{z_2 + \frac{1}{C\rho}}.$$

Приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение

$$z_2 C L \rho^2 + (z_1 z_2 C + L)\rho + (z_1 + z_2) = 0.$$

Это же характеристическое уравнение можно получить, разомкнув ветвь $\frac{1}{C\rho}$ и приравняв входное сопротивление $Z_{bx_2}(\rho)$ нулю:

$$Z_{bx_2}(\rho) = \frac{1}{C\rho} + \frac{(z_1 + L\rho)z_2}{z_2 + z_1 + L\rho}.$$

Схеме рис. 4а соответствует схема для свободных токов рис. 4б.

В этой схеме средняя и правая ветви замкнуты накоротко, т.е.

схема состоит из двух электрически независимых контуров

(рис. 4в, г). Для схемы рис. 4в

$$Z_{bx_1}(\rho) = z_1 + L\rho = 0; \quad \rho_1 = -\frac{z_1}{L}.$$

Для схемы рис. 4г

$$Z_{bx_2}(\rho) = z_2 + \frac{1}{C\rho} = 0; \quad \rho_2 = -\frac{1}{z_2 C}.$$

Таким образом, степень характеристического уравнения в каждом контуре равна I.

При размыкании левой ветви (рис. 4б)

$$Z_{bx}(\rho) = \frac{(z_1 + L\rho)(z_2 + \frac{1}{C\rho})}{z_1 + L\rho + z_2 + \frac{1}{C\rho}} = 0.$$

Отсюда получим два корня $\rho_1 = -\frac{z_1}{L}; \quad \rho_2 = -\frac{1}{z_2 C}$. Это объясняется тем, что $i_{cb} = i_{1cb} + i_{2cb}$.

Схеме рис. 5а соответствует схема для свободных токов рис. 5б и характеристическое уравнение $Z_{bx}(\rho) = z_1 + z_2 + L\rho = 0$.

§ 3. Определение начальных условий

Независимые начальные условия определяются законами коммутации $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$. Остальные токи и напряжения i_C, i_z, u_L, u_z и т.д. до и после коммутации в

общем случае не одинаковы, т.е.

$$i_C(0_-) \neq i_C(0_+); \quad \frac{di_C}{dt}(0_-) \neq \frac{di_C}{dt}(0_+); \quad u_L(0_-) \neq u_L(0_+) \quad \text{и т.д.}$$

Их значения в момент $t = 0_+$ определяются независимыми начальными условиями, характером коммутации и другими факторами.

Поэтому они получили название зависимых начальных условий. Если в электрической цепи $i_L(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$, т.е. в ней нет запаса электромагнитной энергии, то начальные условия называются нулевыми.

Порядок расчета

1. Сначала определяют независимые начальные условия, т.е. $i_L(0_+)$, $u_C(0_+)$.

В схеме до коммутации, находящейся в установившемся режиме, определяют мгновенные значения токов i_L и напряжений u_C и затем подставляют в них значение $t = 0_-$. По законам коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0_+); \quad u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

2. Затем для схемы, полученной после коммутации, составляют уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Эти уравнения действительны в течение времени от $t = 0_+$ до $t = \infty$. Если в эти уравнения подставить время $t = 0_+$ и найденные значения $i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$, можно определить зависимые начальные условия. При составлении уравнений контуры необходимо выбирать таким образом, чтобы использовать уже найденные независимые начальные условия.

Пример 2. Для схемы рис. 3а определить начальные условия, если на входе действует постоянная ЭДС $e(t) = E$.

Решение. Определяем независимые начальные условия. Значения тока i_1 и напряжения u_C в момент времени $t = 0_-$ равны:

$$i_1(0_-) = \frac{E}{z_1 + z_2 + z_3}; \quad u_C(0_-) = \frac{E(z_2 + z_3)}{z_1 + z_2 + z_3}.$$

По законам коммутации они не меняются скачком:

$$i_1(0_-) = i_1(0_+); \quad u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

В схеме после коммутации определяем зависимые начальные усло-

вия для момента времени $t = 0_+$:

$$\frac{di_1}{dt}(0_+); \frac{du_c}{dt}(0_+); i_2(0_+).$$

Для этого записываем систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$E = i_1 r_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_c; i_2 r_2 = u_c; i_1 = i_2 + i_3.$$

Подставляя в эту схему для момента времени $t = 0_+$ найденные значения $i_1(0_+)$, $u_c(0_+)$, определяем искомые величины:

$$\frac{di_1}{dt}(0_+) = \frac{E - i_1(0_+)r_1 - u_c(0_+)}{L} = 0;$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_c(0_+)}{r_2} = \frac{E(r_2 + r_3)}{r_2(r_1 + r_2 + r_3)};$$

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = -\frac{E r_3}{r_2(r_1 + r_2 + r_3)}.$$

Учитывая, что $\frac{du_c}{dt}(0_+) = \frac{i_c(0_+)}{C} = \frac{i_3(0_+)}{C}$,

получим
$$\frac{du_c}{dt}(0_+) = -\frac{E r_3}{r_2(r_1 + r_2 + r_3)}.$$

Примечание. Если требуется определить значение $\frac{di_2}{dt}(0_+)$, то уравнения следует составлять таким образом, чтобы по возможности обойтись без определения вторых производных. Например, если использовать левый контур, то для определения $\frac{di_2}{dt}(0_+)$ потребуется $\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0_+)$, так как $E = i_1 r_1 + L \frac{di_1}{dt} + i_2 r_2$

и $0 = \frac{di_1}{dt} r_1 + L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{di_2}{dt} r_2$; $i_2 r_2 = u_c$; $\frac{di_2}{dt} r_2 = \frac{du_c}{dt}$

и $i_1 = i_2 + i_3 = i_2 + C \frac{du_c}{dt}$ позволяют просто определить значение производной при $t = 0_+$, а именно: $\frac{du_c}{dt}(0_+) = -\frac{E r_3}{C r_2(r_1 + r_2 + r_3)}$; $\frac{di_2}{dt}(0_+) = \frac{1}{r_2} \frac{du_c}{dt}(0_+) = -\frac{E r_3}{C r_2^2(r_1 + r_2 + r_3)}$.

Пример 3. Для схемы рис. 6 определить начальные условия $i(0)$, $\frac{di}{dt}(0)$, если $u = 100 \sin 1000t$; $r_0 = r = 50 \text{ м}$; $L = 0,01 \text{ Гн}$.

Решение. В схеме до коммутации определяем закон изменения тока

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \alpha \text{ctg} \frac{\omega L}{r_0 + r}) = 5\sqrt{2} \sin(1000t - \frac{\pi}{4})$$

В момент времени $t = 0$ ток $i(0) = -5 = i(0_+)$.

Значение $\frac{di}{dt}(0_+)$ определяем из уравнения $u = i r + L \frac{di}{dt}$, составленного для схемы после коммутации: $u(0_+) = i(0_+) r + L \frac{di}{dt}(0_+)$, откуда $\frac{di}{dt}(0_+) = \frac{u(0_+) - i(0_+) r}{L} = 2500 \text{ А/с}$.

Пример 4. В схеме рис. 7 найти независимые и зависимые начальные условия, если дано:

$$I = 2 \text{ А}; e(t) = 50\sqrt{2} \sin(1000t + \frac{\pi}{4});$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 100 \text{ м}; L = 0,01 \text{ Гн}; C = 10 \text{ мкФ}.$$

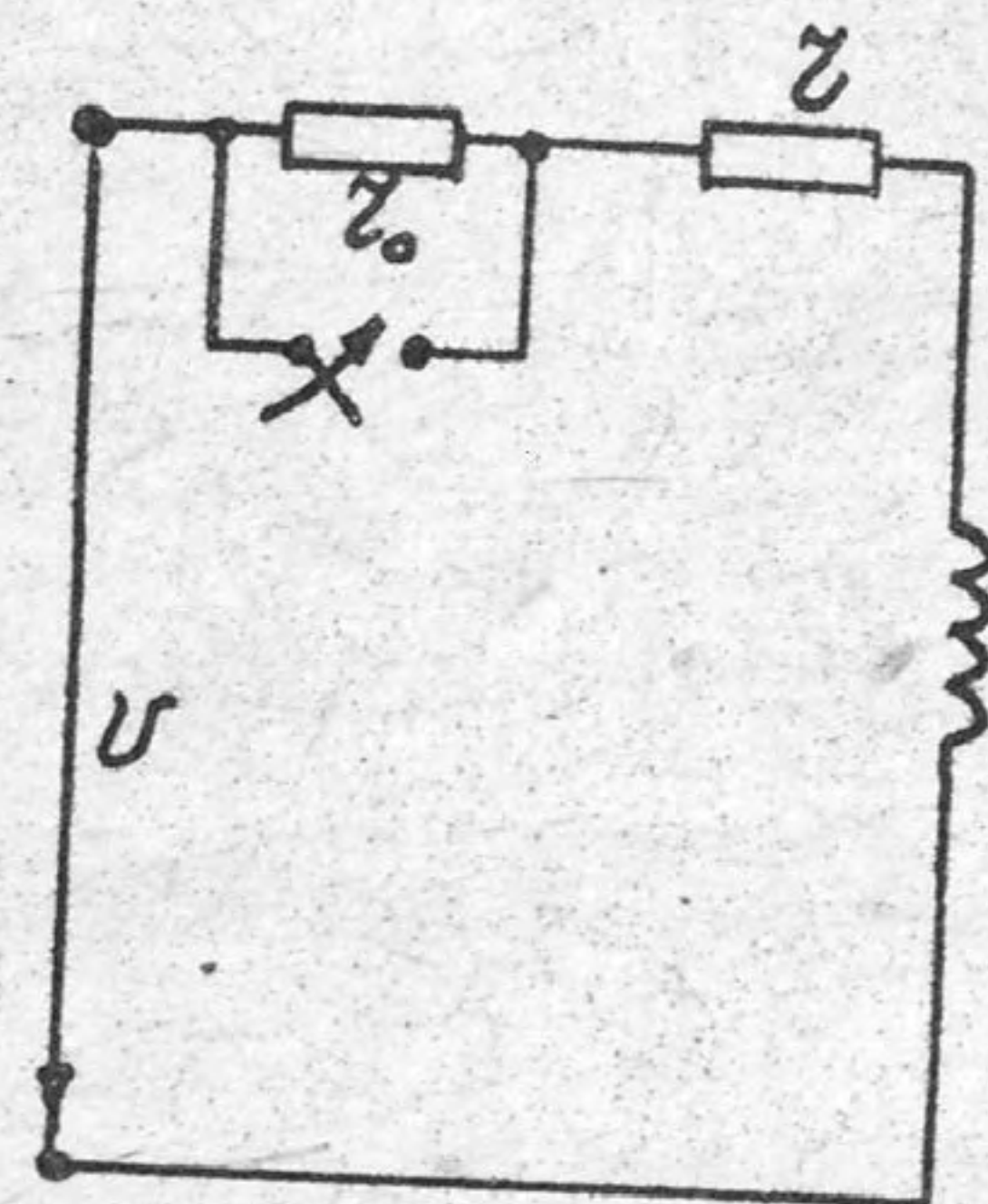


Рис. 6

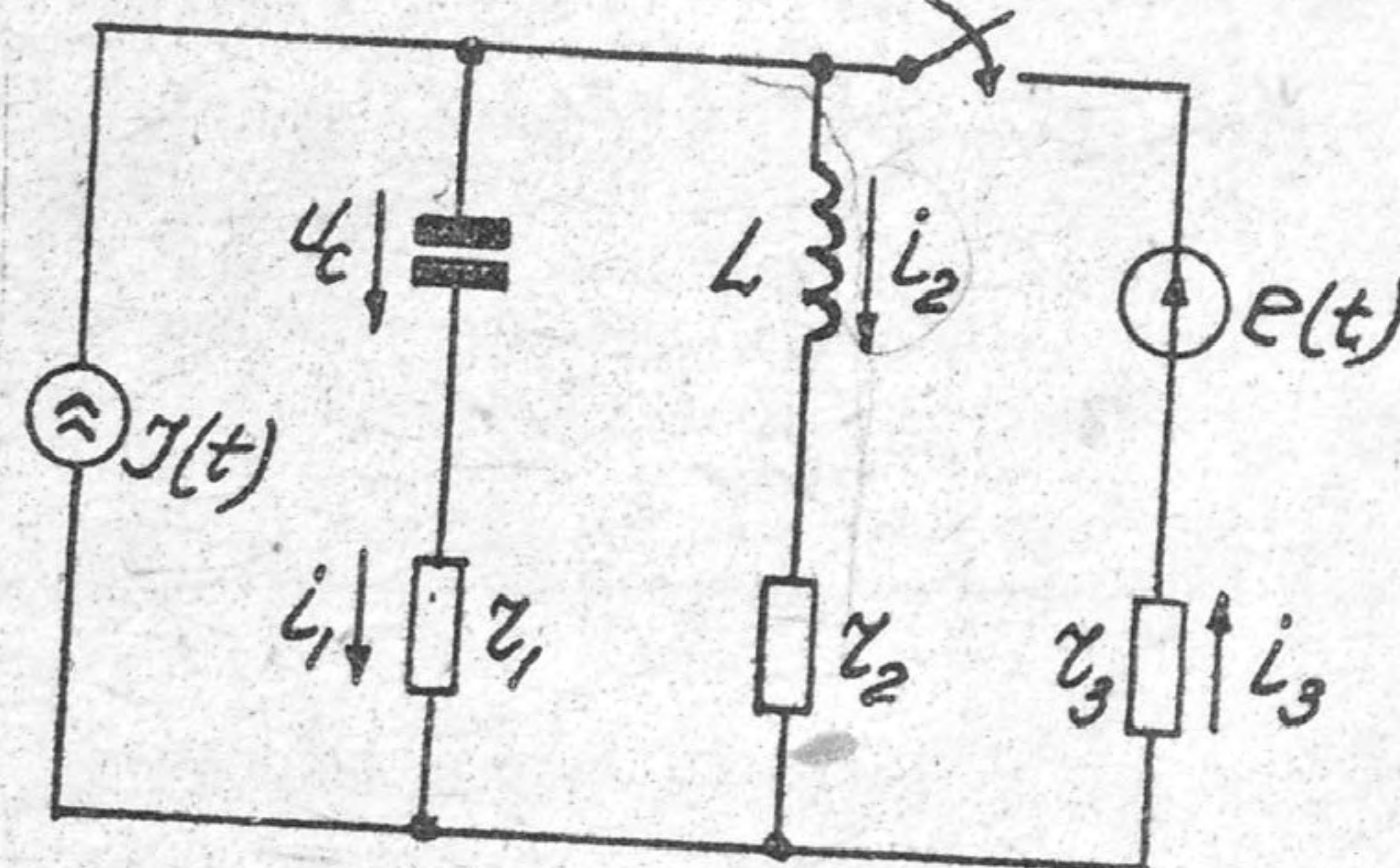


Рис. 7

Решение. Рассчитываем схему до коммутации и определяем независимые начальные условия, учитывая, что $i_1(0_-) = 0$; $u_C(0_-) = 0$; $i_2(0_-) = I = 2 \text{ А} = i_2(0_+)$;

$$u_C(0_-) = i_2(0_-) r_2 = 20 \text{ В} = u_C(0_+).$$

Для схемы после коммутации составляем систему уравнений по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0_+$:

$$I + i_3(0_+) = i_1(0_+) + i_2(0_+),$$

$$e(0_+) = i_3(0_+) r_3 + u_C(0_+) + i_1(0_+) r_1,$$

$$e(0_+) = i_3(0_+) r_3 + u_L(0_+) + i_2(0_+) r_2.$$

Из первого уравнения получим $i_3(0_+) = i_1(0_+)$.

Подставив это соотношение во второе уравнение, определим значение тока $i_3(0_+)$: $i_3(0_+) = 1,5 \text{ А}$; $i_1(0_+) = i_3(0_+) = 1,5 \text{ А}$.

Значение производной $\frac{du_C}{dt}(0_+)$ находим из соотношения

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_1(0_+)}{C} = 15000 \text{ В/с}. \text{ Значение } u_L(0_+) \text{ определяем из третьего уравнения: } u_L(0_+) = e(0_+) - i_3(0_+) r_3 - i_2(0_+) r_2 = 15 \text{ В}.$$

Зависимые начальные условия можно определять из схемы

(рис. 8), которая справедлива только для момента времени $t = 0_+$. В этой схеме индуктивности заменяются источниками тока $\mathcal{I}_L = i_L(0_-)$, емкости — источниками ЭДС $E_C = u_C(0_-)$. Направление $\mathcal{I}_L$ совпадает с направлением тока $i_L(0_-)$, направление E_C противоположно направлению $u_C(0_-)$.

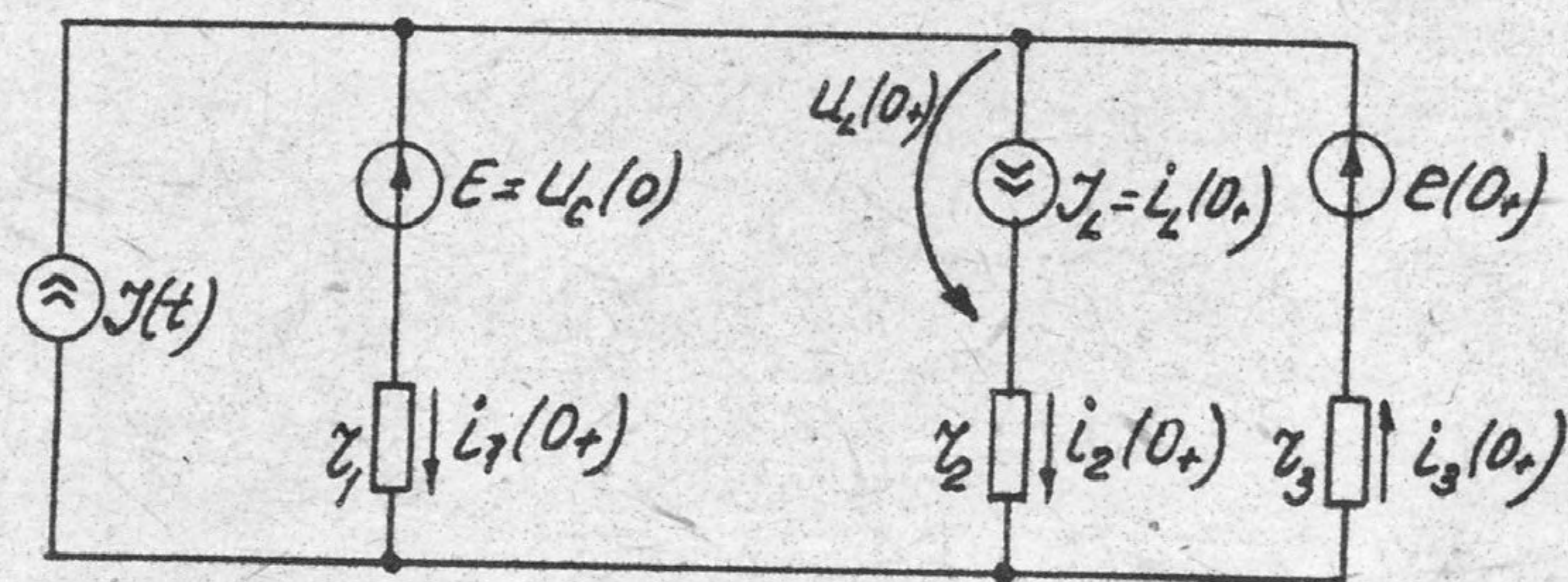


Рис. 8

§ 4. Порядок расчета переходных процессов классическим методом

Подготавливаем схему к расчету, нанеся на нее положительные направления токов и напряжений.

1. Рассчитываем схему до коммутации и определяем независимые начальные условия.

2. Составляем характеристическое уравнение для схемы после коммутации и определяем его корни.

3. Записываем решение для искомой величины в виде

$$y(t) = y_{np}(t) + y_{св}(t).$$

4. Определяем принужденную составляющую искомой величины (при $t = \infty$).

5. Для послекоммутационной схемы составляем систему уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений.

6. Записываем эту систему для момента времени $t = 0_+$, подставляем в нее найденные независимые начальные условия и определяем зависимые начальные условия.

7. Пользуясь начальными условиями, определяем постоянные интегрирования.

8. Получаем решение для искомой величины.

9. Определим один ток или одно напряжение. (Если условиями задачи не оговаривается, какую величину надо определить, то расчет целесообразно начинать с определения тока в индуктивности или напряжения на емкости.) Остальные токи и напряжения можно найти аналогично или по уравнениям п. 5. Напряжение на индуктивности и ток в емкости проще определить из соотношений

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

10. Расчет заканчивается обычно построением графиков найденных величин.

Пример 5. Определить закон изменения тока в схеме рис. 9, если дано:

$$u = 100 \sin 1000t; \quad r = 10 \text{ Ом}; \quad L = 0,01 \text{ Гн}.$$

Решение. Рассчитываем ток до коммутации и определяем независимое начальное условие:

$$i(t) = \frac{\sqrt{m}}{\omega L} \sin(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{r}) = 10 \sin(1000t - \frac{\pi}{4}).$$

При $t = 0_-$ $i(0_-) = -10 \text{ А}$,
По первому закону коммутации $i(0_-) = -10 \text{ А} = i(0_+)$.

Определяем корень характеристического уравнения

$$z_{св}(\rho) = r + L\rho = 0; \quad \rho = -\frac{r}{L} = -1000 \text{ 1/с}.$$

Решение уравнения для тока ищем в виде

$$i = i_{np} + i_{св} = i_{np} + A e^{\rho t}.$$

где

$$i_{np} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{r}) = 5\sqrt{2} \sin(1000t - \frac{\pi}{4}).$$

Постоянную интегрирования находим из начальных условий

$$i(0_+) = i_{np}(0_+) + i_{св}(0_+) = -5 + A = -10,$$

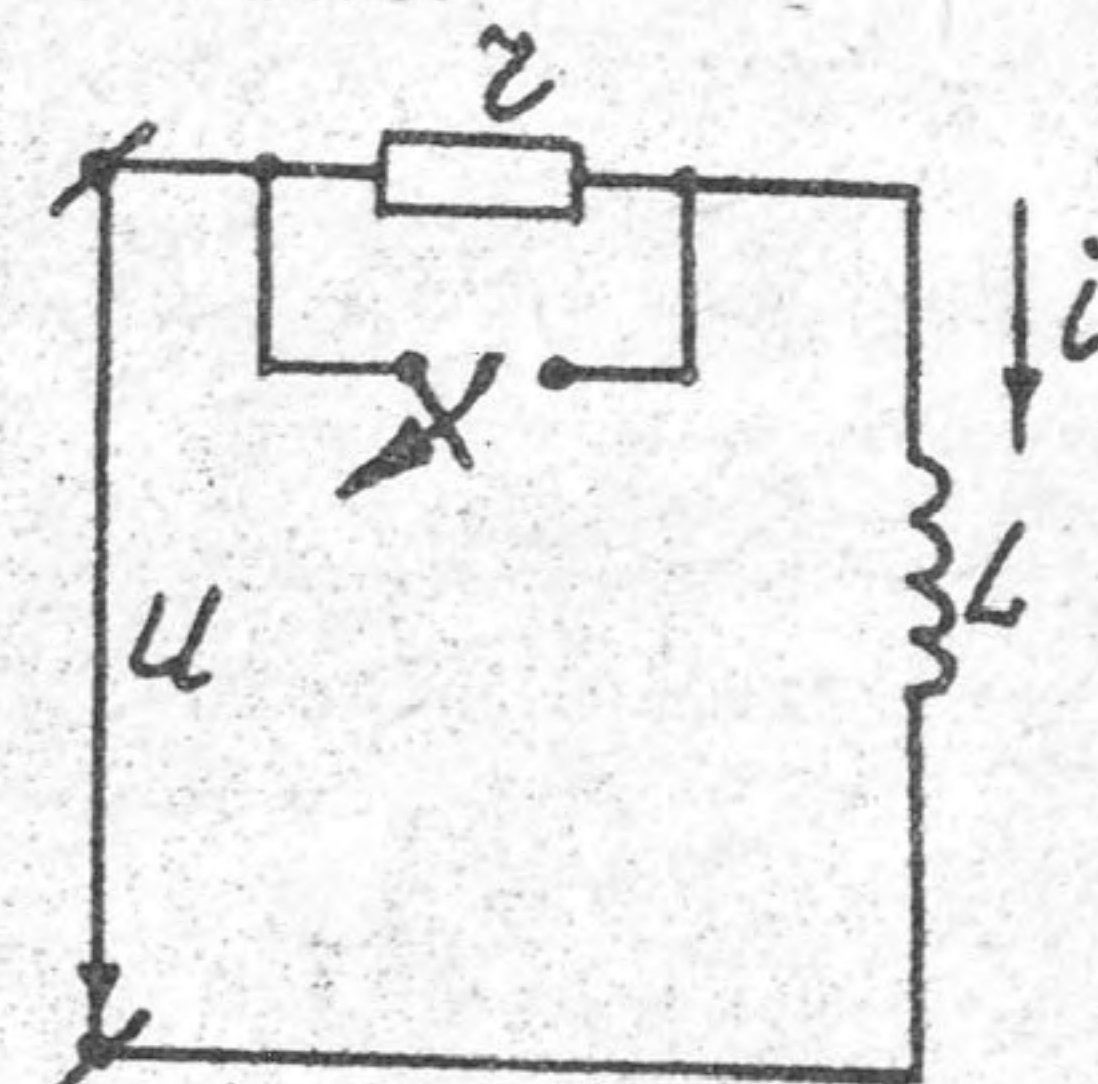


Рис. 9

откуда $A = -5$.

Ответ: $i = 5\sqrt{2} \sin(1000t - \frac{\pi}{4}) - 5e^{-1000t}$

Пример 6. В схеме рис. 10 дано: $U = 100 \text{ В}$; $\tau = \tau_0 = 100 \text{ Ом}$;

$L = \frac{5}{8} \text{ Г}$; $C = 100 \text{ мкФ}$.

Определить законы изменения i , i_1 , i_2 , u_C , u_L .

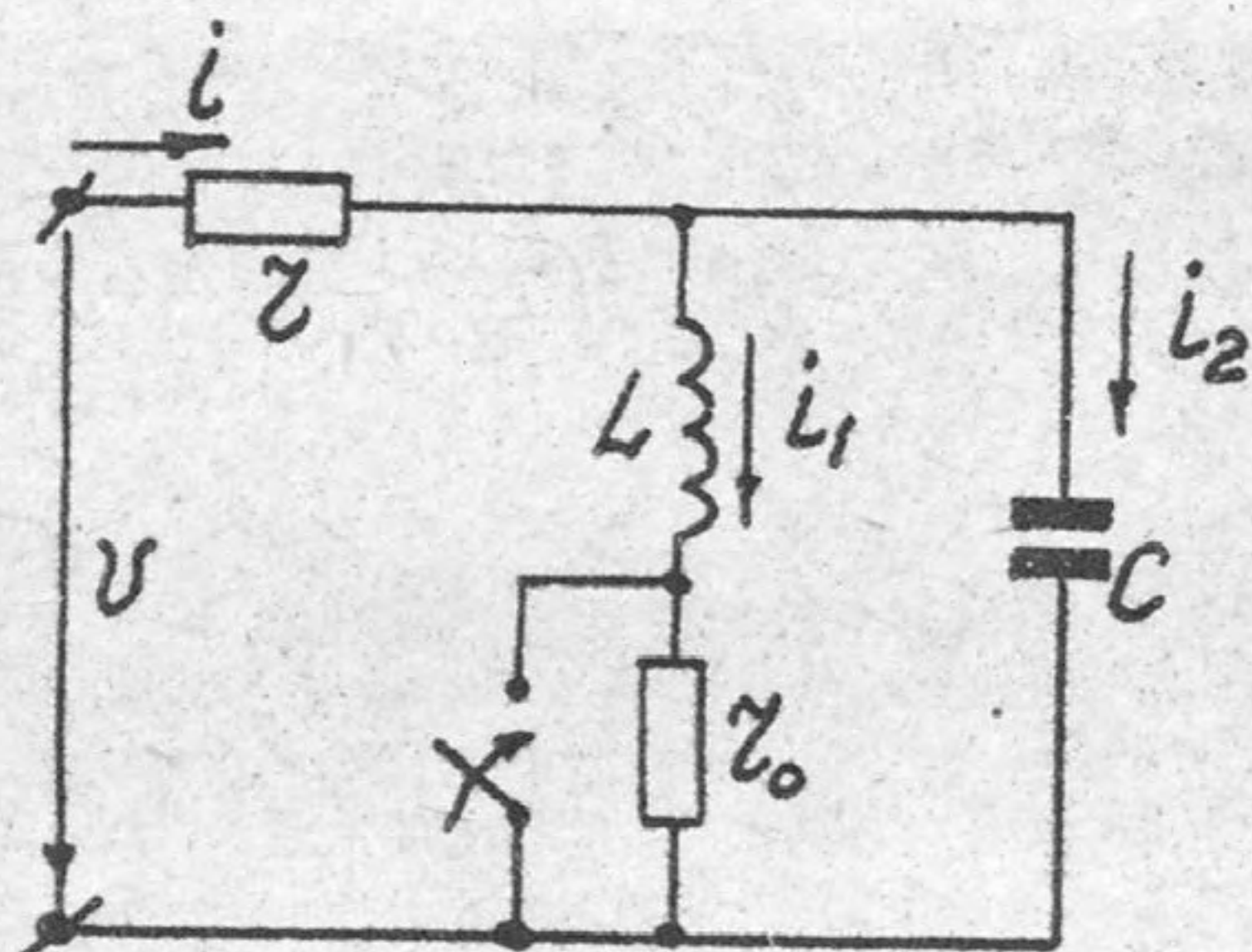


Рис. 10

$i_1(0_-) = i_1(0_+) = 0,5 \text{ А}$; $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 50 \text{ В}$.

2. Составляем характеристическое уравнение

$$Z_{\text{вх}}(p) = Z + \frac{Lp \frac{1}{Cp}}{Lp + \frac{1}{Cp}} = Z + \frac{Lp}{Lp^2 + 1} = 0; \quad \tau L C p^2 + Lp + \tau = 0$$

и определяем его корни $p_1 = -200 \text{ 1/с}$; $p_2 = -800 \text{ 1/с}$.

3. Закон изменения тока i_1 ищем в виде

$$i_1 = i_{1np} + i_{1св} = i_{1np} + A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-800t}$$

4. Принужденная составляющая тока

$$i_{1np} = \frac{U}{\tau} = 1 \text{ А}$$

5. Значение производной $\frac{di_1}{dt}$ в момент времени $t = 0_+$ определим из уравнения

$$u_L = L \frac{di_1}{dt} = u_C; \quad \frac{di_1(0_+)}{dt} = \frac{u_C(0_+)}{L} = 80 \text{ А/с}$$

6. Определяем постоянные интегрирования

Решение. 1. Из схемы до коммутации находим независимые начальные условия. Так как схема до коммутации находится в установившемся режиме и питается от источника постоянного напряжения, то $i_2(0_-) = 0$; $i(0_-) = i_1(0_-) = \frac{U}{\tau + \tau_0} = 0,5 \text{ А}$; $u_L(0_-) = 0$; $u_C(0_-) = i_1(0_-) \tau_0 = 50 \text{ В}$.

По законам коммутации

$$\begin{cases} i_1 = 1 + A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-800t} \\ \frac{di_1}{dt} = -200A_1 e^{-200t} - 800A_2 e^{-800t} \end{cases} \quad \text{при } t = 0_+ \begin{cases} 0,5 = 1 + A_1 + A_2 \\ 80 = -200A_1 - 800A_2 \end{cases}$$

откуда $A_1 = -\frac{8}{15}$; $A_2 = \frac{1}{30}$;

$$i_1 = 1 - \frac{8}{15} e^{-200t} + \frac{1}{30} e^{-800t}$$

7. Остальные токи и напряжения определяем из уравнений, составленных по законам Кирхгофа:

$$U = i\tau + L \frac{di_1}{dt}; \quad i = 1 - \frac{2}{3} e^{-200t} + \frac{1}{6} e^{-800t}$$

$$u_L = L \frac{di_1}{dt} = u_C = \frac{200}{3} e^{-200t} - \frac{50}{3} e^{-800t}$$

$$i_2 = i - i_1 = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{2}{15} e^{-200t} + \frac{2}{15} e^{-800t}$$

Данные расчета удобно сводить в табл. I.

Таблица I

Моменты времени	$t = 0_-$	$t = 0_+$	$t = \infty$
i	0,5	0,5	I
i_1	0,5	0,5	I
i_2	0	0	0
u_C	50	50	0
u_L	0	50	0

Пример 7. В схеме рис. II дано: $I = 1 \text{ А}$; $E = 50 \text{ В}$; $\tau = 10 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Г}$.
Определить закон изменения тока в индуктивности.

Решение. Начальное условие $i_L(0_-) = I = 1 \text{ А} = i_L(0_+)$.

Характеристическое уравнение

$$Z_{\text{вх}}(p) = \tau + Lp = 0; \quad p = -100 \text{ 1/с}$$

Решение для тока

$$i_L = i_{Lnp} + i_{Lсв} = i_{Lnp} + A e^{-100t}$$

Принужденную составляющую тока определим из уравнения

$$E = i_{Lnp} \tau; \quad i_{Lnp} = 5 \text{ А}$$

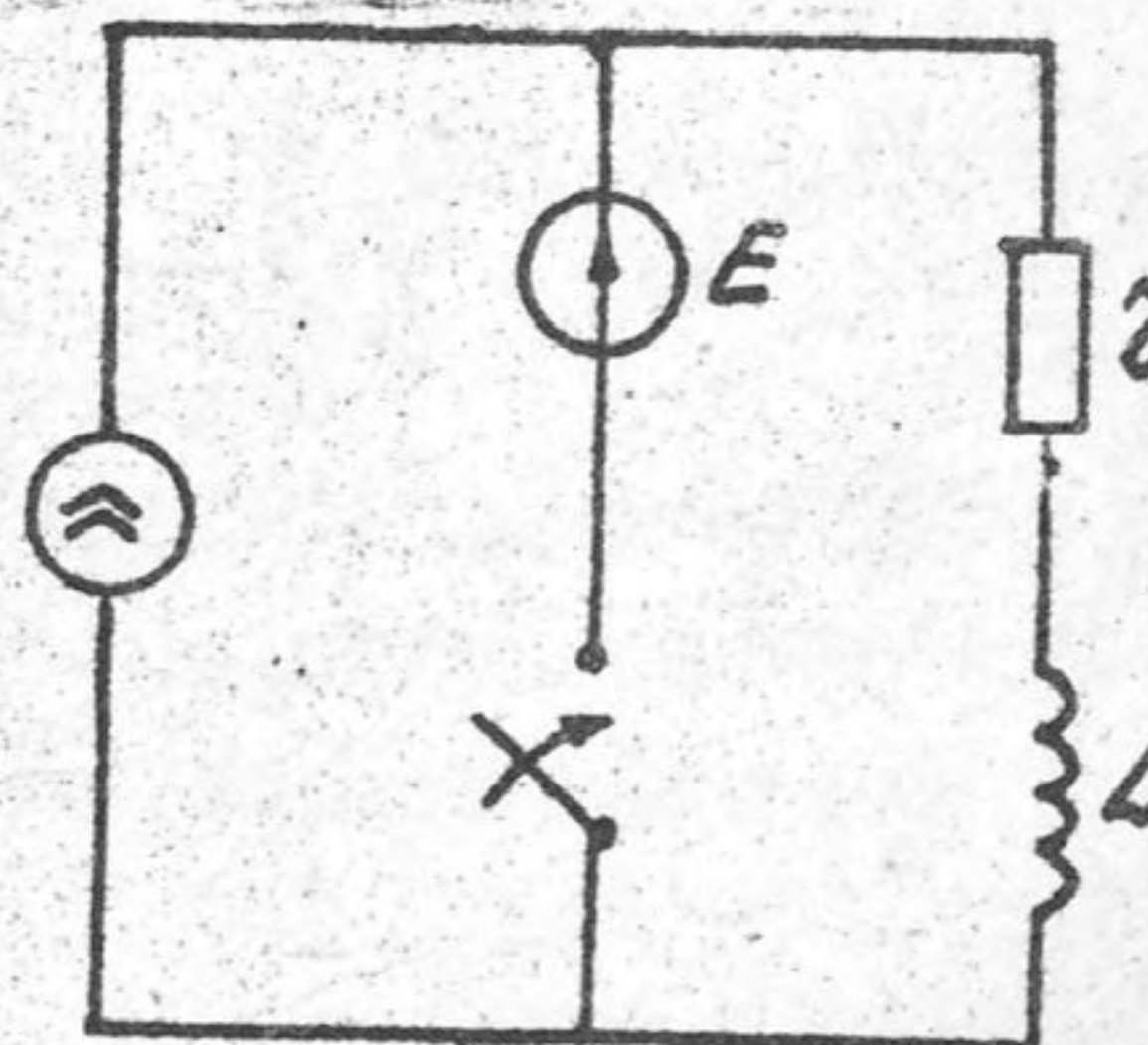


Рис. II

Постоянная интегрирования

$$i_L(0_+) = i_{Lnp}(0_+) + A = 5 + A = 1; \quad A = -4.$$

$$\text{Ответ: } i_L = 5 - 4e^{-100t} \quad (\text{рис. I2}).$$

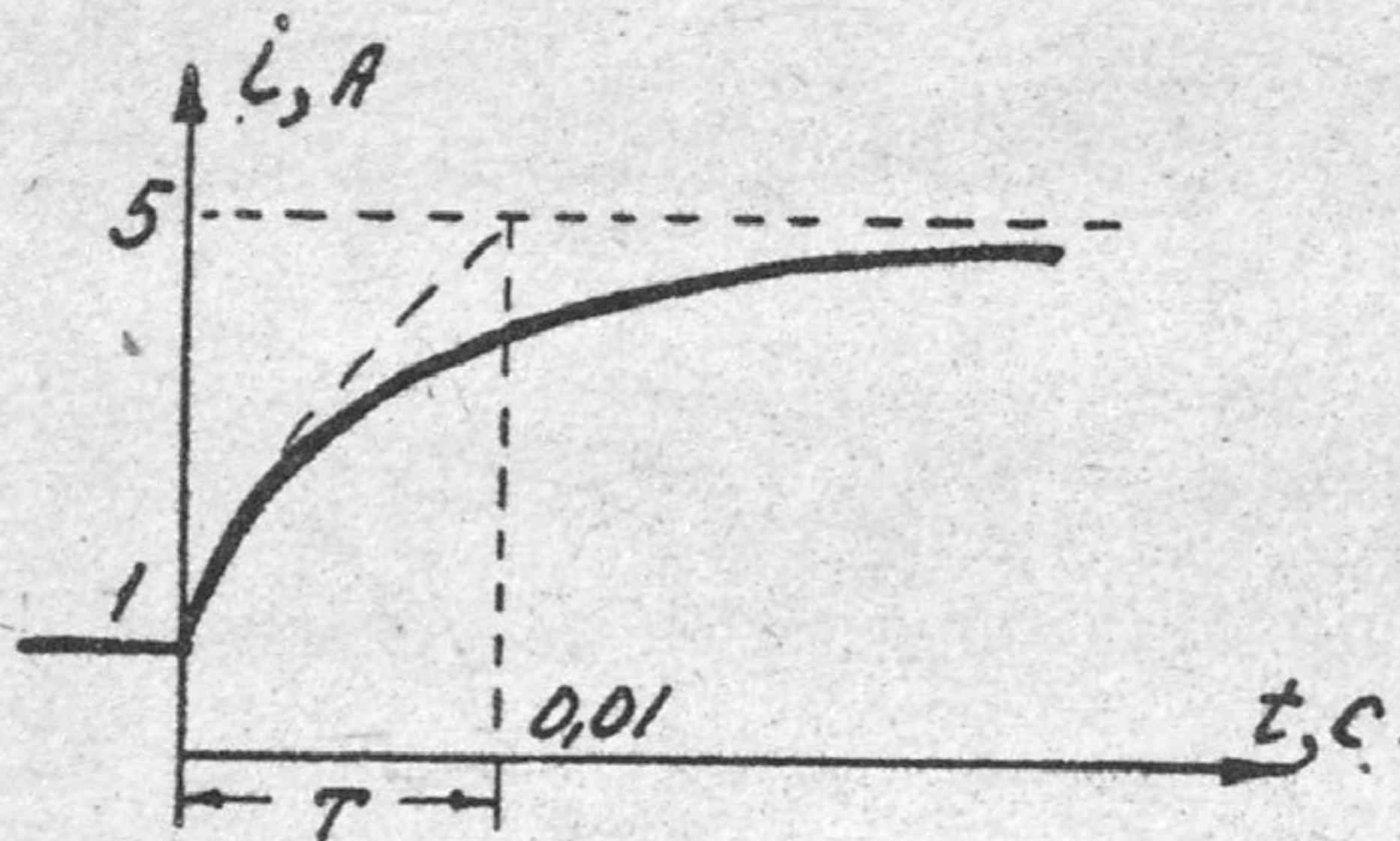


Рис. I2

мутации, максимальное значение ЭДС самоиндукции после коммутации.

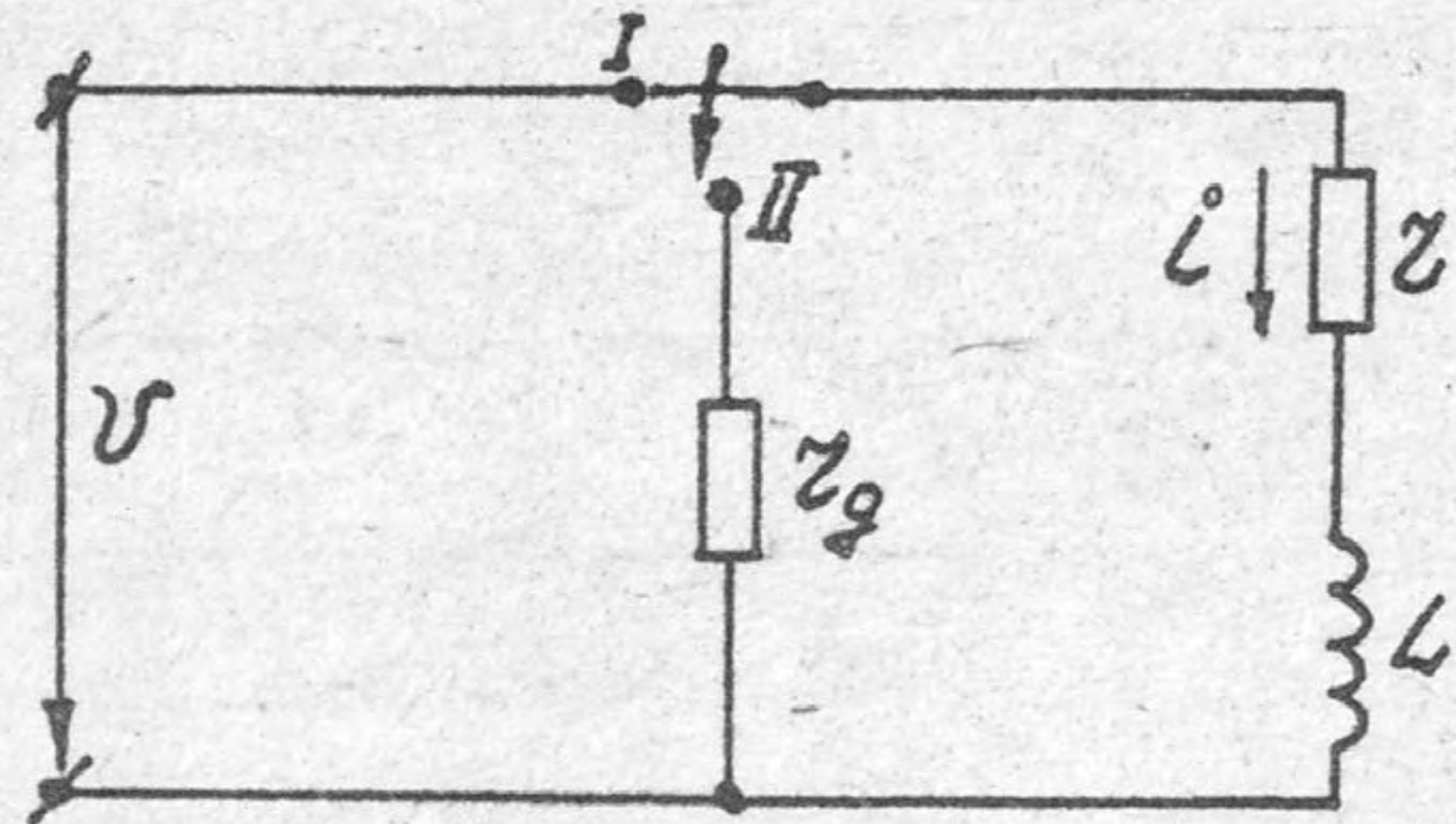


Рис. I3

Так как схема после коммутации не содержит источников энергии, то $i_{np} = 0$ и $i = i_{np} + i_{св} = i_{св} = Ae^{-20t}$.

Ток в индуктивности скачком не меняется $i(0_-) = i(0_+)$.

Значит, $i(0_+) = A = 20 \text{ A}$. Следовательно, $i = 20e^{-20t}$ (рис. I4a). Энергия, выделяемая в виде тепла в сопротивлениях за время $t_1 = 0,05 \text{ с}$, равна

$$W_z = \int_0^{t_1} i^2 z dt = \int_0^{t_1} 2 \cdot 20^2 e^{-40t} dt = 800 \int_0^{t_1} e^{-40t} dt = 17,3 \text{ Дж}.$$

ЭДС самоиндукции, которая наводится в катушке, определяем по формуле

Пример 8. Катушка индуктивности ($r = 0,5 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Г}$) отключается от сети постоянного напряжения $U = 10 \text{ В}$ и замыкается на резистор $r_g = 1,5 \text{ Ом}$ (рис. I3). Определить закон изменения тока $i(t)$, тепловую энергию, выделенную в сопротивлениях в течение $0,05 \text{ с}$ после коммутации.

Решение. До коммутации (ключ находился в положении I) ток в катушке $i(0_-) = \frac{U}{r} = 20 \text{ A}$.

Характеристическое уравнение схемы после коммутации (ключ в положении II) $z_{вх}(p) = r_g + r + Lp = 0$;

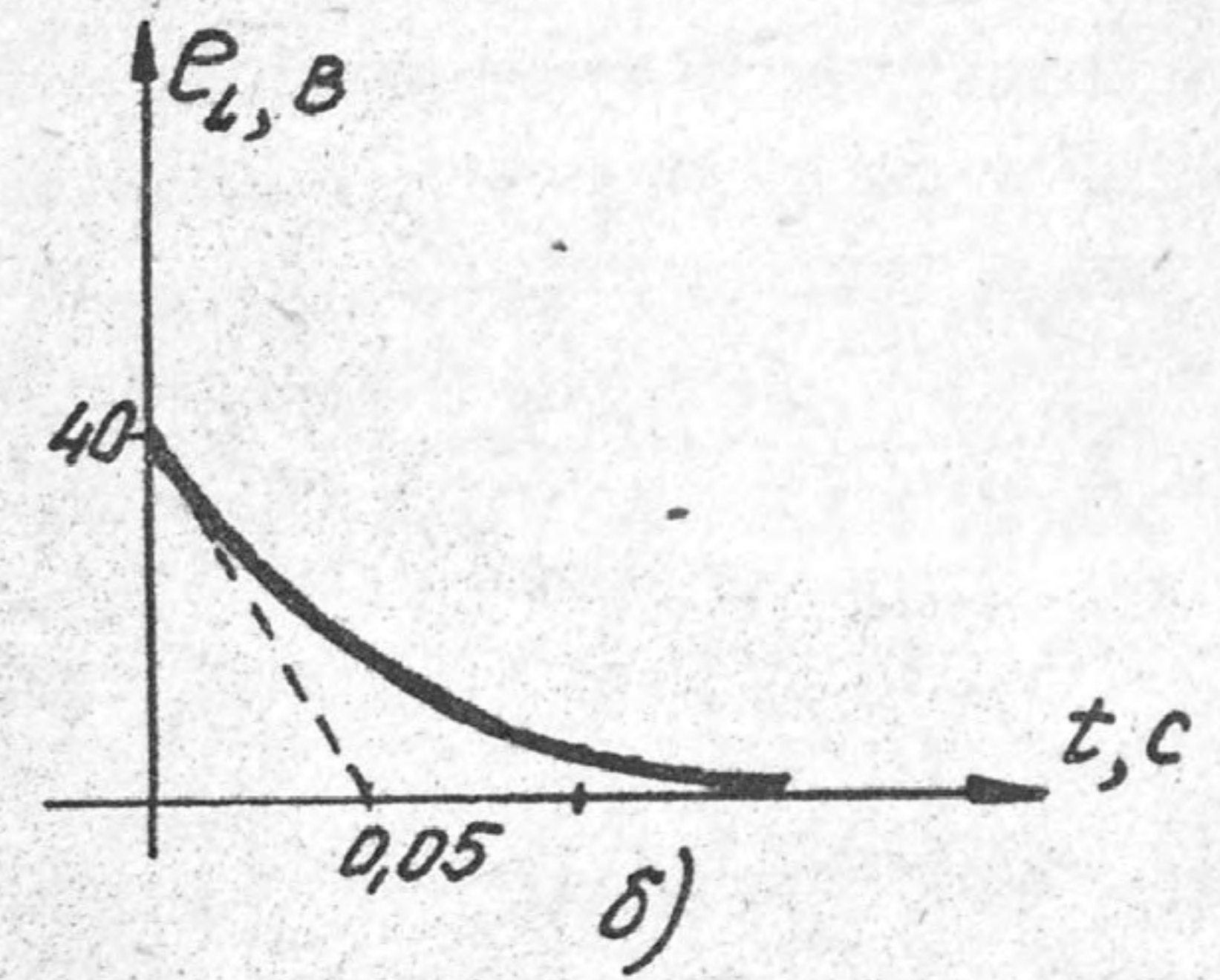
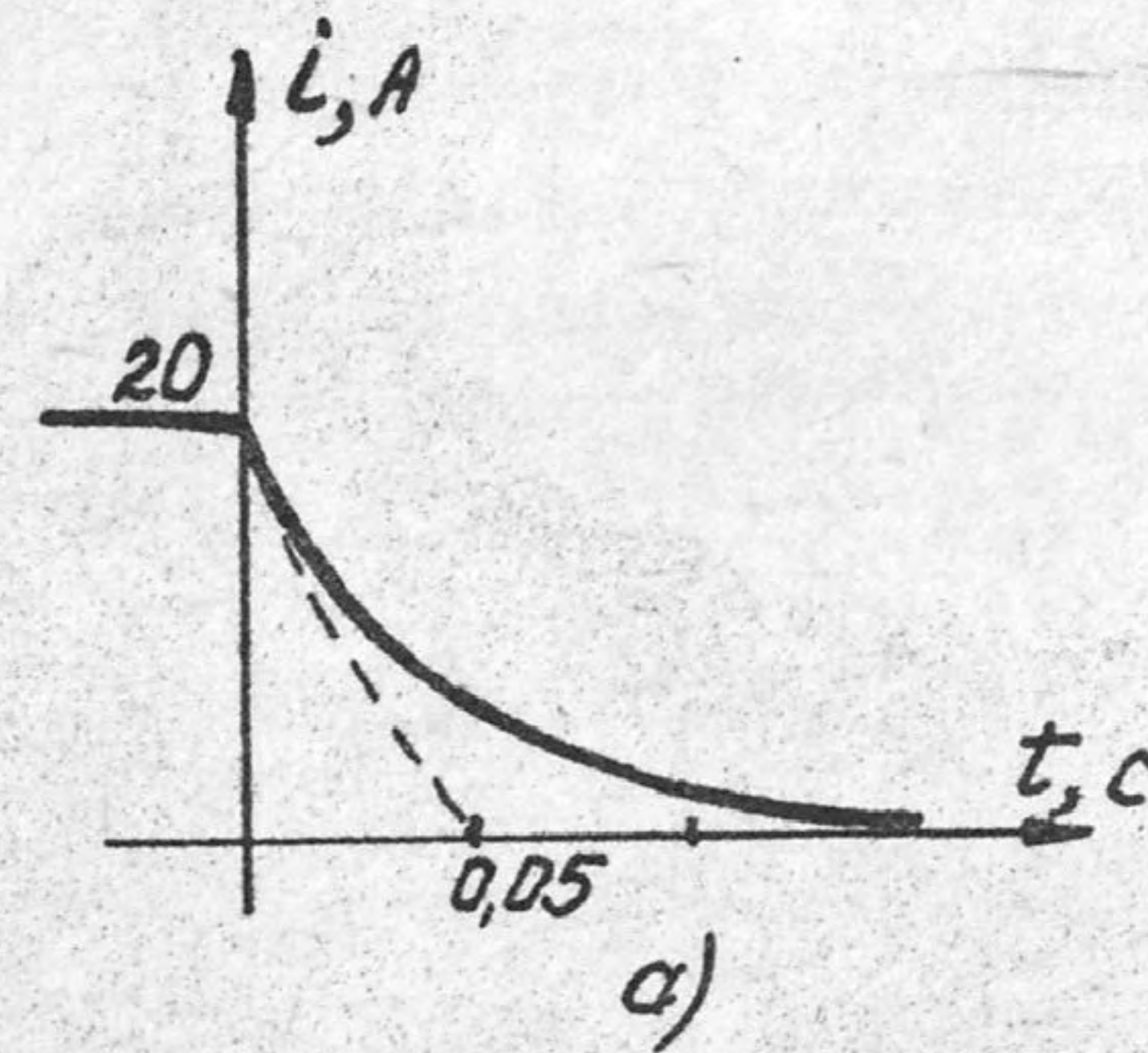
$$p = -\frac{r + r_g}{L} = -20 \text{ 1/с}.$$


Рис. I4

$e_L = -L \frac{di}{dt} = (r_g + r) 20 e^{-20t} = 40 e^{-20t}$ (рис. I4б). Из формулы видно, что максимальная ЭДС возникает в катушке в момент коммутации, т.е. при $t = 0_+$, $e_{Lm} = 40 \text{ В}$. Ее значение растет с увеличением сопротивления r_g . При мгновенном разрыве цепи (можно считать $r_g = \infty$) ЭДС самоиндукции должна равняться бесконечности. В реальных устройствах бесконечно большая ЭДС не возникает, так как при отключении цепи между размыкаемыми контактами образуется электрическая дуга или искра.

Пример 9. Количество электричества, протекающее при коротком замыкании контура $r-L$, равно $0,4 \text{ Кл}$. Активная мощность $P_z = 90 e^{-30t}$. Определить параметры контура, ЭДС источника, значение тока и магнитной энергии в момент коммутации.

Решение. Закон изменения тока при коротком замыкании контура определяется выражением

$$i = \frac{E}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{T}},$$

где $T = \frac{L}{r}$ — постоянная времени контура.

Активная и реактивная мощности равны соответственно

$$P_z = i^2 r = r \left(\frac{E}{r} e^{-\frac{t}{T}} \right)^2 = \frac{E^2}{r} e^{-2\frac{t}{T}};$$

$$P_L = u_L \cdot i = L \frac{di}{dt} i = -E e^{-\frac{t}{T}} \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{T}} = -\frac{E^2}{r} e^{-2\frac{t}{T}}$$

Отсюда следует, что постоянная времени для мощности в два раза меньше, чем для тока или напряжения. Отрицательный знак P_L указывает на то, что индуктивность отдает накопленную в ней энергию. Равенство $P_z = -P_L$ означает, что вся энергия, теряе-

мая магнитным полем индуктивности, выделяется в виде тепла в активном сопротивлении. Количество протекающего электричества за время всего процесса (от 0 до ∞)

$$q = \int_0^{\infty} i dt = \int_0^{\infty} \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{EL}{\tau^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{EL}{\tau^2} = \frac{L i(0)}{\tau}$$

Здесь $i(0)$ — начальное значение тока.

Энергия, выделяющаяся в активном сопротивлении за время всего процесса,

$$w_r = \int_0^{\infty} p_r dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{\tau} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2 L}{2\tau^2} = \frac{L i^2(0)}{2}$$

Из выражений для мощности и количества электричества следует:

$$\frac{E^2}{\tau} = 90 = E i(0); T = \frac{L}{\tau} = \frac{1}{15}; q = \frac{L i(0)}{\tau} = T i(0) = \frac{1}{15} i(0) = 0,4,$$

$$\text{откуда } i(0) = 6 \text{ А}; E = \frac{90}{i(0)} = 15 \text{ В}; \tau = \frac{L}{i(0)} = 2,5 \text{ Ом};$$

$$L = T\tau = \frac{1}{6} \text{ Г}; w(0) = \frac{L i^2(0)}{2} = 3 \text{ Дж.}$$

Пример 10. катушка с параметрами $\tau = 10 \text{ м}$, $L = 0,01 \text{ Г}$ подключается к источнику постоянного напряжения $\mathcal{U} = 10 \text{ В}$ (рис. 15).

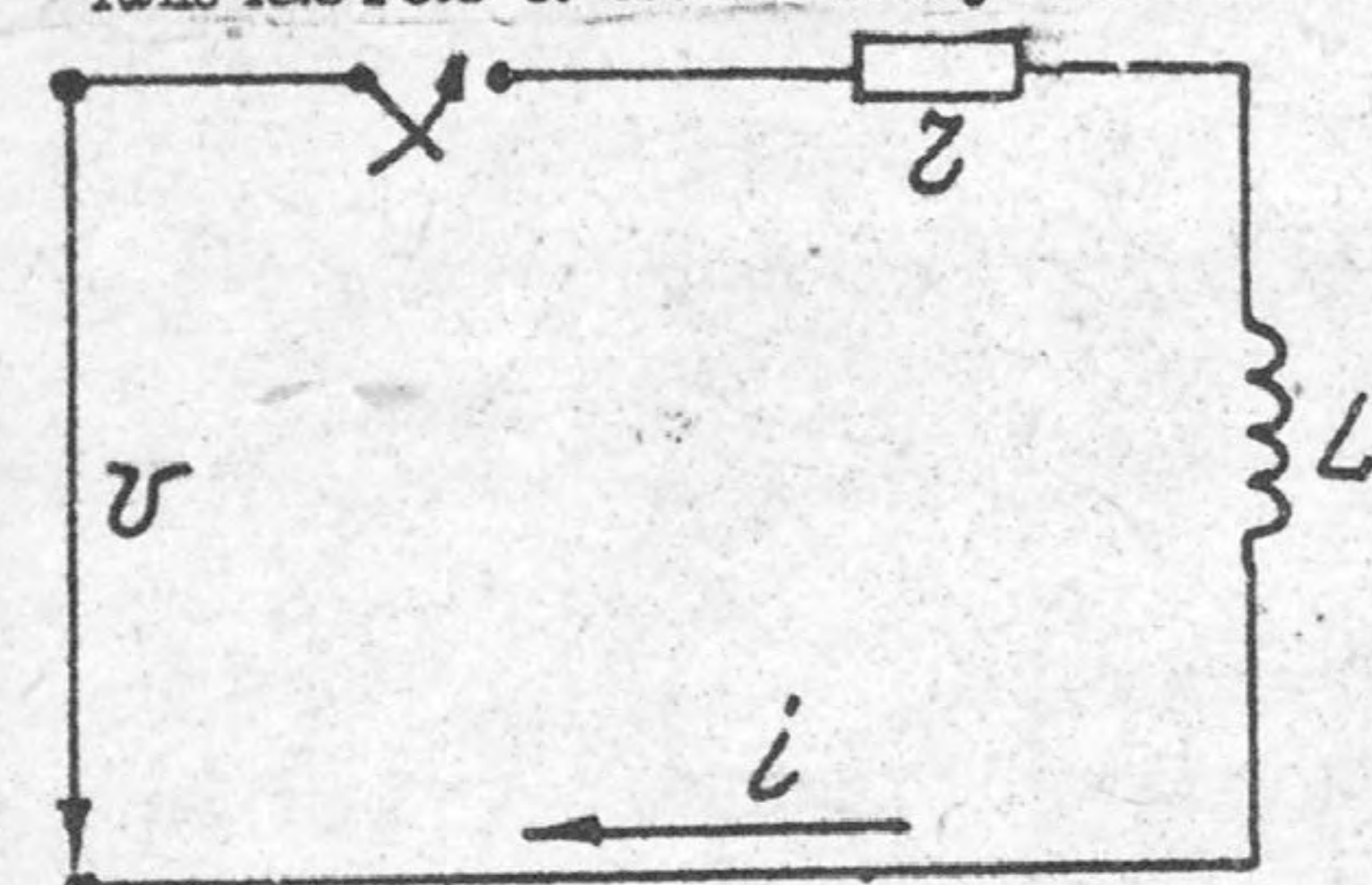


Рис. 15

ристическое уравнение

Определить: 1) законы изменения напряжения на сопротивлении, напряжения на индуктивности, реактивной мощности; 2) полную энергию цепи; 3) момент времени t_1 , при котором реактивная мощность достигает максимума, и значение этого максимума.

Решение. Составляем характе-

$$Z_{вх}(\rho) = r + L\rho = 0; \rho = -100 + j\omega c.$$

Принужденная составляющая тока

$$i_{пр} = \frac{\mathcal{U}}{r} = 10 \text{ А.}$$

Постоянную интегрирования находим из начальных условий

$$i = i_{пр} + i_{св} = 10 + A e^{-100t},$$

$$i(0_-) = 0 = i(0_+) = 10 + A,$$

откуда $A = -10$.

Закон изменения тока $i = 10 - 10 e^{-100t}$. Напряжения на сопротивлении и индуктивности равны соответственно

$$u_r = i r = 10 - 10 e^{-100t}; u_L = L \frac{di}{dt} = 10 e^{-100t}$$

Закон изменения реактивной мощности находим по формуле

$$p_L = u_L i = 100(e^{-100t} - e^{-200t}).$$

Полная энергия цепи

$$w_{полн} = \int_0^{\infty} p_L dt = \frac{\mathcal{U}^2 L}{2\tau^2} = \frac{L i_{пр}^2}{2} = 0,5 \text{ Дж.}$$

Момент времени t_1 , при котором реактивная мощность достигает максимума, определяем из условия $\frac{\partial p_L}{\partial t} = 0$:

$$-100 e^{-100t_1} + 200 e^{-200t_1} = 0; t_1 = 0,0007 \text{ с.}$$

При этом максимальное значение мощности

$$p_{L \max} = 100\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 25 \text{ Вт.}$$

Пример 11. В схеме рис. 16а действует синусоидальная ЭДС $e(t) = 100 \sin(500t + \frac{\pi}{4})$. В момент времени $t = 0$ замыкается ключ. Определить $i_1(t)$, $i_2(t)$, $u_c(t)$, если $r_1 = r_2 = 100 \text{ м}$, $L = 0,02 \text{ Г}$, $C = 200 \text{ мкФ}$.

Решение. Определяем независимые начальные условия, для чего, рассчитывая схему до коммутации, находим законы изменения тока в индуктивности и напряжения на емкости. Так как в схеме действует синусоидальная ЭДС, предварительный расчет ведем комплексным методом:

$$\dot{I} = \frac{E}{Z} = \frac{E e^{j\psi}}{r_1 + r_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = 2,5 + 2,5j = 2,5\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$$i(t) = 5 \sin(500t + \frac{\pi}{4}),$$

$$\dot{U}_c = \dot{I} Z_c = 25\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

$$u_c(t) = 50 \sin(500t - \frac{\pi}{4}).$$

$$\frac{100}{5} = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10}$$

Подставив в полученные выражения время $t = 0_-$, находим

$$i_L(0_-); u_C(0_-);$$

$$i(0_-) = i_1(0_-) = 2,5\sqrt{2}; \quad i_1(0_+) = i_1(0_-) = 2,5\sqrt{2};$$

$$u_C(0_-) = -25\sqrt{2} = u_C(0_+).$$

После коммутации схема рис. 16а распадается на две электрически несвязанные схемы (рис. 16б, в). Характеристические уравнения для схем рис. 16б, в соответственно имеют вид:

$$Z_{1bx}(\rho) = \tau_1 + L\rho = 0; \quad \rho_1 = -\frac{\tau_1}{L} = -500 \text{ 1/c};$$

$$Z_{2bx}(\rho) = \tau_2 + \frac{1}{C\rho} = 0; \quad \rho_2 = -\frac{1}{\tau_2 C} = -500 \text{ 1/c}.$$

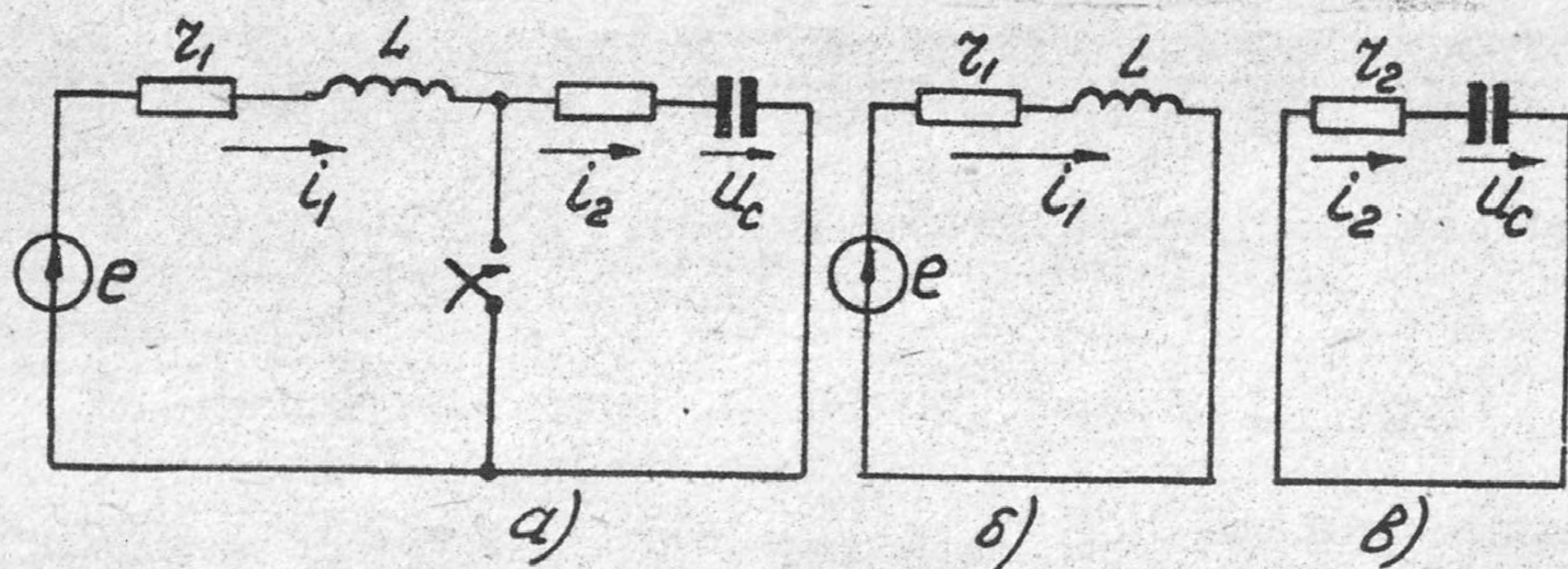


Рис. 16

Принужденные значения тока i_1 и напряжения u_C равны:

$$i_{1np} = \frac{\dot{E}}{Z_1} = \frac{E e^{j\psi_E}}{\tau_1 + j\omega L} = 5; \quad i_{1np} = 5\sqrt{2} \sin 500t; \quad u_{Cnp} = 0.$$

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий:

$$i_1 = i_{1np} + i_{1cb} = 5\sqrt{2} \sin 500t + A_1 e^{-500t};$$

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Ccb} = A_2 e^{-500t}.$$

При $t = 0_+$

$$i_1(0_+) = 2,5\sqrt{2} = i_{1np}(0_+) + i_{1cb}(0_+) = 0 + A_1; \quad A_1 = 2,5\sqrt{2};$$

$$u_C(0_+) = -25\sqrt{2} = A_2; \quad A_2 = -25\sqrt{2}.$$

Ответ:

$$i_1 = 5\sqrt{2} \sin 500t + 2,5\sqrt{2} e^{-500t};$$

$$u_C = -25\sqrt{2} e^{-500t};$$

$$i_2 = -\frac{u_C}{\tau_2} = 2,5\sqrt{2} e^{-500t}.$$

Пример 12. Для схемы рис. 17 дано: $E = 120 \text{ В}; \tau_1 = \tau_2 = \tau_0 = 10 \text{ Ом}; L = 0,1 \text{ Г}; C = 100 \text{ мкФ}$. Определить значения всех токов и напряжений в моменты времени $t = 0_-; t = 0_+; t = \infty$. Определить закон изменения напряжения на емкости.

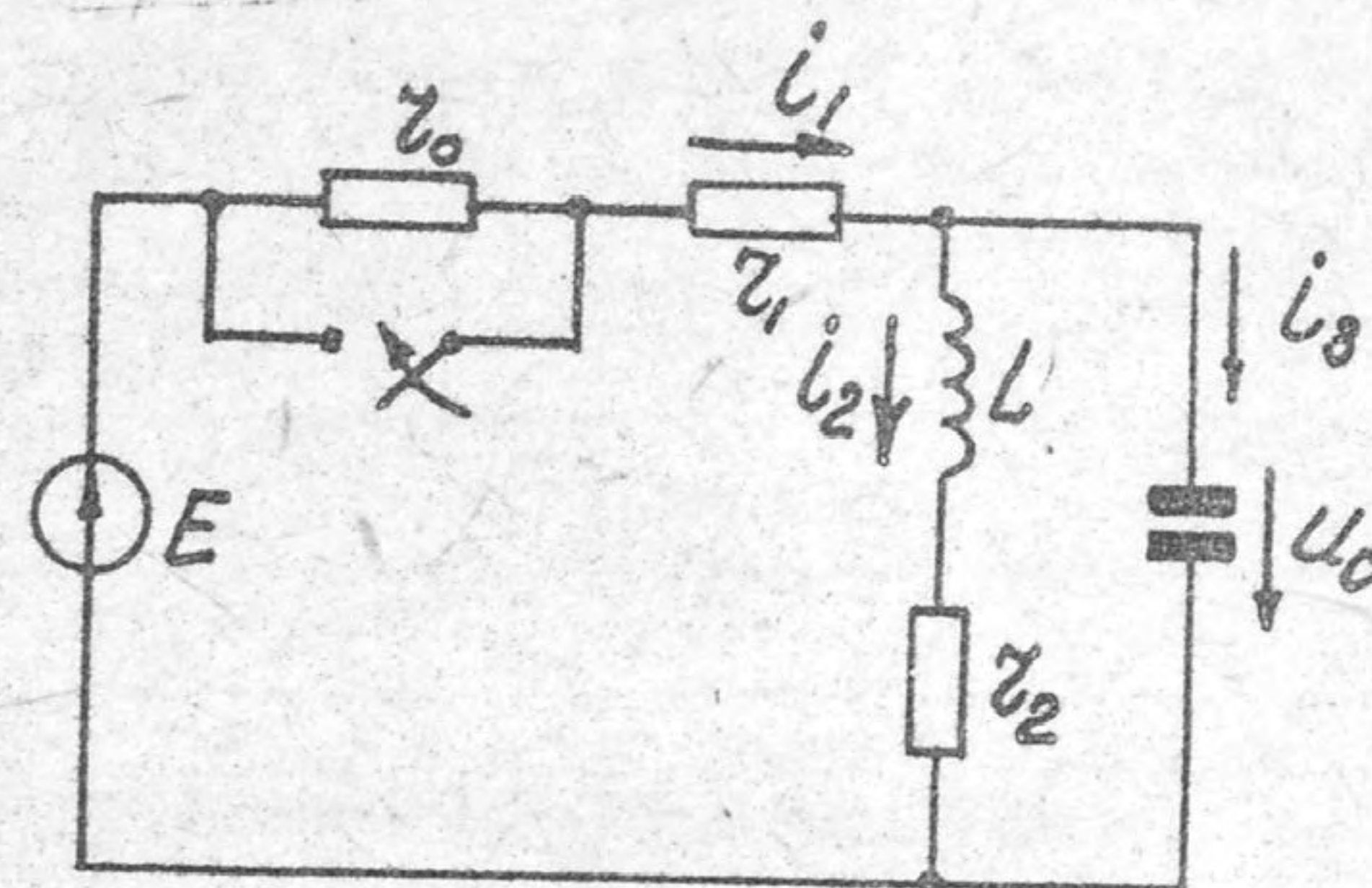


Рис. 17

Решение. Так как цепь подключена к источнику постоянного напряжения, то в установившемся режиме до коммутации индуктивность имеет нулевое сопротивление, а емкость — бесконечно большое. Поэтому $i_3(0_-) = 0; i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{\tau_0 + \tau_1 + \tau_2} = 4 \text{ А};$

$$u_L(0_-) = 0; \quad u_C(0_-) = i_2(0_-) \tau_2 = 40 \text{ В}.$$

В соответствии с законами коммутации

$$i_2(0_-) = 4 \text{ А} = i_2(0_+); \quad u_C(0_-) = 40 \text{ В} = u_C(0_+).$$

Используя уравнения для схемы после коммутации, определим значения токов i_1, i_3 и напряжения u_L в момент времени $t = 0_+$:

$$i_1 \tau_1 + u_C = E; \quad i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_+)}{\tau_1} = 8 \text{ А};$$

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 4 \text{ А};$$

$$i_2 \tau_2 + u_L = u_C; \quad u_L(0_+) = u_C(0_+) - i_2(0_+) \tau_2 = 0.$$

Полученные выражения позволяют определить значения $\frac{dU_C}{dt}(0_+)$, $\frac{dU_L}{dt}(0_+)$, если это требуется для расчета цепи, из соотношений $i_3 = C \frac{dU_C}{dt}$, $U_L = L \frac{di_2}{dt}$. Отсюда получим $\frac{di_2}{dt}(0_+) = \frac{U_L(0_+)}{L} = 0$; $\frac{dU_C}{dt}(0_+) = \frac{i_3(0_+)}{C} = 4 \cdot 10^3 \text{ A/C}$.

В установившемся режиме после коммутации ($t = \infty$) $i_{3np} = 0$; $i_{1np} = i_{2np} = \frac{U}{r_1 + r_2} = 6 \text{ A}$; $U_{Cnp} = i_{2np} r_2 = 60 \text{ B}$; $U_{Lnp} = 0$.

Полученные значения сведены в табл. 2.

Таблица 2

Моменты времени	$t = 0_-$	$t = 0_+$	$t = \infty$
i_1	4	8	6
i_2	4	4	6
i_3	0	4	0
U_C	40	40	60
U_L	0	0	0

Корни характеристического уравнения

$$Z_{BX}(\rho) = r_1 + \frac{(r_2 + L\rho) \frac{1}{C\rho}}{r_2 + L\rho + \frac{1}{C\rho}} = 0; \quad \rho^2 + 200\rho + 2 \cdot 10^4 = 0.$$

равны $\rho_{1,2} = -100 \pm 100j = -\delta \pm j\omega_{CB}$.

При комплексных корнях характеристического уравнения решение для напряжения U_C ищем в виде

$$U_C = U_{Cnp} + U_{Ccb} = U_{Cnp} + (A_1 \cos \omega_{CB} t + A_2 \sin \omega_{CB} t) e^{-\delta t} = 60 + (A_1 \cos 100t + A_2 \sin 100t) e^{-100t}.$$

Определяем постоянные интегрирования, пользуясь найденными начальными условиями $U_C(0_+)$, $\frac{dU_C}{dt}(0_+)$:

$$U_C = 60 + (A_1 \cos 100t + A_2 \sin 100t) e^{-100t},$$

$$\frac{dU_C}{dt} = (A_1 100 \sin 100t + A_2 100 \cos 100t) e^{-100t} + (A_1 \cos 100t + A_2 \sin 100t) (-100) e^{-100t}.$$

При $t = 0_+$

$$U_C(0_+) = 40 = 60 + A_1,$$

$$\frac{dU_C}{dt}(0_+) = 4 \cdot 10^3 = A_2 \cdot 100 - A_1 \cdot 100,$$

Откуда $A_1 = -20$; $A_2 = 20$.

$$\text{Ответ: } U_C = 60 + (20 \sin 100t - 20 \cos 100t) e^{-100t} = 60 + 20\sqrt{2} \sin(100t - \frac{\pi}{4}) e^{-100t}.$$

Пример 13. Найти законы изменения напряжения на конденсаторе и токов во всех ветвях схемы рис. 18, если ключ переводится из положения I в положение II. $E_1 = E_2 = 50 \text{ B}$, $r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}$, $C = 10^{-4} \text{ Ф}$.

Решение. До коммутации $i_3(0_-) = 0$; $i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{r_1 + r_2} =$

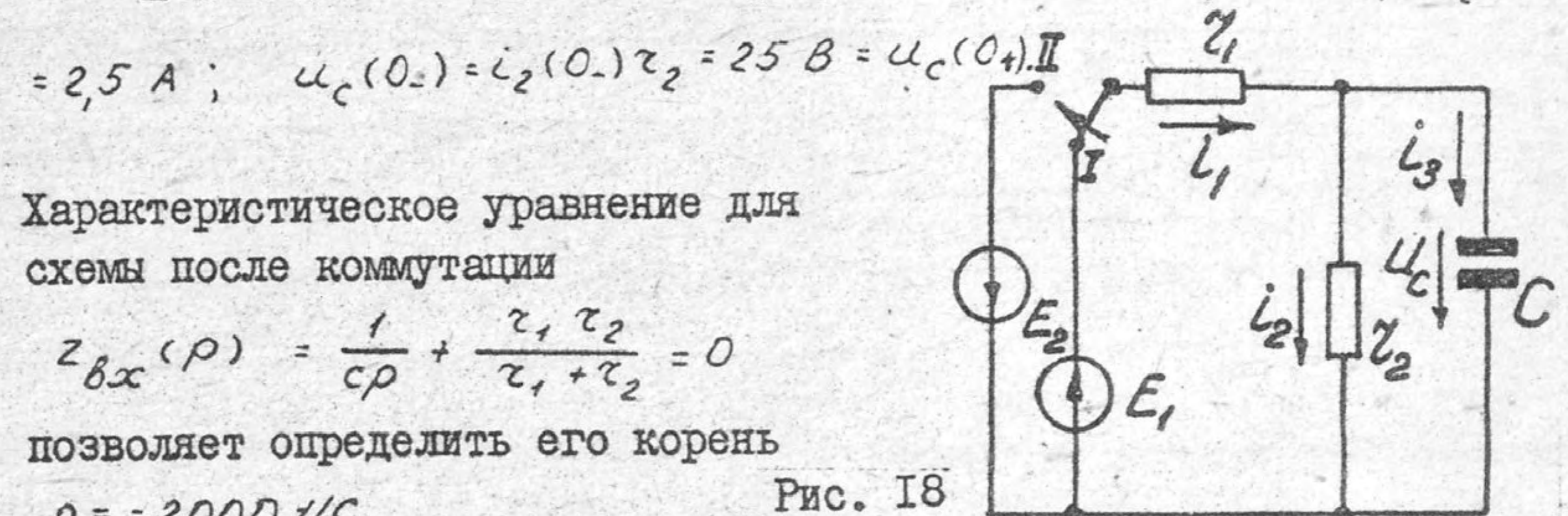


Рис. 18

Характеристическое уравнение для схемы после коммутации

$$Z_{BX}(\rho) = \frac{1}{C\rho} + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0$$

позволяет определить его корень

$$\rho = -2000 \text{ 1/с}.$$

Решение для U_C ищем в виде $U_C = U_{Cnp} + U_{Ccb} = U_{Cnp} + Ae^{-2000t}$.

Здесь $U_{Cnp} = -\frac{E_2 r_2}{r_1 + r_2} = -25 \text{ B}$.

Постоянная интегрирования $A = 50$, так как

$$U_C(0_+) = U_{Cnp}(0_+) + U_{Ccb}(0_+) = -25 + A = 25.$$

Следовательно,

$$U_C = -25 + 50e^{-2000t} \quad (\text{рис. 19a}).$$

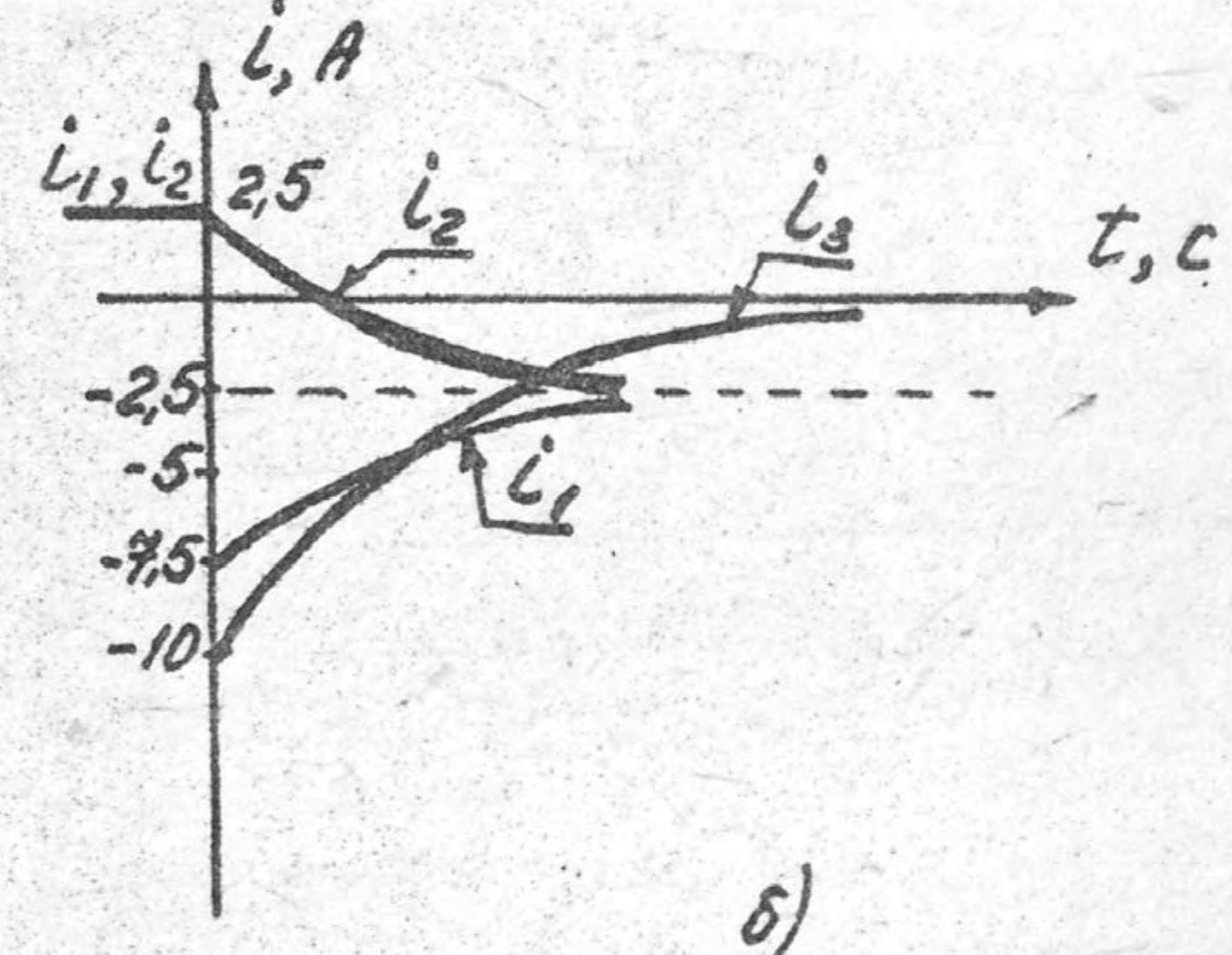
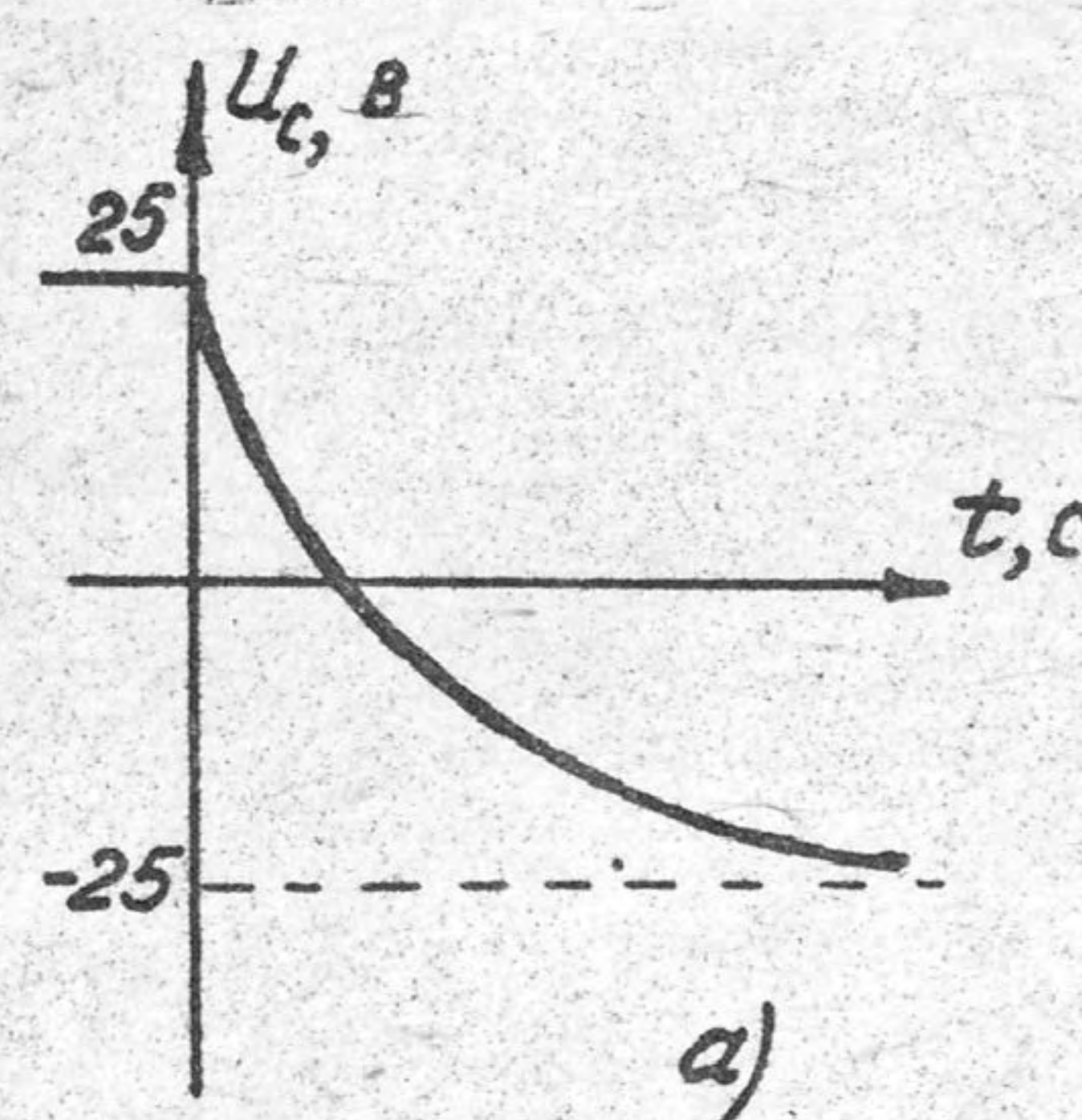


Рис. 19

Определяем токи в ветвях:

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_c}{dt} = -10e^{-2000t}; \\ i_2 &= \frac{u_c}{Z_2} = -2,5 + 5e^{-2000t}; \\ i_4 &= i_2 + i_3 = -2,5 - 5e^{-2000t}. \end{aligned}$$

Полученные зависимости представлены графически на рис. 19б.

Значения токов и напряжения u_c для моментов времени $0-, 0+, \infty$ сведены в табл. 3.

Таблица 3

Моменты времени	$t = 0-$	$t = 0+$	$t = \infty$
i_1	2,5	-7,5	-2,5
i_2	2,5	2,5	-2,5
i_3	0	-10	0
u_c	25	25	-25

Пример I4. В схеме рис. 20 определить $u_c(t)$, $i_2(t)$, если дано: $e(t) = 250 \sin(100t + \frac{\pi}{2})$, $r_1 = r_2 = 12,5 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Г}$; $C = 1000 \text{ мкФ}$.

Решение. I. Рассчитываем схему до коммутации и определяем независимые начальные условия. Так как ЭДС изменяется по синусоидальному закону, то расчет проведем комплексным методом:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\dot{E}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{\dot{E}}{r_1 + \frac{j\omega L(-j\frac{1}{\omega C})}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}} = \\ &= \frac{125\sqrt{2}j}{12,5 + \frac{10j(-10j)}{10j - 10j}} = 0; \end{aligned}$$

$$i_1(t) = 0;$$

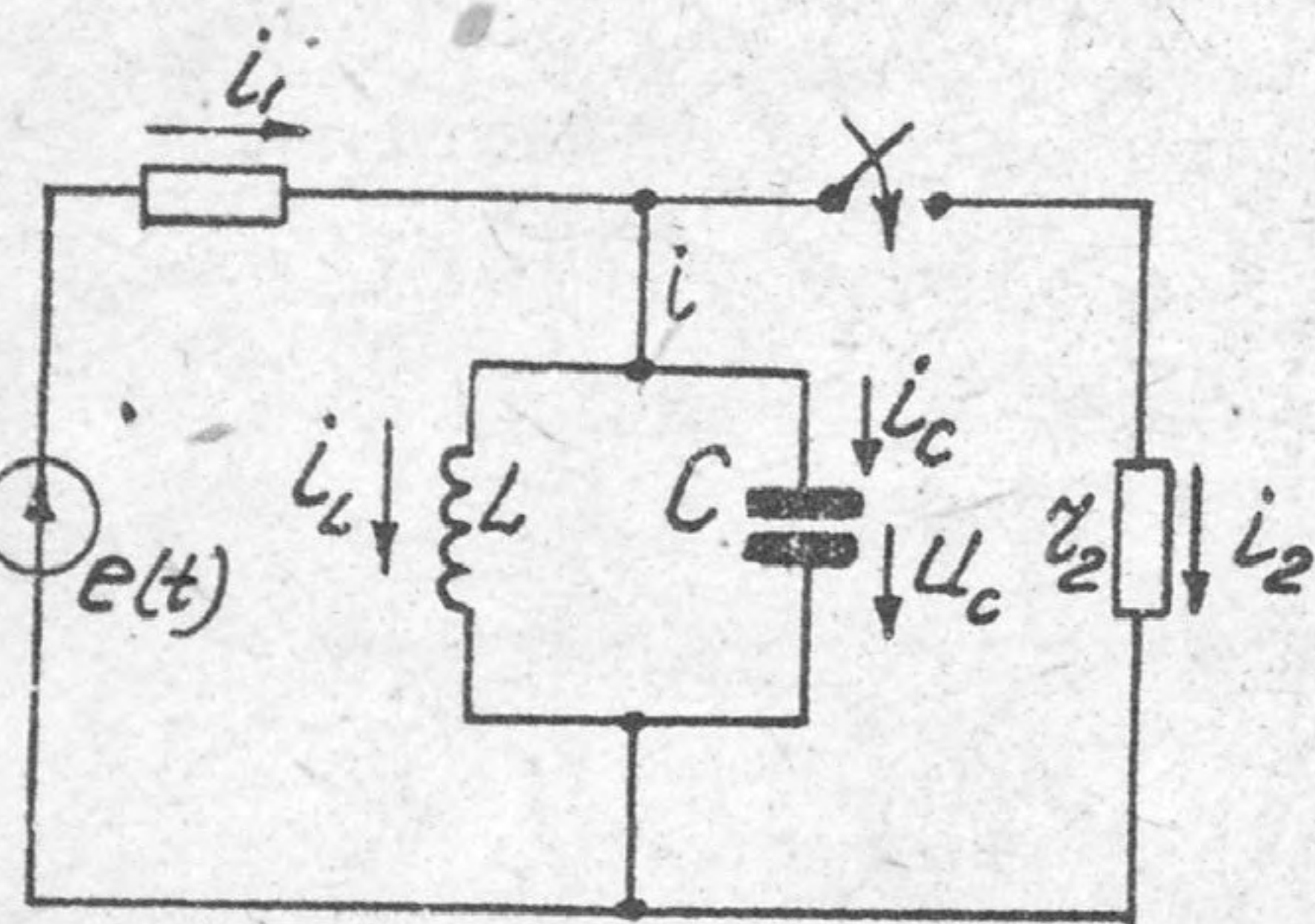


Рис. 20

$$\begin{aligned} \dot{I}_L &= \frac{\dot{E}}{Z_L} = \frac{\dot{E}}{j\omega L} = \frac{125\sqrt{2}j}{10j} = 12,5; \quad i_L(t) = 12,5\sqrt{2} \sin 100t; \\ \dot{U}_C &= \dot{E}; \quad u_c(t) = 250 \sin(100t + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

При $t = 0$ получим $i_L(0-) = 0 = i_L(0+)$; $u_c(0-) = 250 = u_c(0+)$.

2. Для схемы после коммутации корни характеристического уравнения

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{Lp \frac{1}{Cp}}{Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{Lp}{LCp^2 + 1} = 0$$

равны $p_{1,2} = -80 \pm 60j$.

3. Расчет переходного процесса проведем для напряжения на емкости

$$u_c = u_{cnp} + u_{cсв} = u_{cnp} + (A_1 \cos 60t + A_2 \sin 60t)e^{-80t}$$

4. Принужденную составляющую напряжения на емкости рассчитаем также комплексным методом. Так как $\theta_L = \theta_C$, то $\dot{I}_{np} = 0$; $\dot{I}_{1np} = \dot{I}_{2np} = \frac{\dot{E}}{r_1 + r_2} = 5\sqrt{2}j$; $\dot{U}_{cp} = \dot{I}_{2np} r_2 = 62,5\sqrt{2}j$ и $u_{cnp}(t) = 125 \sin(100t + \frac{\pi}{2})$.

5. Для определения значения $\frac{du_c}{dt}(0+)$ используем уравнения

$$\begin{cases} i_1 r_1 + u_c = e, \\ i_2 r_2 = u_c, \\ i_1 = i_L + i_C + i_2, \end{cases} \quad \text{при } t=0+ \quad \begin{cases} i_1(0+) = \frac{e(0+) - u_c(0+)}{r_1} = 0; \\ i_2(0+) = \frac{u_c(0+)}{r_2} = 20 \text{ А}; \\ i_C(0+) = i_C(0+) - i_L(0+) - i_2(0+) = -20 \text{ А}; \end{cases}$$

$$\frac{du_c}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = -2 \cdot 10^4 \text{ В/с}.$$

6. Находим постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} u_c &= 125 \sin(100t + \frac{\pi}{2}) + (A_1 \cos 60t + A_2 \sin 60t)e^{-80t}; \\ \frac{du_c}{dt} &= \frac{du_{cnp}}{dt} + \frac{du_{cсв}}{dt} = 12500 \cos(100t + \frac{\pi}{2}) + \\ &+ (-A_1 \cdot 60 \sin 60t + A_2 \cdot 60 \cos 60t)e^{-80t} + \\ &+ (A_1 \cos 60t + A_2 \sin 60t)(-80)e^{-80t}. \end{aligned}$$

При $t = 0+$

$$u_c(0+) = u_{cnp}(0+) + u_{cсв}(0+) = 250 = 125 + A_1,$$

$$\frac{du_c}{dt}(0+) = \frac{du_{cnp}}{dt}(0+) + \frac{du_{cсв}}{dt}(0+) = -2 \cdot 10^4 = A_2 \cdot 60 - A_1 \cdot 80,$$

откуда $A_1 = 125$; $A_2 = -\frac{500}{3}$.

7. Получили закон изменения напряжения на емкости

$$u_c(t) = 125 \sin(100t + \frac{\pi}{2}) + (125 \cos 60t - \frac{500}{3} \sin 60t) e^{-80t}$$

8. Ток $i_2(t)$ равен

$$i_2 = \frac{u_c}{\tau_2} = 10 \sin(100t + \frac{\pi}{2}) + (10 \cos 60t - \frac{40}{3} \sin 60t) e^{-80t}$$

Примечание: Значения токов и напряжений для $t = 0_+$ можно определить из схемы, составленной для этого момента времени, заменяя индуктивность и емкость источником тока и источником ЭДС соответственно (рис. 21).

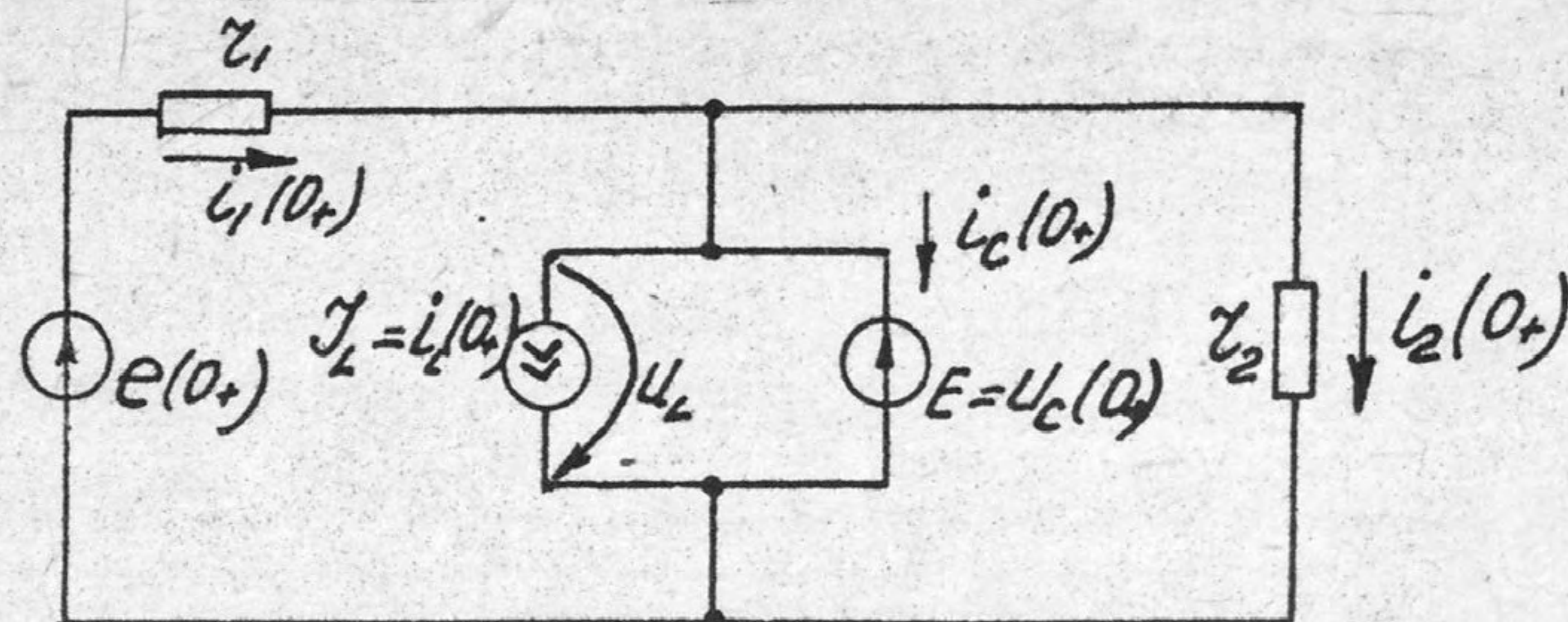


Рис. 21

По законам Кирхгофа для этой схемы получим

$$i_2(0_+) = \frac{E_c}{\tau_2} = 20 \text{ A}; \quad i_1(0_+) = \frac{e(0_+) - E_c}{\tau_1} = 0;$$

$$u_c(0_+) = E_c = 250 \text{ В}; \quad i_c(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = -20 \text{ A}.$$

Пример 15. Рассчитать токи, протекающие в ветвях схемы рис. 22, если

$$E = 120 \text{ В}; \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 10 \text{ Ом}; \quad L_1 = L_2 = 0,2 \text{ Г}; \quad M = 0,1 \text{ Г}.$$

Решение. I. В схеме до коммутации

$$i_3(0_-) = 0; \quad i_2(0_-) = i_1(0_-) = \frac{E}{\tau_1 + \tau_2} = 6 \text{ A}.$$

2. Методом входного сопротивления составляем характеристическое уравнение, предварительно устранив магнитную связь (рис. 23), и определяем его корни:

$$Z_{вх}(\rho) = \tau_1 - M\rho + \frac{[\tau_2 + (L_2 + M)\rho][\tau_3 + (L_3 + M)\rho]}{\tau_2 + (L_2 + M)\rho + \tau_3 + (L_3 + M)\rho} = 0,$$

$$0,03\rho^2 + 10\rho + 300 = 0; \quad \rho_1 = -\frac{100}{3} \text{ 1/с}; \quad \rho_2 = -300 \text{ 1/с}.$$

3. Расчет начинаем с определения тока i_2 :

$$i_2 = i_{2np} + i_{2св} = i_{2np} + A_1 e^{-\frac{100}{3}t} + A_2 e^{-300t}$$

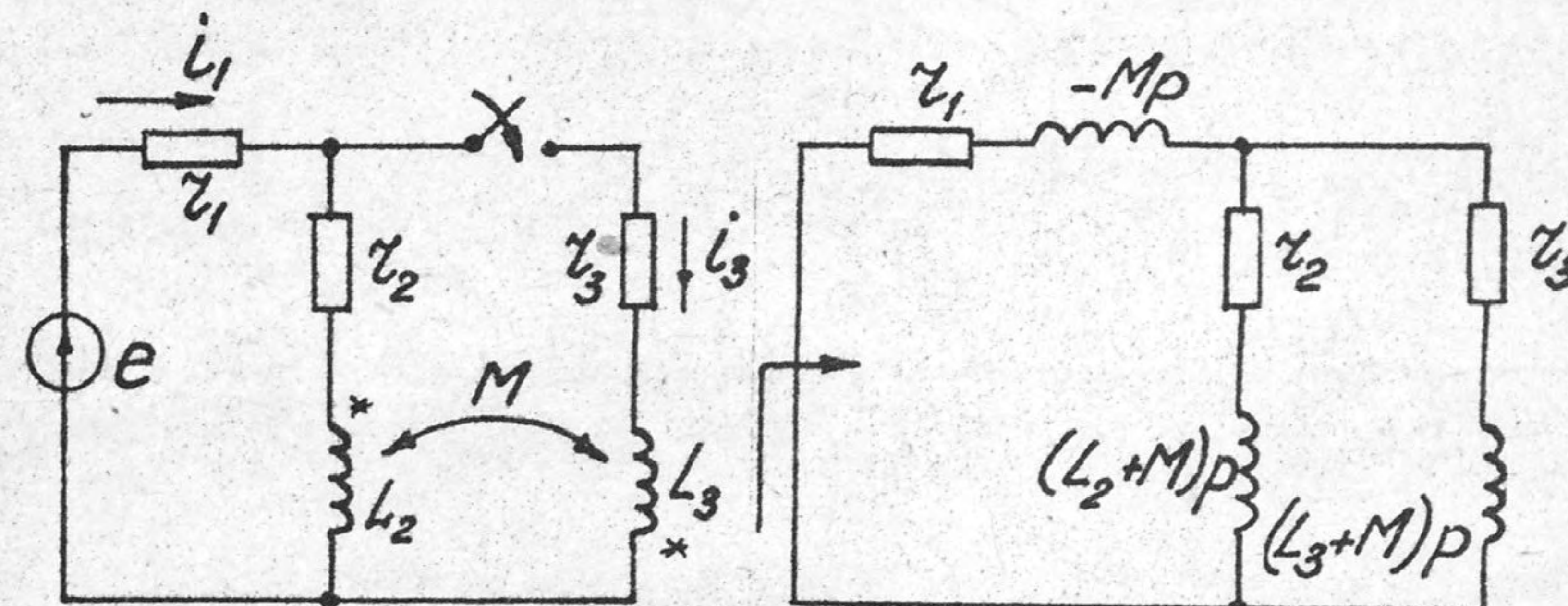


Рис. 22

Рис. 23

4. Определяем принужденную составляющую тока

$$i_{2np} = \frac{E}{2(\tau_1 + \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_2 + \tau_3})} = 4 \text{ A}, \quad \text{так как } \tau_2 = \tau_3.$$

5. Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 находим значение $\frac{di_2}{dt}(0_+)$. Для этого составляем систему уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений в послекоммутационной схеме:

$$\begin{aligned} i_1 \tau_1 + i_2 \tau_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_3}{dt} &= E, \\ i_2 \tau_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_3}{dt} - i_3 \tau_3 - L_3 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= 0, \\ i_1 &= i_2 + i_3. \end{aligned}$$

При $t = 0_+$ имеем

$$\begin{aligned} i_1(0_+) \tau_1 + i_2(0_+) \tau_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}(0_+) - M \frac{di_3}{dt}(0_+) &= E, \\ i_2(0_+) \tau_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}(0_+) - M \frac{di_3}{dt}(0_+) - i_3(0_+) \tau_3 - L_3 \frac{di_3}{dt}(0_+) + \\ + M \frac{di_2}{dt}(0_+) &= 0, \quad i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+). \end{aligned}$$

Так как $i_3(0_+) = 0 = i_3(0_-)$, $i_2(0_+) = 6 \text{ A} = i_2(0_-)$,

$$\text{то } i_1(0_+) = 6 \text{ A}; \quad \frac{di_2}{dt}(0_+) = 200 \text{ A/с}; \quad \frac{di_3}{dt}(0_+) = 400 \text{ A/с}.$$

Тогда для тока i_2 и его производной получим

$$\begin{aligned} i_2 &= 4 + A_1 e^{-\frac{100}{3}t} + A_2 e^{-300t}, \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{100}{3} A_1 e^{-\frac{100}{3}t} - 300 A_2 e^{-300t}. \end{aligned}$$

При $t = 0_+$ имеем

$$i_2(0_+) = 6 = 4 + A_1 + A_2,$$

$$\frac{di_2}{dt}(0_+) = 200 = -\frac{100}{3}A_1 - 300A_2,$$

откуда $A_1 = 3$; $A_2 = -1$.

$$\text{Ответ: } i_2 = 4 + 3e^{-\frac{100}{3}t} - 1e^{-300t}$$

7. Ток i_3 рассчитаем аналогично:

$$i_3 = 4 - 3e^{-\frac{100}{3}t} - e^{-300t}.$$

Ток i_1 находим по первому закону Кирхгофа для узла:

$$i_1 = i_2 + i_3 = 8 - 2e^{-300t}.$$

Пример I6. В схеме рис. 24 конденсатор $C_1 = 100 \text{ мкФ}$, заряженный до напряжения $u_{C_1}(0) = 40 \text{ В}$, разряжается при замыкании ключа на последовательно соединенные конденсатор $C_2 = 200 \text{ мкФ}$ и сопротивление $r = 30 \text{ Ом}$, $u_{C_2}(0) = 0$. Найти выражения $u_{C_1}(t)$, $u_{C_2}(t)$, $i(t)$.

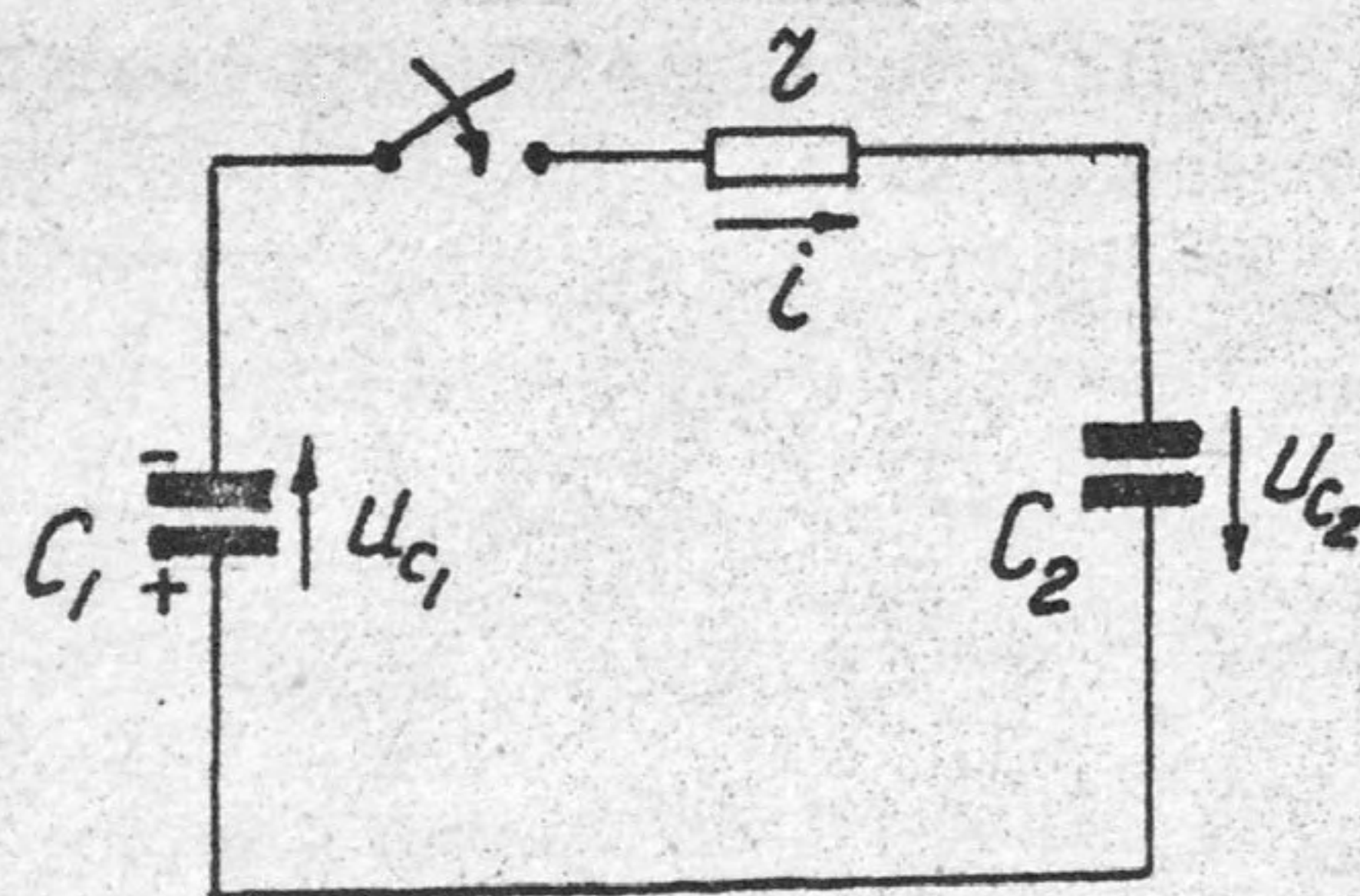


Рис. 24

Решение. Начальные условия заданы:

$$u_{C_1}(0_+) = 40 \text{ В} = u_{C_1}(0_-);$$

$$u_{C_2}(0_+) = 0 = u_{C_2}(0_-).$$

Составляем характеристическое уравнение

$$Z_{\text{вх}}(p) = r + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p} =$$

$$= r + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \frac{1}{p} = 0;$$

$$p = -\frac{1/C_1 + 1/C_2}{r} = -500 \text{ 1/с}.$$

В принужденном режиме

$$u_{C_1 \text{ пр}} = \frac{u_{C_1}(0)C_1}{C_1 + C_2} = \frac{40}{3} \text{ В}; \quad u_{C_2 \text{ пр}} = -\frac{u_{C_1}(0)C_1}{C_1 + C_2} = -\frac{40}{3} \text{ В}.$$

Постоянную интегрирования в выражении

$$u_{C_1}(t) = u_{C_1 \text{ пр}} + u_{C_1 \text{ св}} = \frac{40}{3} + Ae^{-500t}$$

определим из начальных условий: $u_{C_1}(0) = 40 = \frac{40}{3} + A$; $A = \frac{80}{3}$.

$$\text{Тогда } u_{C_1} = \frac{40}{3} + \frac{80}{3}e^{-500t} \quad (\text{рис. 25}).$$

Ток в цепи и напряжение на конденсаторе C_2 равны

$$i = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{4}{3}e^{-500t}$$

(рис. 25),

$$u_{C_2} = -u_{C_1} - i r =$$

$$= -\frac{40}{3} + \frac{40}{3}e^{-500t} \quad (\text{рис. 25}).$$

Пример I7. Конденсаторы $C_1 = 100 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 200 \text{ мкФ}$, заряженные до напряжений

$u_{10} = 10 \text{ В}$ и $u_{20} = 20 \text{ В}$, включаются в схему рис. 26, где

$r = 300 \text{ Ом}$. Найти $u_{C_1}(t)$, $u_{C_2}(t)$, $i(t)$. Составить

баланс энергий.

Решение. I. Независимые начальные условия заданы:

$$u_{C_1}(0_-) = u_{10} = 10 \text{ В} = u_{C_1}(0_+);$$

$$u_{C_2}(0_-) = u_{20} = 20 \text{ В} = u_{C_2}(0_+).$$

2. Определяем корни характеристического уравнения

$$Z_{\text{вх}}(p) = r + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p} = 0;$$

$$p = -\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 r} = -500 \text{ 1/с}.$$

3. Решение для напряжений u_{C_1} и u_{C_2} ищем в виде

$$u_{C_1} = u_{C_1 \text{ пр}} + u_{C_1 \text{ св}} = u_{C_1 \text{ пр}} + A_1 e^{-500t};$$

$$u_{C_2} = u_{C_2 \text{ пр}} + u_{C_2 \text{ св}} = u_{C_2 \text{ пр}} + A_2 e^{-500t}.$$

4. Принужденное значение напряжений

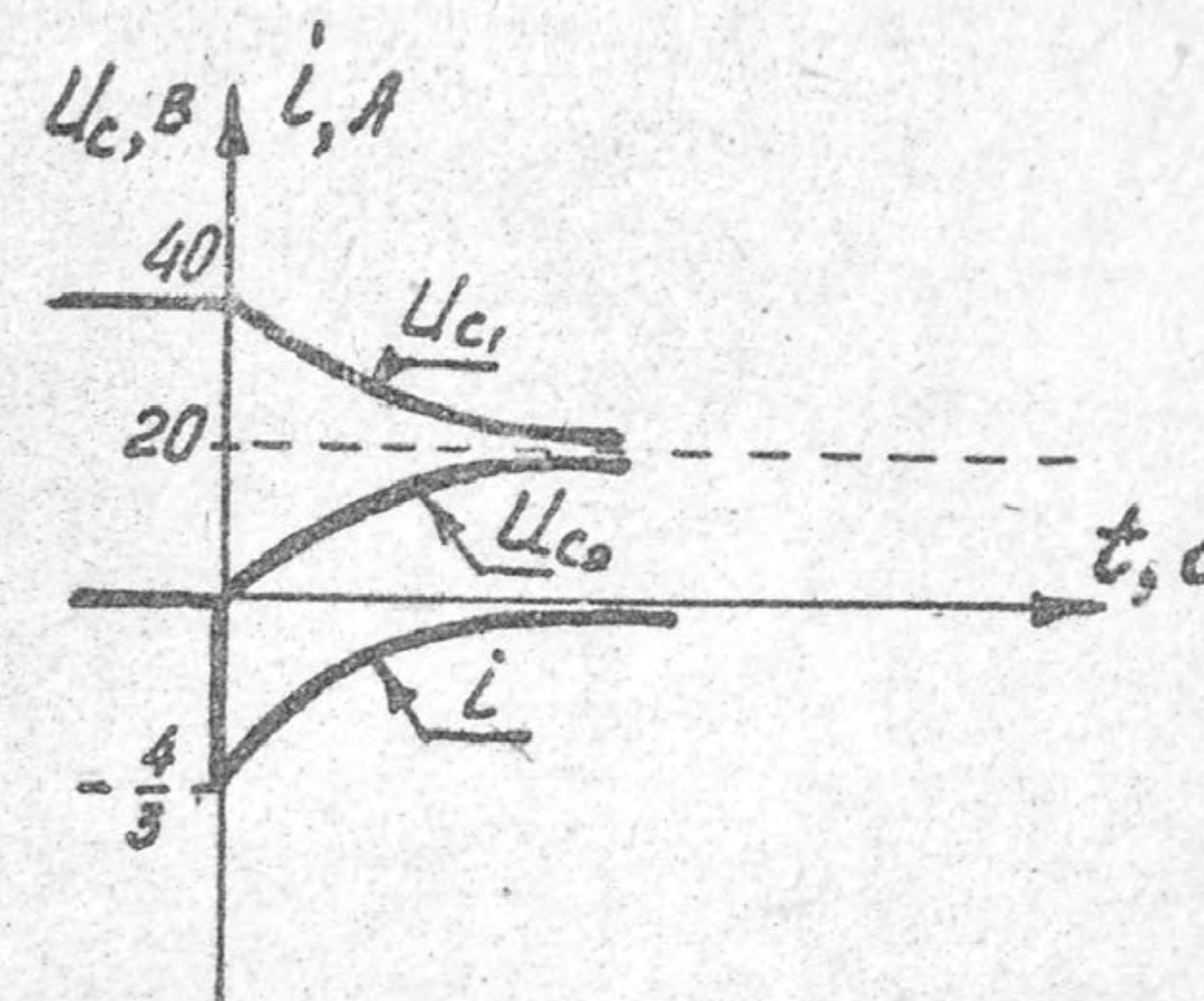


Рис. 25

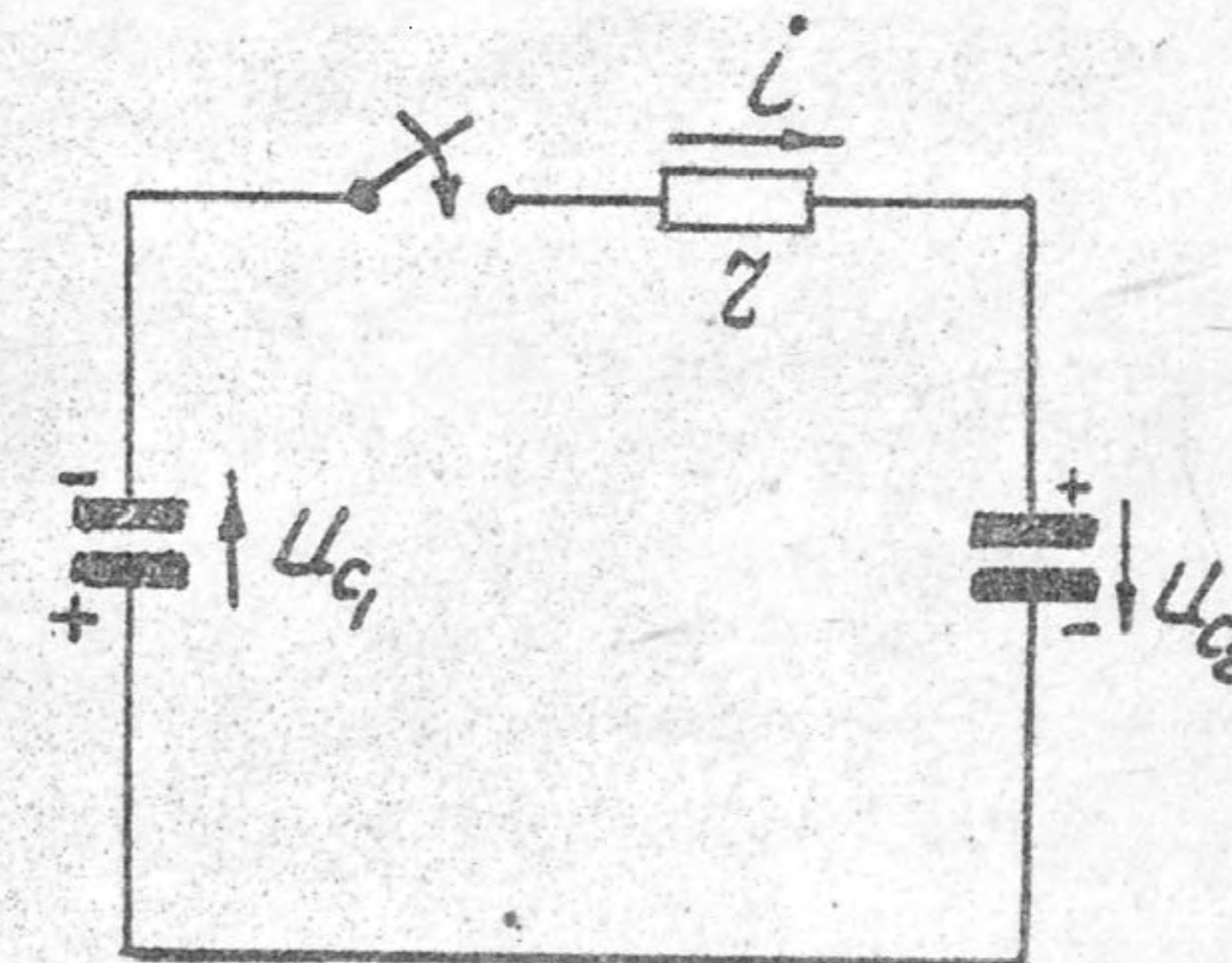


Рис. 26

$$u_{c1np} = \frac{C_1 u_{10} - C_2 u_{20}}{C_1 + C_2} = -10 \text{ В}; \quad u_{c2np} = \frac{C_2 u_{20} - C_1 u_{10}}{C_1 + C_2} = 10 \text{ В}.$$

5. Пользуясь начальными условиями, определим постоянные интегрирования.

$$\text{При } t=0_+ \quad u_{c1}(0_+) = u_{c1np}(0_+) + u_{c1cb}(0_+) = 10 = -10 + A_1;$$

$$u_{c2}(0_+) = u_{c2np}(0_+) + u_{c2cb}(0_+) = 20 = 10 + A_2,$$

$$\text{откуда } A_1 = 20; \quad A_2 = 10 \quad \text{и} \quad u_{c1} = -10 + 20e^{-500t}; \quad u_{c2} =$$

$$= 10 + 10e^{-500t}; \quad i = c_1 \frac{du_{c1}}{dt} = c_2 \frac{du_{c2}}{dt} = -e^{-500t} \quad (\text{рис. 27})$$

7. В общем виде ток определяется по формуле

$$i = c_1 \frac{du_{c1}}{dt} = c_2 \frac{du_{c2}}{dt} = -\frac{u_{10} + u_{20}}{\tau} e^{-\rho t}.$$

Энергия, затраченная на тепло за время переходного процесса,

$$w_{\tau} = \int_0^{\infty} \rho_{\tau} dt = \int_0^{\infty} i^2 \tau dt = \int_0^{\infty} \left(-\frac{u_{10} + u_{20}}{\tau} \right)^2 \tau e^{2\rho t} dt =$$

$$= \frac{(u_{10} + u_{20})^2}{\tau \rho} \left| e^{2\rho t} \right|_0^{\infty} = \frac{(u_{10} + u_{20})^2 C_1 C_2 \tau}{2\tau(C_1 + C_2)} = \frac{(u_{10} + u_{20})^2 C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} = 0,03 \text{ Дж}.$$

Следует обратить внимание на то, что энергия, затраченная на тепло, не зависит от значения сопротивления τ . Суммарный запас энергии в конденсаторах в начале переходного процесса

$$w_{co} = \frac{C_1 u_{10}^2}{2} + \frac{C_2 u_{20}^2}{2} = 0,045 \text{ Дж}.$$

Энергия в обоих конденсаторах в установившемся режиме

$$w_{cnp} = \frac{C_1 u_{c1np}^2}{2} + \frac{C_2 u_{c2np}^2}{2} = 0,015 \text{ Дж}.$$

Баланс энергии: запас энергии в конденсаторах в начале переходного процесса равен сумме запаса энергии по окончании пе-

реходного процесса и энергии, затраченной на тепло:

$$w_{co} = w_{cnp} + w_{\tau}; \quad 0,045 \text{ Дж} = (0,03 + 0,015) \text{ Дж}.$$

§ 5. Переходные процессы при некорректных коммутациях

Некорректными коммутациями называются такие коммутации, при которых, на первый взгляд, нарушаются основные законы коммутации, как, например, в схеме рис. 28. До коммутации через индуктивность L_1 протекал ток $i_1 = \frac{E(\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1 \tau_2}$, а через индуктивность L_2 протекал ток $i_2 = \frac{E}{\tau_2}$. После коммутации $i_1 = i_2 = i$. Таким образом, не выполняется равенство $i_L(0_-) = i_L(0_+)$. Причина этого — в предположении о мгновенном размыкании контакта ($\Delta t = 0$). При этом в уравнении после коммутации

$$E = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 \tau_2.$$

Члены $\frac{di_1}{dt}$ и $\frac{di_2}{dt}$ в момент коммутации бесконечно возрастают, так как за бесконечно малый промежуток времени токи i_1 и i_2 выравниваются. Каждую из производных в последнем уравнении можно представить как предел отношения $\frac{\Delta i}{\Delta t}$, тогда

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2}{\Delta t} = E - i_2 \tau_2.$$

Это выражение остается конечным только в том случае, если

$$L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2 \rightarrow 0.$$

Или, учитывая, что $i_1(0_+) = i_2(0_+)$, имеем

$$L_1 [i_1(0_+) - i_1(0_-)] + L_2 [i_2(0_+) - i_2(0_-)] = 0.$$

Окончательно получаем выражение обобщенного I-го закона коммутации

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i(0_+),$$

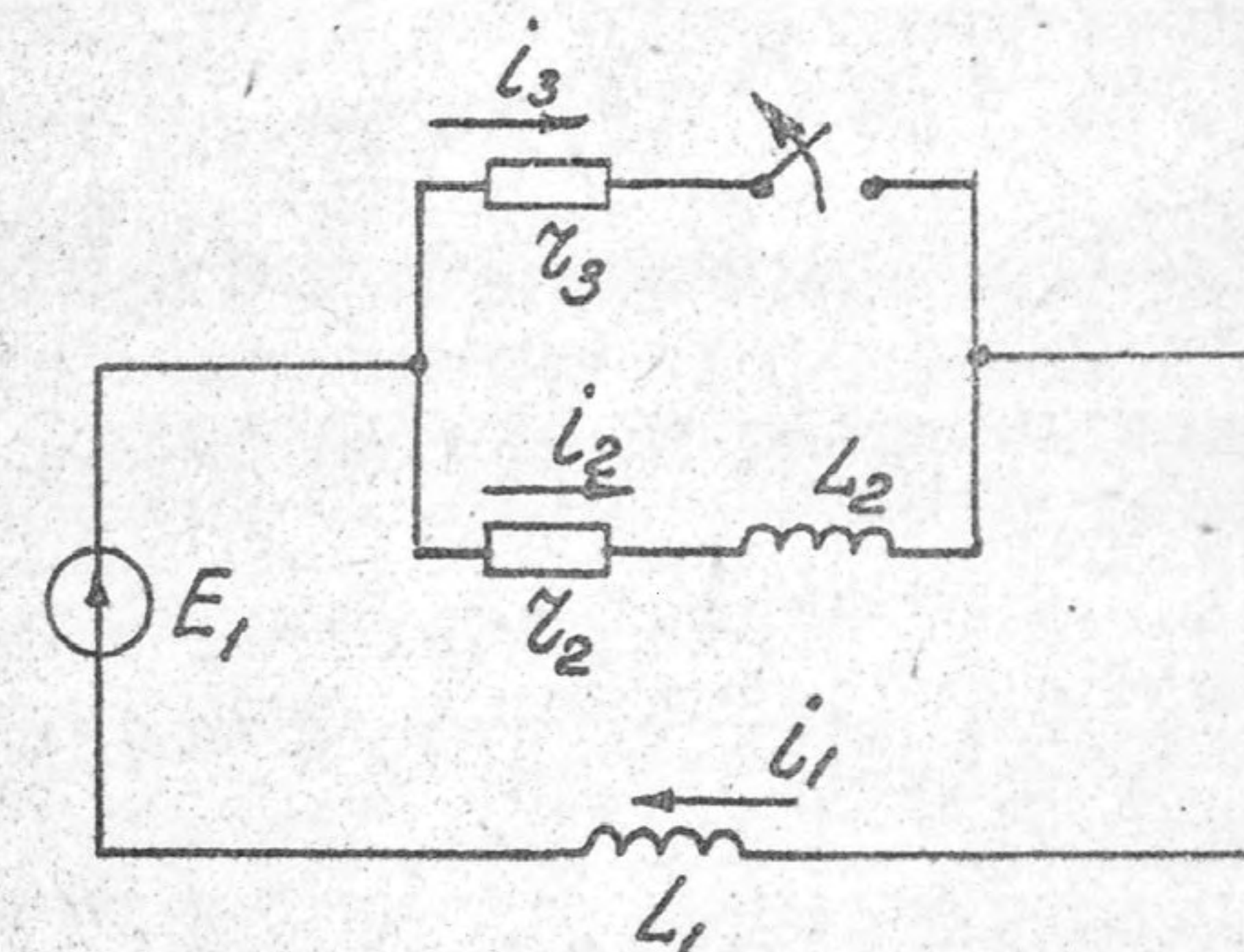


Рис. 28

который формулируется следующим образом: сумма потокоцеплений катушек индуктивностей в электрической цепи до и после коммутации остается неизменной, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(0_-) = \sum_{i=1}^n \psi_i(0_+).$$

Некорректные коммутации могут возникнуть при параллельном включении конденсаторов, имеющих различные начальные напряжения u_c . В этом случае 2-й закон коммутации можно сформулировать следующим образом: сумма зарядов конденсаторов в электрической цепи до и после коммутации остается неизменной, т.е.

$$\sum_{i=1}^n q_i(0_-) = \sum_{i=1}^n q_i(0_+).$$

Глава II. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Достоинства классического метода: он является общепринятым и наглядным, так как при преобразованиях видна соответствующая физическая картина.

Его недостатки: необходимость определения постоянных интегрирования из начальных условий, что особенно затруднительно для уравнений высокого порядка. Для инженерных расчетов более удобным является метод решения линейных дифференциальных уравнений, при котором заданные независимые начальные условия включаются в исходные уравнения и для нахождения искоемых функций не требуется определять постоянные интегрирования.

Этот метод называется операторным методом. Он заключается в том, что из области функций действительного переменного решение переносится с помощью преобразования Лапласа в область функций комплексного переменного p , где операции принимают более простой вид, а именно: вместо исходных интегродифференциальных уравнений получаются алгебраические уравнения; затем полученный решением алгебраических уравнений результат интерпретируется, т.е. производится обратный переход в область функций действительного переменного. Этот переход осуществля-

ется с помощью формул или таблиц. Основные положения операторного метода в применении к электротехнике подробно рассмотрены в [7].

Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1. В схеме до коммутации в момент $t = 0_-$ определяют независимые начальные условия $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$.

2. Составляют операторную схему замещения. Составление схемы замещения позволяет записывать систему уравнений непосредственно в операторной форме, минуя стадию перехода к операторным уравнениям от исходных интегродифференциальных уравнений. Для этого в схеме после коммутации заменяют все элементы их изображениями. Изображения заданных источников энергии находят по таблице оригиналов и изображений. Изображение активного сопротивления совпадает с оригиналом. Изображение индуктивности состоит из двух последовательно включенных элементов: пассивного элемента pL и источника ЭДС $E_L(p) = -L i_L(0_+) = -L i_L(0_-)$. Эта ЭДС совпадает по направлению с током $i_L(0_-)$ в заданной схеме. Изображение емкости состоит из двух последовательно включенных элементов: пассивного $\frac{1}{pC}$ и источника ЭДС $E_C(p) = \frac{u_C(0_+)}{p} = \frac{u_C(0_-)}{p}$. Направление этой ЭДС противоположно направлению $u_C(0_-)$ в заданной схеме.

На рис. 30 представлена операторная схема замещения схемы рис. 29. В схеме до коммутации (рис. 29) определяем токи в индуктивностях $i_1(0_-) = i_1(0_+)$; $i_2(0_-) = i_2(0_+)$ и напряжения на емкостях $u_{C2}(0_-) = u_{C2}(0_+)$; $u_{C3}(0_-) = u_{C3}(0_+)$. Направление дополнительных источников ЭДС в операторной схеме замещения совпадает с направлениями токов $i_1(0_-)$, $i_2(0_-)$ в индуктивностях и противоположно направлениям напряжений $u_{C2}(0_-)$ в емкостях соответственно. Расчет полученной схемы (рис. 30) осуществляют любым рациональным методом.

3. Определяют изображения токов $I(p)$ и напряжений $U_k(p)$ в операторной схеме замещения любым рациональным методом расчета линейных цепей.

4. По изображениям находят оригиналы — законы изменений токов и напряжений. Для реальных электрических цепей почти всегда выполняется условие, согласно которому изображение является правильной дробью. Поэтому переход от изображения к

оригиналу рассмотрим только для этого случая.

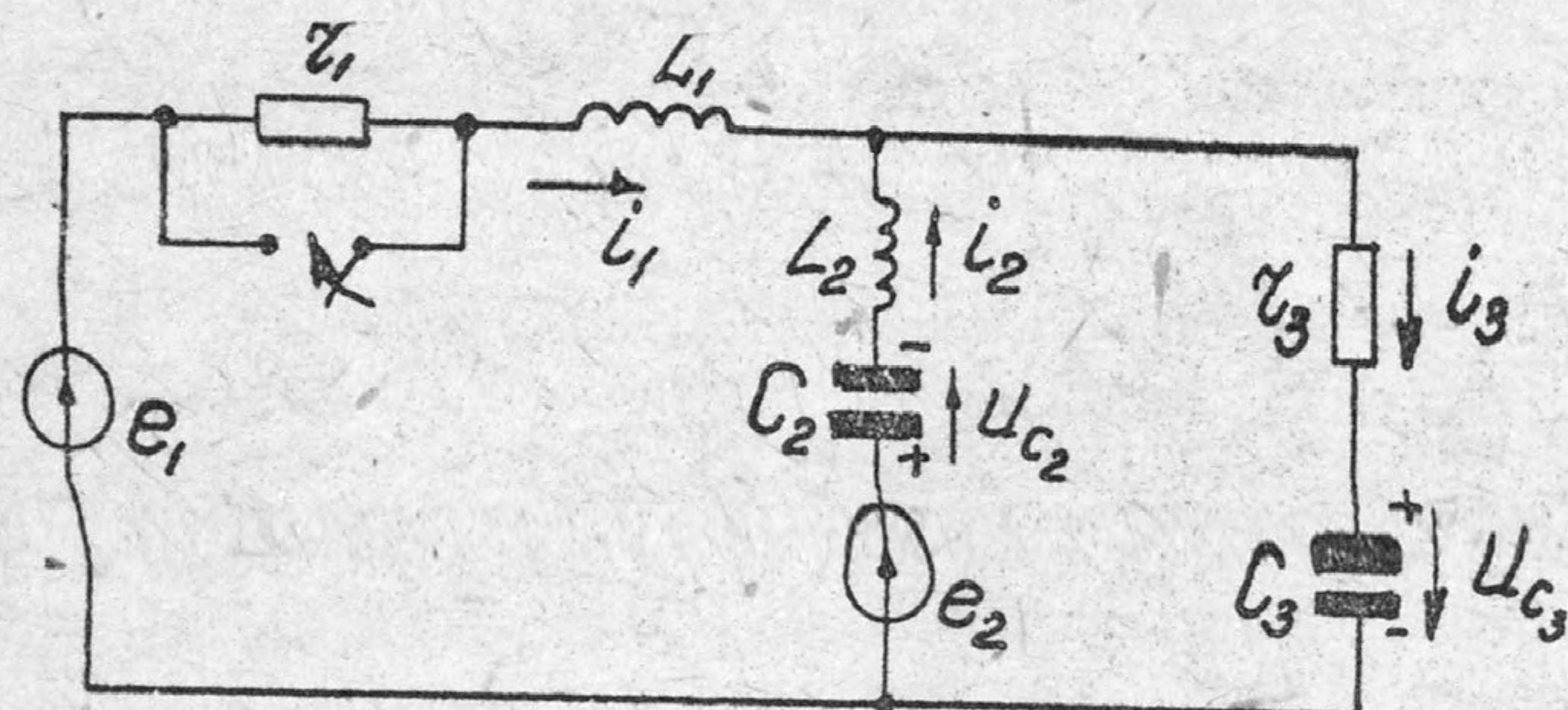


Рис. 29

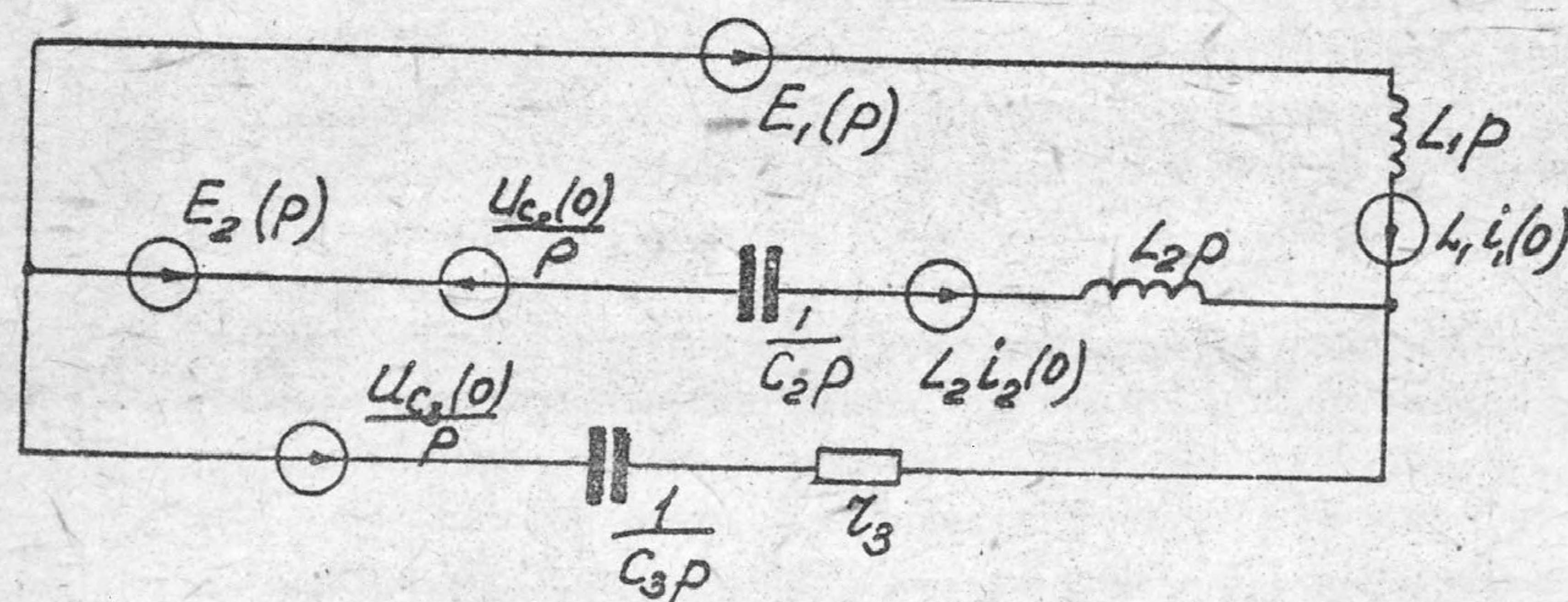


Рис. 30

Найти оригинал можно по формуле разложения.

1. Если все полюсы $F(p)$ простые, оригинал функции определяется по формуле

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = f(t),$$

где n — число корней уравнения $F_2(p) = 0$, т.е. число полюсов $F_2(p)$.

2. Если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет кратные корни, то оригинал ищут по общей формуле

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \left\{ e^{p_k t} \sum_{i=1}^m \frac{t^{m-i}}{(m-i)!(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p-p_k)^m \right]_{p=p_k} \right\},$$

где m — кратность i -го корня;

i — номер слагаемого (от 1 до m);

$0! = 1$.

Для перехода от изображения функции к оригиналу можно применить также простой прием, состоящий в разложении рациональной дроби на сумму более простых рациональных дробей, каждая из которых приведена в таблице оригиналов и изображений.

В случае простых полюсов разложение $F(p)$ следует искать в виде

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{(p+a)(p+b)\dots(p+c)} = \frac{C}{p+a} + \frac{D}{p+b} + \dots + \frac{E}{p+c}.$$

Рассмотрим частные случаи расположения полюсов.

а) Один из полюсов лежит в начале координат ($p_1 = 0$) — встречается при расчете переходных процессов в цепях с постоянными ЭДС.

б) По крайней мере одна пара сопряженных полюсов лежит на мнимой оси — встречается при расчете переходных процессов в цепях с синусоидальными ЭДС. Этой паре соответствует слагаемое вида $\frac{Cp + D}{p^2 + a^2}$, которое является изображением синусоиды.

в) По крайней мере одна пара комплексных сопряженных корней лежит в левой полуплоскости. Этой паре соответствует слагаемое вида $\frac{Bp + C}{(p+a)^2 + b^2}$, которое является изображением затухающей синусоиды.

Примечание. Для цепей, содержащих индуктивно-связанные катушки, операторная схема замещения будет содержать дополнительные ЭДС $M_{k5} i_5(0)$.

На рис. 31б и 32б представлены схемы замещения для случаев соответственно согласного и встречного включения катушек (рис. 31а, 32а). Например, при согласном включении ЭДС $M i_2(0)$ совпадает с направлением тока $i_1(0)$, при встречном — противоположна ей. Или можно сказать: при согласном включении катушек $M i_2(0)$, $M i_1(0)$ совпадают с направлением ЭДС $L_1 i_1(0)$, $L_2 i_2(0)$ соответственно.

Расчет цепей со взаимной индукцией существенно упрощается при замене индуктивных связей электрическими (при развязке схем). Развязка не зависит от согласности или встречности включения катушек, а определяется подключением катушек к общему узлу. Для катушек, подсоединенных к узлу одноименными зажимами, схема развязки представлена на рис. 33 (исходная схема — рис. 31а); разноименными — рис. 34 (исходная схема — рис. 32а). С учетом сказанного выше можно составить операторную схему замещения (рис. 35б), соответствующую исходной схеме рис. 35а.

Пример 18. В схеме рис. 36а рассчитать ток $i_L(t)$ и напряжение $U_L(t)$ операторным методом, если

$$U = 30 \text{ В}, \quad \tau = 10 \text{ Ом}, \quad L = 0,1 \text{ Г}.$$

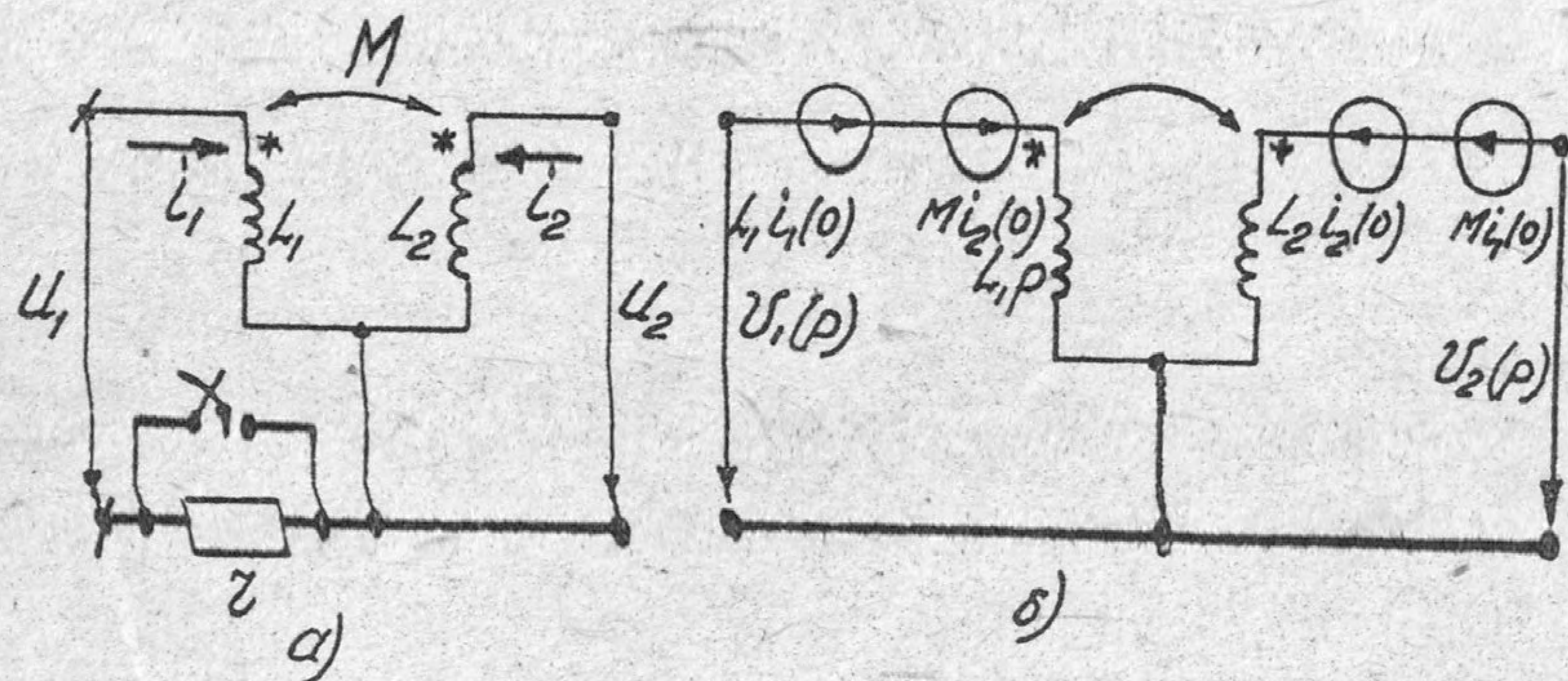


Рис. 31

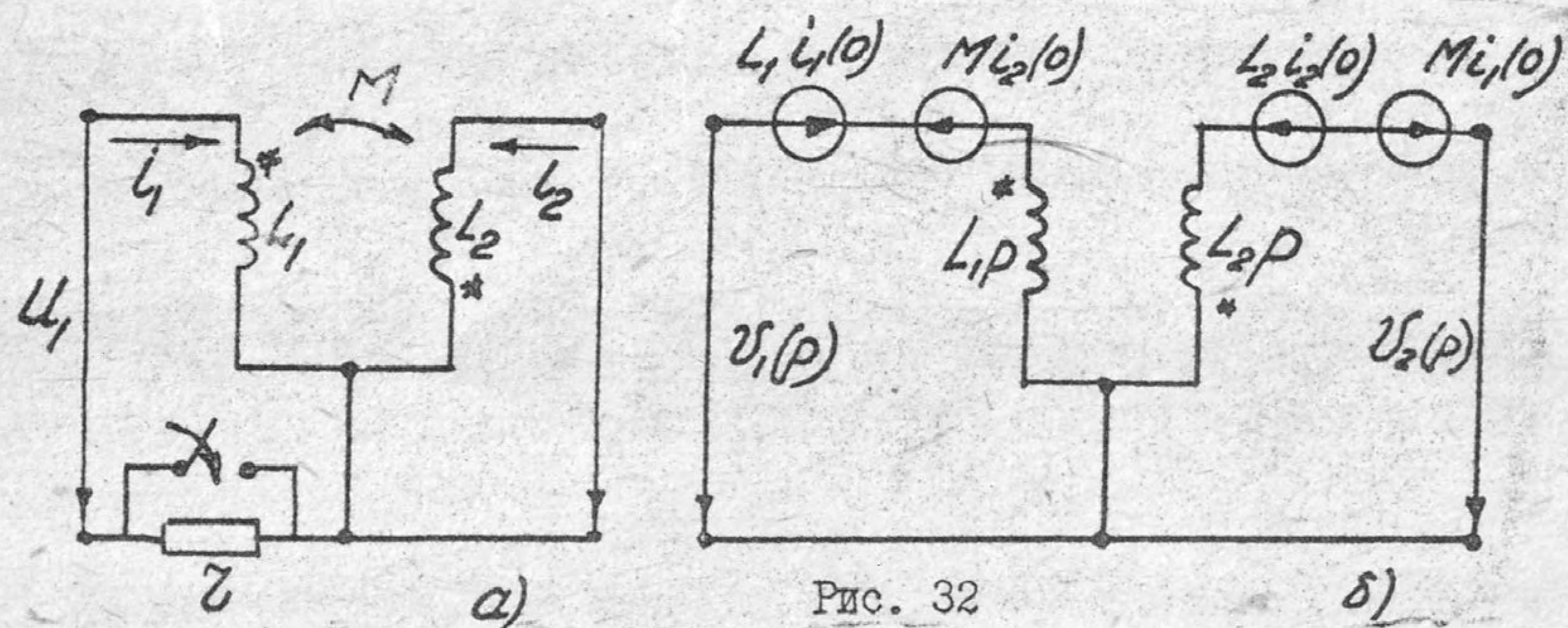


Рис. 32

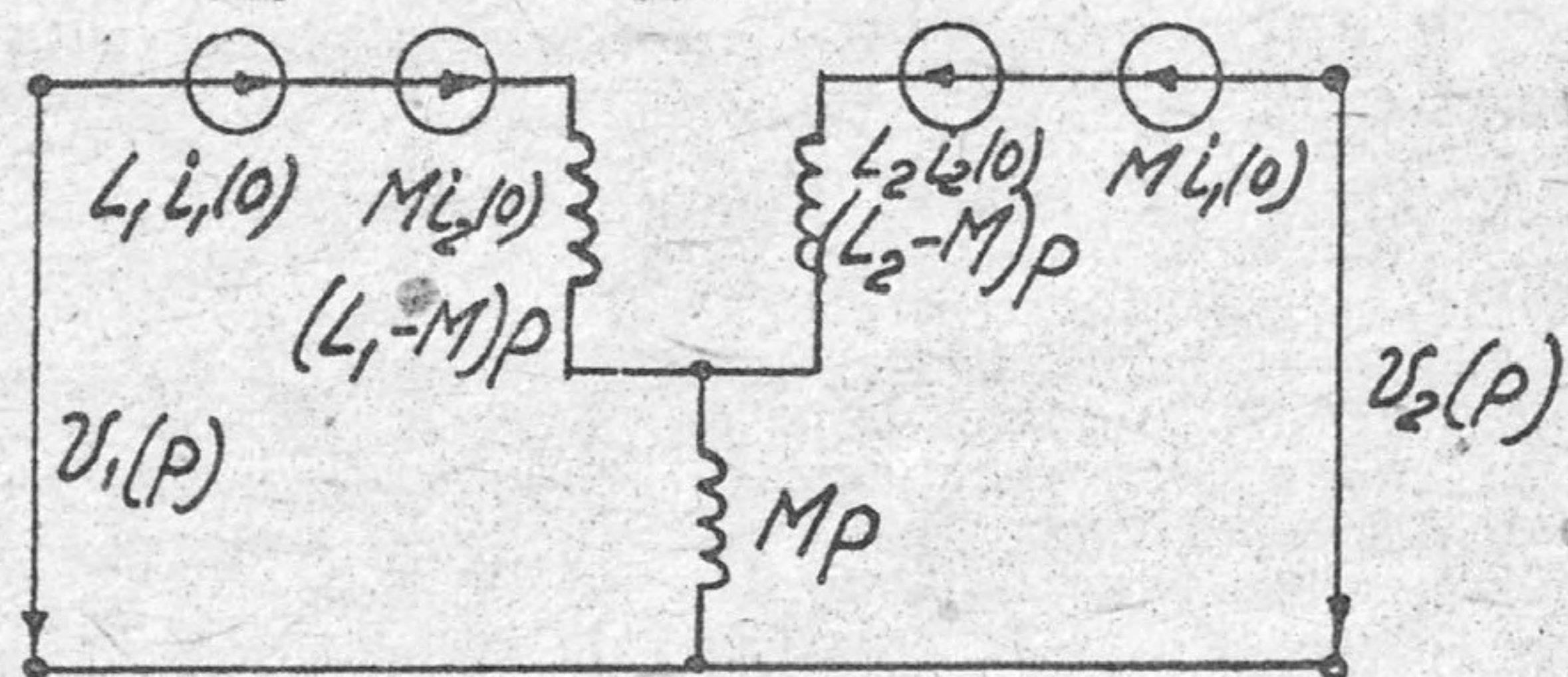


Рис. 33

Решение. I. Определяем независимое начальное условие

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U}{\tau + \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{U}{3\tau} = 1 \text{ A}.$$

2. Составляем операторную схему замещения (рис. 36б).

ЭДС $\mathcal{E} i_L(0_-)$ направлена по току $i_L(0_-)$.

3. Определяем изображение тока $I(p)$ по второму закону Кирхгофа:

$$L i(0) = I(p)(\tau + Lp) - \frac{U}{p};$$

$$I(p) = \frac{L i(0) + \frac{U}{p}}{2\tau + Lp} = \frac{0,1 + \frac{10}{p}}{20 + 0,1p} = \frac{10 + 0,1p}{p(20 + 0,1p)}.$$

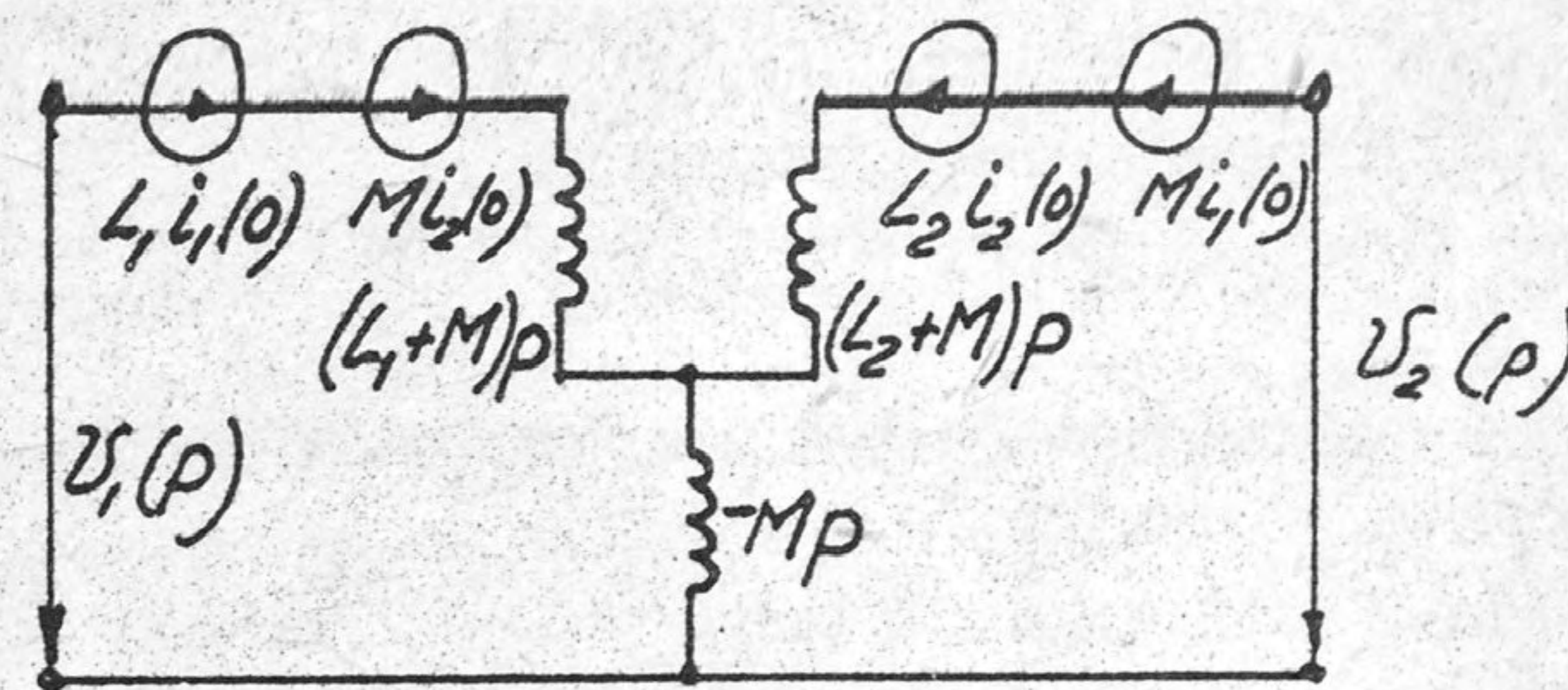


Рис. 34

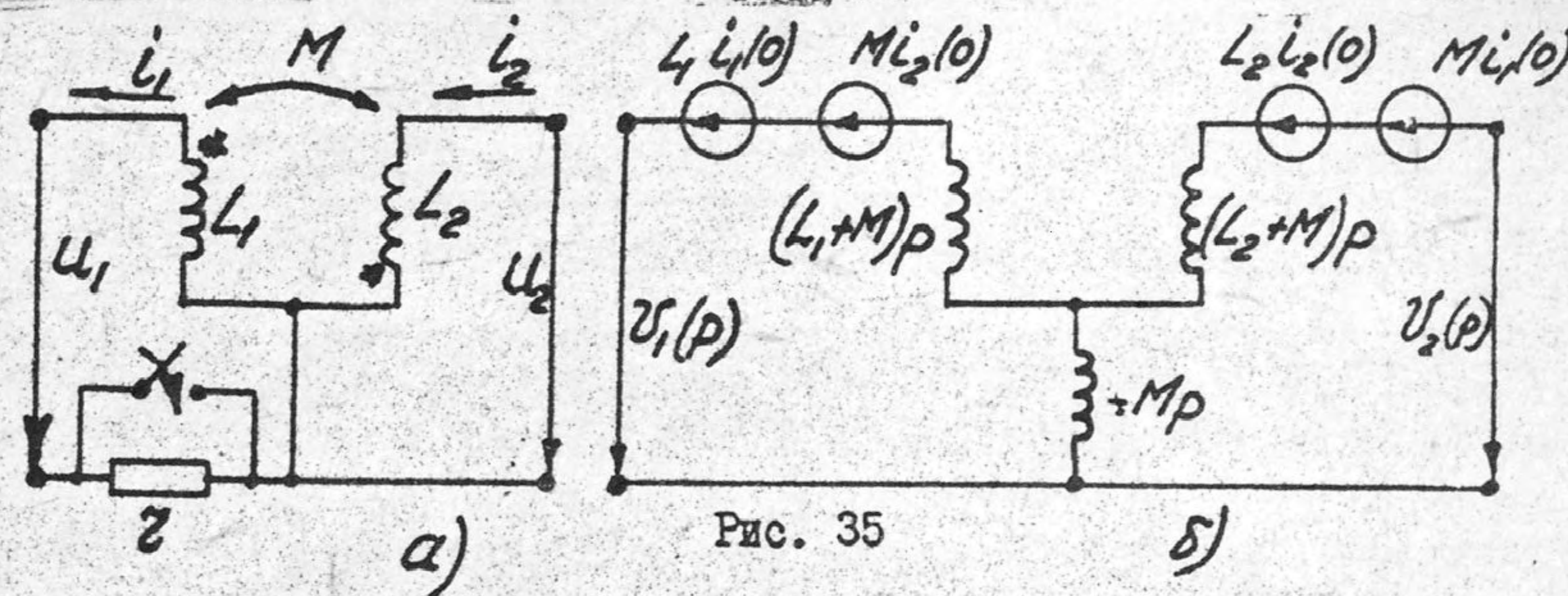


Рис. 35

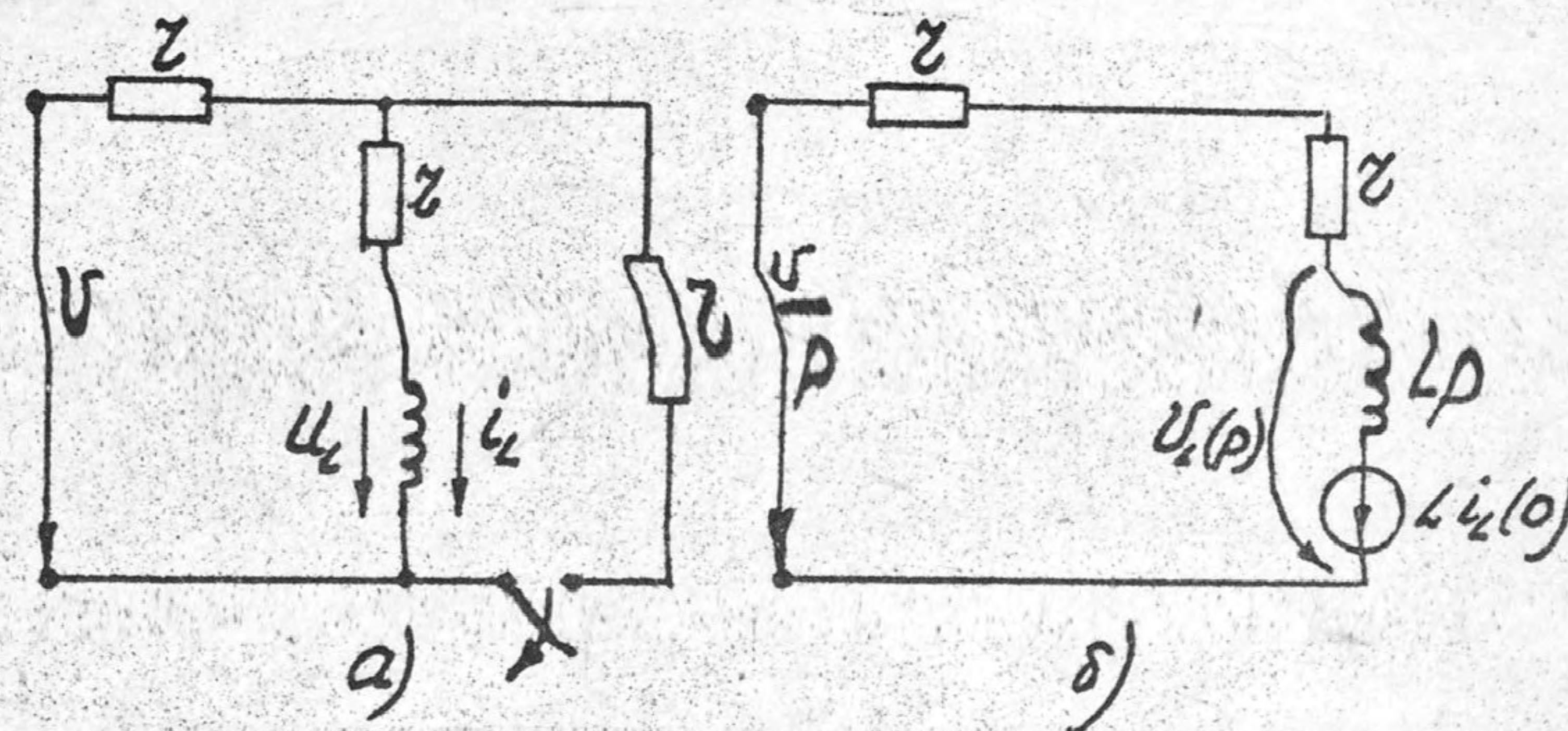


Рис. 36

4. По формуле разложения находим оригинал $i(t)$

$$I(p) = F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Корни уравнения $F_2(p) = p(20 + 0,1p) = 0$ равны:
 $p_1 = 0$; $p_2 = -200 \text{ 1/c}$ $F_2'(p) = 20 + 0,1p$

$$i(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} + \frac{F_1(-200)}{F_2'(-200)} e^{-200t} = \frac{10}{20} + \frac{10-20}{20-40} e^{-200t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-200t}$$

5. Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -10 e^{-200t}$$

Это напряжение можно найти, определив предварительно его изображение (рис. 36б):

$$L i_L(0) = I(p) L p - \psi_L(p),$$

$$\psi_L(p) = I(p) L p - L i(0) = \frac{10 + 0,1p}{(20 + 0,1p)p} 0,1p - 0,1 =$$

$$= \frac{-1}{20 + 0,1p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Корень уравнения $F_2(p) = 20 + 0,1p = 0$ равен $p = -200 \text{ 1/c}$;

$$F_2'(p) = 0,1,$$

$$u_L(t) = \frac{F_1(-200)}{F_2'(-200)} e^{-200t} = -10 e^{-200t}$$

Пример 19. В схеме рис. 37а определить ток $i(t)$, напряжение на емкости $u_C(t)$, если $U = 100 \text{ В}$, $\tau_0 = \tau = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,01 \text{ Г}$, $C = 625 \text{ мкФ}$.

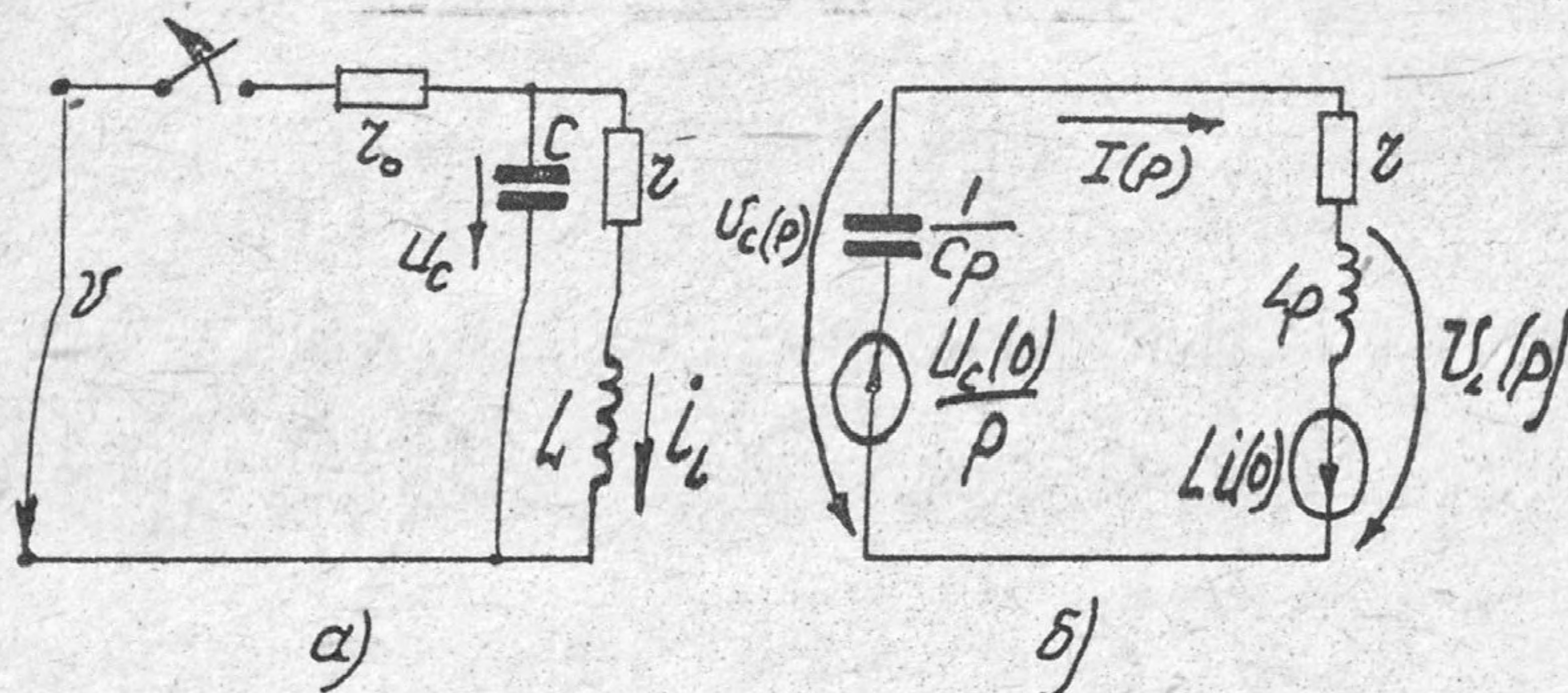


Рис. 37

Решение. I. Из схемы до коммутации определяем значения $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$:

$$i_L(0_-) = \frac{U}{\tau_0 + \tau} = 5 \text{ А} = i_L(0_+);$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-) \tau = 50 \text{ В} = u_C(0_+).$$

2. Составляем операторную схему замещения (рис. 37б). ЭДС $L i_L(0_-)$ направлена по току $i_L(0_-)$, ЭДС $\frac{u_C(0_-)}{p}$ направлена против напряжения $u_C(0_-)$.

3. Для этой схемы находим изображение тока из уравнения

$$\frac{u_C(0_-)}{p} + L i_L(0_-) = I(p) (\tau + Lp + \frac{1}{Cp}) :$$

$$I(p) = \frac{\frac{u_C(0_-)}{p} + L i_L(0_-)}{\tau + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{0,05p + 50}{0,01p^2 + 10p + 1600} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Изображение напряжения на емкости определяем из уравнения

$$\frac{u_C(0_-)}{p} = I(p) \frac{1}{Cp} + \psi_C(p) :$$

$$\psi_C(p) = \frac{u_C(0_-)}{p} - I(p) \frac{1}{Cp} = \frac{u_C(0_-)}{p} - \frac{u_C(0_-) + L i_L(0_-)}{\tau + Lp + \frac{1}{Cp}} \cdot \frac{1}{Cp} =$$

$$= \frac{u_C(0_-) p L C + u_C(0_-) \tau C - L i_L(0_-)}{p^2 L C + \tau C p + 1} = \frac{0,5p + 420}{0,01p^2 + 10p + 1600}$$

4. По формуле разложения определяем ток и напряжение на емкости:

$$i = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{20}{3} e^{-200t} - \frac{5}{3} e^{-800t},$$

где $F_2'(p) = 0,02p + 100$; $p_1 = -200 \text{ 1/c}$; $p_2 = -800 \text{ 1/c}$ -

корни уравнения $F_2(p) = 0$;

$$u_C(t) = \frac{160}{3} e^{-200t} - \frac{10}{3} e^{-800t}$$

Пример 20. Определить ток $i_2(t)$ в схеме рис. 38а, если $U = 1 \text{ А}$, $E = 12 \text{ В}$, $\tau_1 = 6 \text{ Ом}$, $\tau_2 = 3 \text{ Ом}$, $L = 0,01 \text{ Г}$.

Решение. В установившемся режиме до коммутации $i_2 = \text{const}$, $\frac{di_2}{dt} = 0$, поэтому $E = i_1 \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$, откуда

$$i_1(0_-) = \frac{E}{\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}} = 6 \text{ А}.$$

Так как $\mathcal{I} + i_1 = i_2$, то $i_2(0_-) = 7A = i_2(0_+)$.

На рис. 38б представлена операторная схема замещения. Методом двух узлов определяем изображение напряжения $\mathcal{U}_{ab}(p)$:

$$\mathcal{U}_{ab}(p) = \frac{\mathcal{I}(p) + \frac{E(p)}{z_1} - \frac{L i_2(0)}{Lp}}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{pL}} = \frac{-24}{p+600},$$

где

$$\mathcal{I}(p) = \frac{\mathcal{I}}{p}; \quad E(p) = \frac{E}{p}.$$

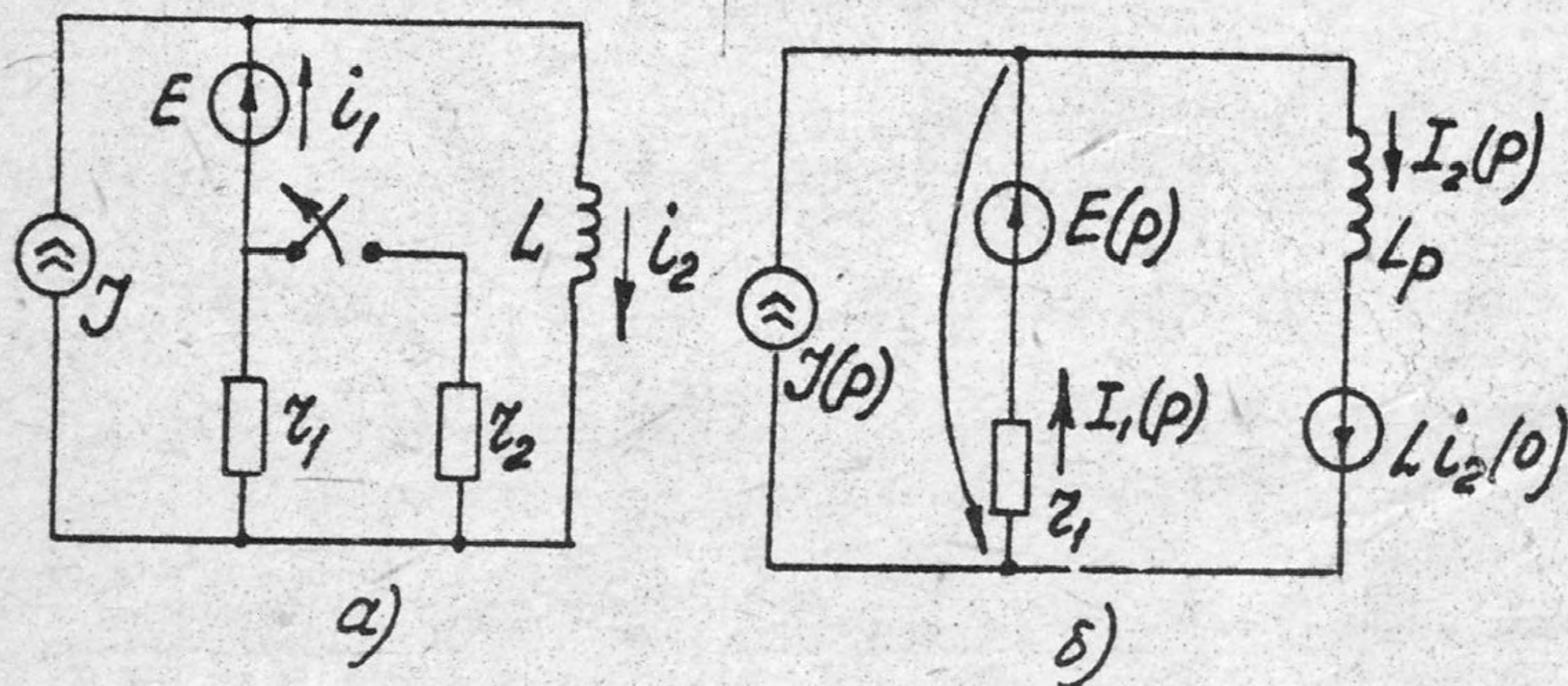


Рис. 38

Далее расчет можно перенести во временную область, определив $u_{ab} = -24e^{-600t}$, рассчитать ток $i_1(t)$ по законам Кирхгофа или продолжить расчет в операторной форме. Тогда

$E(p) = \mathcal{U}_{ab}(p) + I_1(p) z_1$, откуда

$$I_1(p) = \frac{E(p) - \mathcal{U}_{ab}(p)}{z_1} = \frac{2}{p} + \frac{4}{p+600}.$$

Перейдя к оригиналу, получим

$$i_1(t) = 2 + 4e^{-600t}$$

(рис. 39).

Ток $i_1(t)$ не имеет скачка в момент коммутации, хотя эта ветвь не содержит индуктивности, так как $i_1 = i_2 - \mathcal{I}$, ток

i_2 не может измениться скачком, а $\mathcal{I} = \text{const}$.

Пример 21. В схеме рис. 15 определить закон изменения тока $i(t)$ после коммутации, если

$$u(t) = 100 \sin(100t + \frac{\pi}{2}); \quad z = 100 \text{ Ом}; \quad L = 0,1 \text{ Г}.$$

Решение. Данная схема — схема с нулевыми начальными условиями, соответствующая ей операторная схема замещения

представлена на рис. 40. Изображение синусоидального напряжения

$$\mathcal{U}(p) = \frac{100(p \sin \frac{\pi}{2} + \omega \cos \frac{\pi}{2})}{p^2 + \omega^2} = \frac{100p}{p^2 + 100^2}.$$

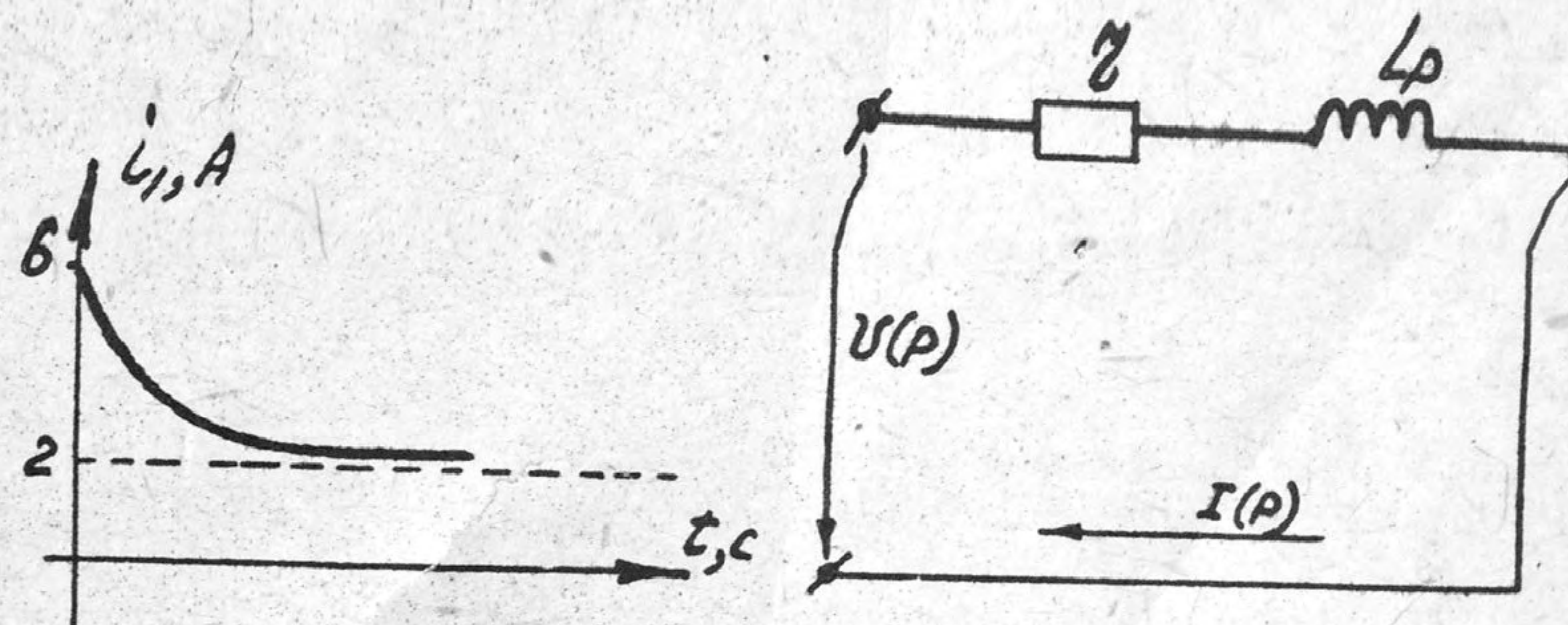


Рис. 39

Рис. 40

Изображение тока определяем по закону Ома:

$$I(p) = \frac{\mathcal{U}(p)}{z(p)} = \frac{100p}{(p^2 + 100^2)(p + 100)}$$

Оригинал $i(t)$ определим, разложив $I(p)$ на сумму простых рациональных дробей:

$$I(p) = \frac{100p}{(p^2 + 100^2)(p + 100)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 100^2} + \frac{C}{p + 100}.$$

Приводим левую и правую части равенства к общему знаменателю:

$$100p = (Ap + B)(p + 100) + C(p^2 + 100^2)$$

или

$$100p = (A + C)p^2 + (B + 100A)p + B \cdot 100 + 100^2 C,$$

откуда

$$\begin{aligned} A + C &= 0; & A &= 0,5; \\ B + 100A &= 0; & B &= 50; \\ 100B + 100^2 C &= 0; & C &= -0,5; \end{aligned}$$

$$I(p) = \frac{0,5p + 50}{p^2 + 100^2} - \frac{0,5}{p + 100}.$$

Первое слагаемое правой части $I(p)$ представляет собой изображение синусоиды, умноженное на некоторый постоянный множитель K :

$$\frac{K(\rho \sin \psi + \omega \cos \psi)}{\rho^2 + \omega^2} = \frac{K(\rho \sin \psi + 100 \cos \psi)}{\rho^2 + 100^2}$$

Нетрудно видеть, что $K \rho \sin \psi + 100 K \cos \psi = 0,5 \rho + 50$,
откуда $K \sin \psi = 0,5$; $\operatorname{tg} \psi = 1$; $\psi = \frac{\pi}{4}$;
 $100 K \cos \psi = 50$; $\sin \psi = \cos \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $K = \frac{0,5}{\sin \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Окончательно имеем

$$I(\rho) = \frac{1/\sqrt{2}(\rho \sin \frac{\pi}{4} + 100 \cos \frac{\pi}{4})}{\rho^2 + 100^2} = \frac{0,5}{\rho^2 + 100^2}$$

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(100t + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} e^{-100t}$$

Пример 22. В схеме рис. 41а определить закон изменения напряжения на емкости C_1 - C_2 , если $u_{C_2}(0_-) = 0$; $E = 40$ В;
 $r = 10$ Ом; $C_1 = 200$ мкФ; $C_2 = 50$ мкФ.

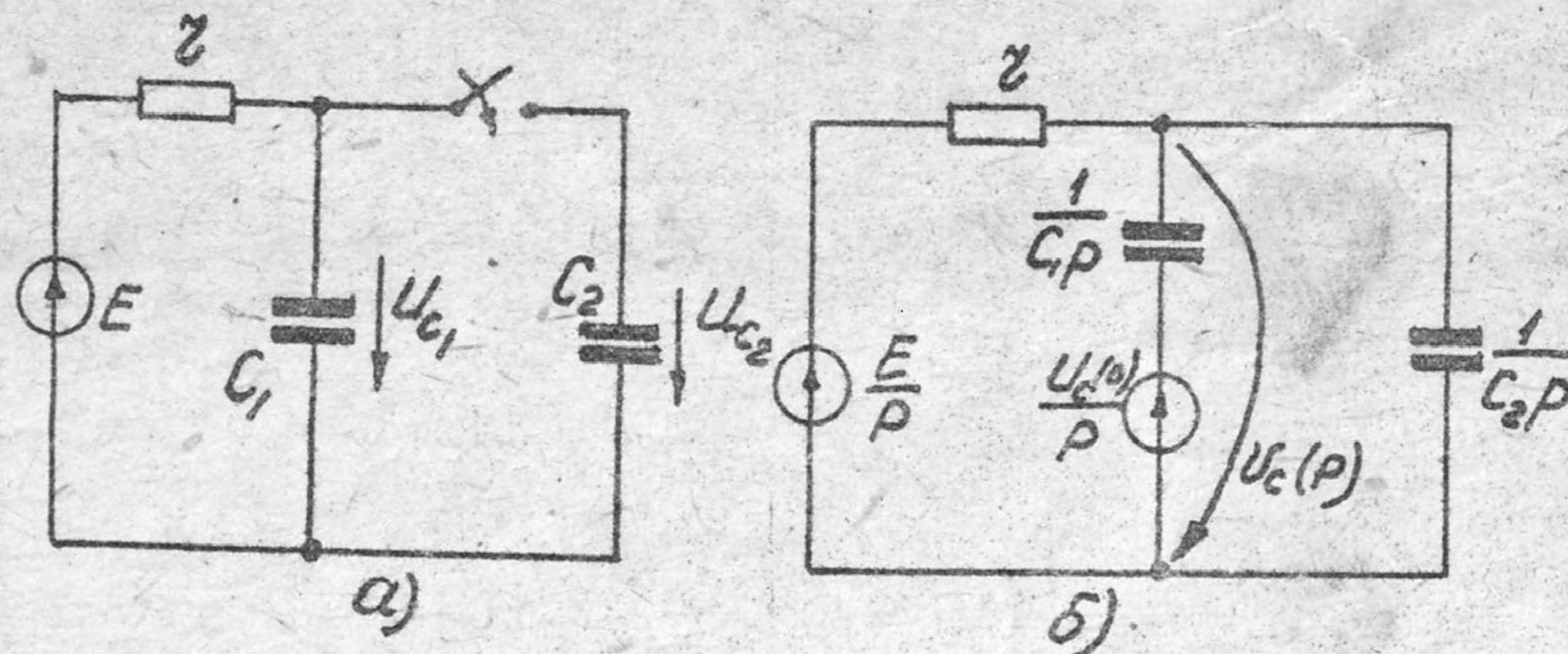


Рис. 41

Решение. До коммутации напряжение на конденсаторе было $u_{C_1}(0_-) = E = 40$ В. Операторная схема приведена на рис. 41б. Для определения $U_C(p)$ применим метод двух узлов

$$U_C(p) = \frac{\frac{E}{\rho} + \frac{E \rho C_1}{\rho}}{\frac{1}{\rho} + \rho(C_1 + C_2)} = \frac{E(\rho + \frac{1}{rC_1})}{\rho[\rho + \frac{1}{r(C_1 + C_2)}]} = \frac{32(\rho + 500)}{\rho(\rho + 400)}$$

По формуле разложения получим

$$u_C(t) = 40 - 8e^{-400t}$$

Примечание. Решение задачи с некорректными начальными условиями операторным методом ничем не отличается от стандартного расчета.

Пример 23. В схеме рис. 42а определить закон изменения

тока операторным методом при $E = \text{const}$.

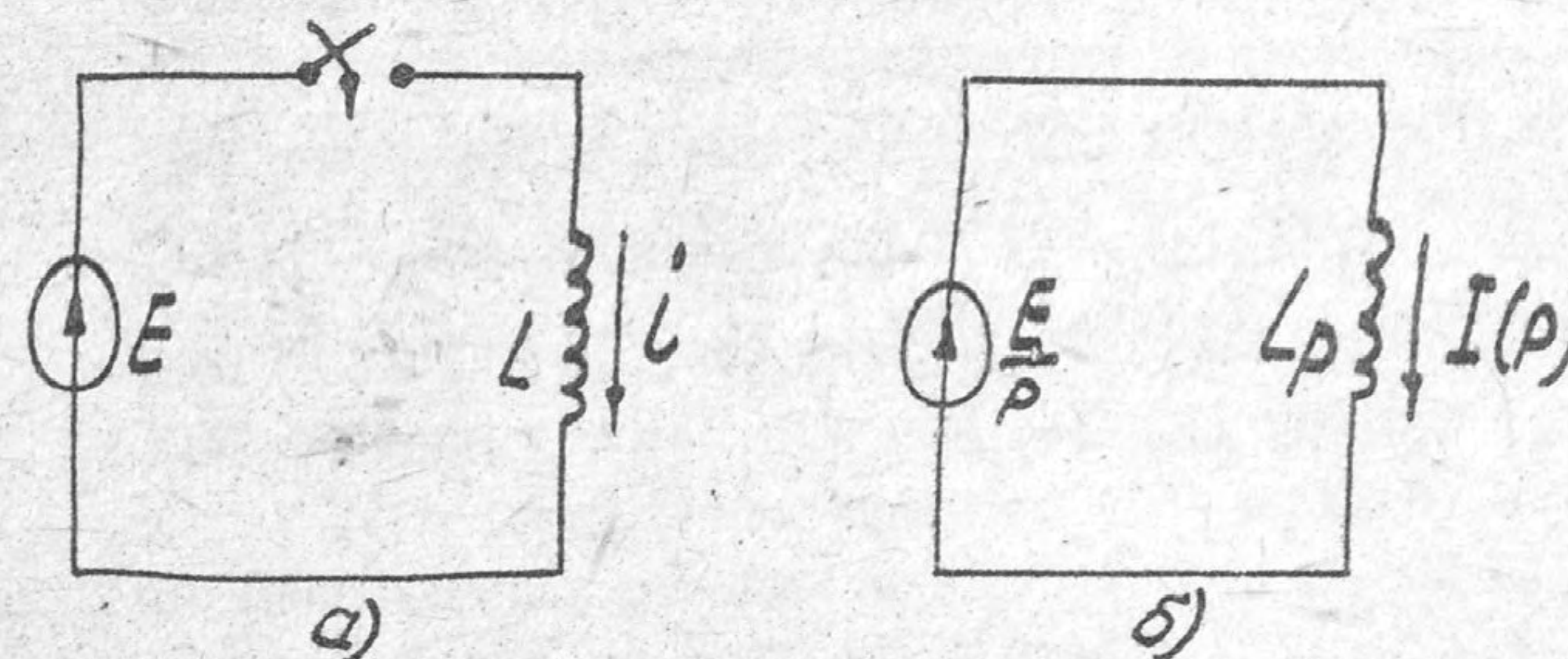


Рис. 42

Решение. Ток до коммутации $i_L(0_-) = 0$. Операторная схема изображена на рис. 42б. По закону Ома найдем изображение тока:

$$I(\rho) = \frac{E(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{E}{\rho^2 L} = \frac{F_1(\rho)}{F_2(\rho)}$$

Так как корни уравнения $F_2(\rho) = 0$ кратные, $\rho_1 = \rho_2 = 0$, то оригинал $i(t)$ определим по формуле разложения для кратных корней:

$$i(t) = e^{0t} \left\{ \frac{t^{2-1}}{1! \cdot 0!} \cdot \frac{F_1(\rho)}{F_2(\rho)} (\rho - 0)^2 + \frac{t^{2-2}}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{d}{d\rho} \frac{F_1(\rho)}{F_2(\rho)} (\rho - 0)^2 \right\}_{\rho=0} = t \cdot \frac{E}{L}$$

Пример 24. Пример 15 решить операторным методом.

Решение. На рис. 43 представлена операторная схема замещения исходной схемы (см. рис. 22).

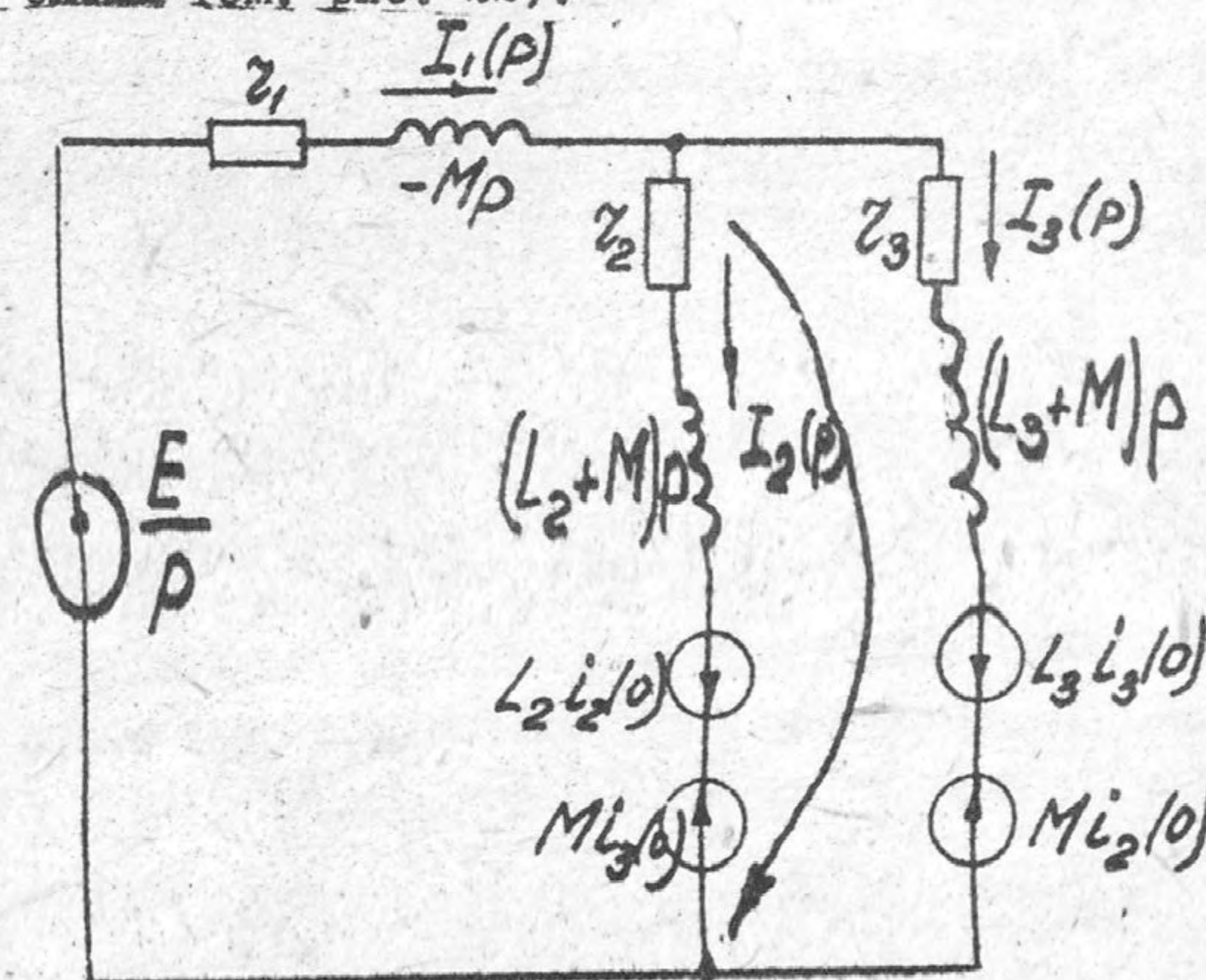


Рис. 43

В схеме замещения развязка (замена индуктивных связей электрическими) зависит от подсоединения катушек к общему узлу. В данной схеме катушки подсоединяются к узлу разноименными зажимами, сопротивления соответственно равны $(-M)p$, $(L_2 + M)p$, $(L_3 + M)p$. Направления ЭДС, учитывающих независимые начальные условия $Mi_3(0)$, $Mi_2(0)$, определяются тем, согласно или встречно включены катушки. В схеме рис. 22 включение катушек встречное, поэтому ЭДС $Mi_3(0)$, $Mi_2(0)$ направлены против ЭДС $L_2 i_2(0)$, $L_3 i_3(0)$ соответственно (рис. 43). Направление ЭДС $L_2 i_2(0)$ и $L_3 i_3(0)$ совпадает с направлением токов $i_2(0)$, $i_3(0)$. В данной задаче $i_2(0_-) = 6 \text{ A} = i_2(0_+)$; $i_3(0_-) = 0 = i_3(0_+)$, поэтому $L_3 i_3(0) = 0$; $Mi_3(0) = 0$. Расчет операторной схемы замещения проведем методом двух узлов:

$$\dot{U}_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p(\tau_1 - Mp)} + \frac{-L_2 i_2(0) + Mi_3(0)}{\tau_2 + (L_2 + M)p} + \frac{Mi_2(0)}{\tau_3 + (L_3 + M)p}}{\frac{1}{\tau_1 - Mp} + \frac{1}{\tau_2 + (L_2 + M)p} + \frac{1}{\tau_3 + (L_3 + M)p}} = \frac{1200 + 30p + 906p^2}{p(30 + 91p)}$$

В соответствии с уравнением

$$L_2 i_2(0) - Mi_3(0) = I_2(p) [\tau_2 + (L_2 + M)p] - \dot{U}_{ab}(p)$$

получим изображение тока

$$I_2(p) = \frac{1200 + 66p + 918p^2}{p(30 + 91p)(10 + 93p)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Пользуясь формулой разложения, найдем

$$i_2(t) = 4 + 3e^{-\frac{100}{3}t} - 1e^{-300t}$$

Остальные токи определяем аналогично.

Пример 25. Пример 13 решить операторным методом.

Решение. Напряжение на емкости до коммутации

$$u_c(0_-) = 25 \text{ В} = u_c(0_+)$$

На рис. 44 представлена операторная схема замещения.

Направление ЭДС $\frac{u_c(0)}{p}$ выбирается против направления напряжения $u_c(0_-)$. Если сохранить направление напряжения u_c (т.е. от точки a к точке b), то изображение этого напряжения

$$\dot{U}_c(p) = \frac{-\frac{E_2}{p\tau_1} + \frac{u_c(0)}{p} Cp}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + Cp} = \frac{-5 + 25 \cdot 10^{-4} p}{(0,2 + 10^{-4} p)p}$$

И, следовательно, $u_c(t) = -25 + 50e^{-2000t}$

Направление напряжения $\dot{U}_c(p)$ можно выбрать от точки b к точке a . Тогда

$$\dot{U}_c(p) = \frac{\frac{E_2}{p\tau_1} - \frac{u_c(0)}{p} Cp}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + Cp}$$

и

$$u_c(t) = 25 - 50e^{-2000t}$$

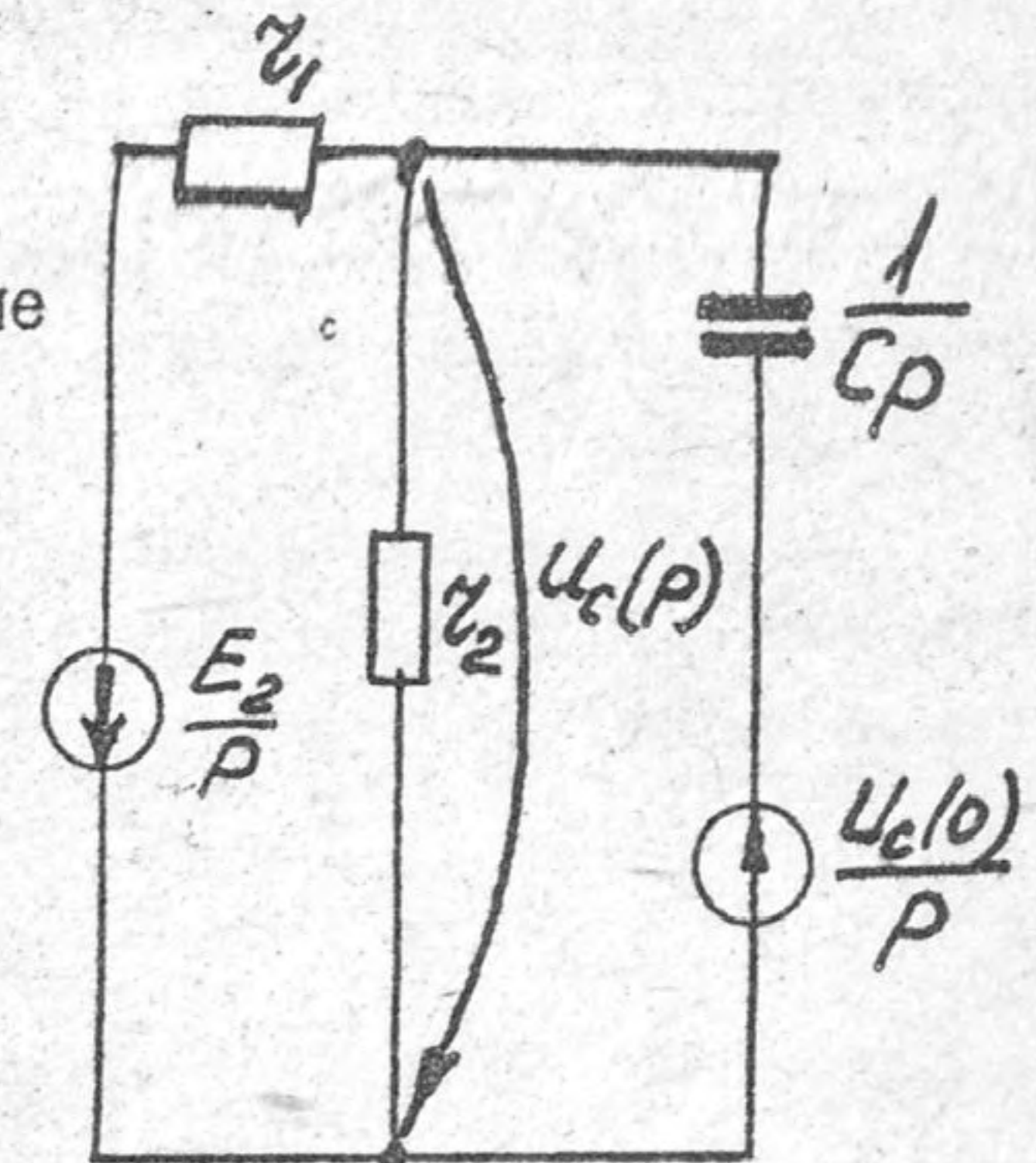


Рис. 44

Глава III. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В первых главах данного пособия рассмотрены методы расчета переходных процессов в электрических цепях при постоянных и синусоидальных ЭДС, когда в цепи переходный режим характеризуется принужденной и свободной составляющей, причем принужденная составляющая, как правило, совпадает с установившимся режимом в цепи.

В общем случае, при произвольных воздействиях, эти методы не всегда применимы, так как при произвольно и непрерывно меняющемся во времени воздействии установившийся режим в цепи отсутствует. Принужденную составляющую в этом случае очень трудно отделить от свободной.

В электрических цепях, в которых действуют произвольно меняющиеся во времени источники ЭДС (тока), метод расчета определяется характером воздействия. Поэтому мы будем рассматривать три модификации воздействия, для которых специфичны свои методы расчета:

1) произвольное непрерывное воздействие (рис. 45) - задача в этом случае может быть решена операторным методом по методике, рассмотренной в предыдущей главе, либо с помощью интеграла Дюамеля;

2) произвольное импульсное одиночное воздействие (рис. 46) - воздействие разбивается на интервалы, в пределах которых функция воздействия непрерывна; для каждого интервала отыскивается своя форма решения по методике, аналогичной предыдущему случаю;

3) последовательность импульсов (рис. 47) - в этом случае, как правило, используются специальные методы (метод припасовывания, решетчатые функции, ряды Лорана и т.д.).

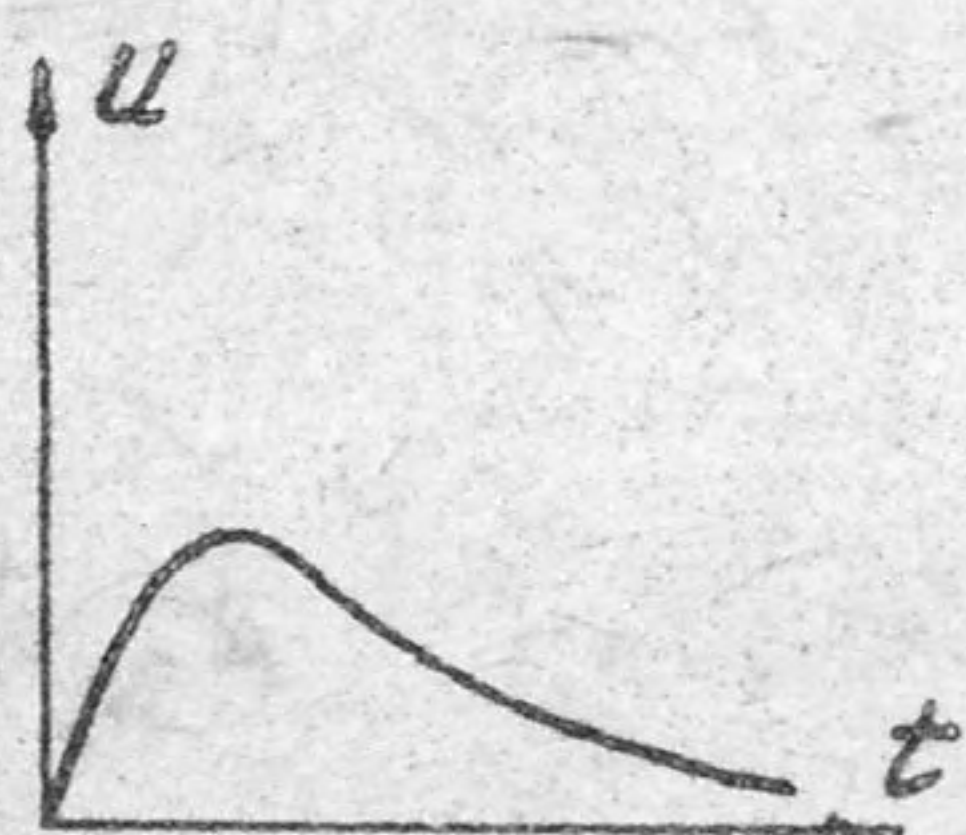


Рис. 45

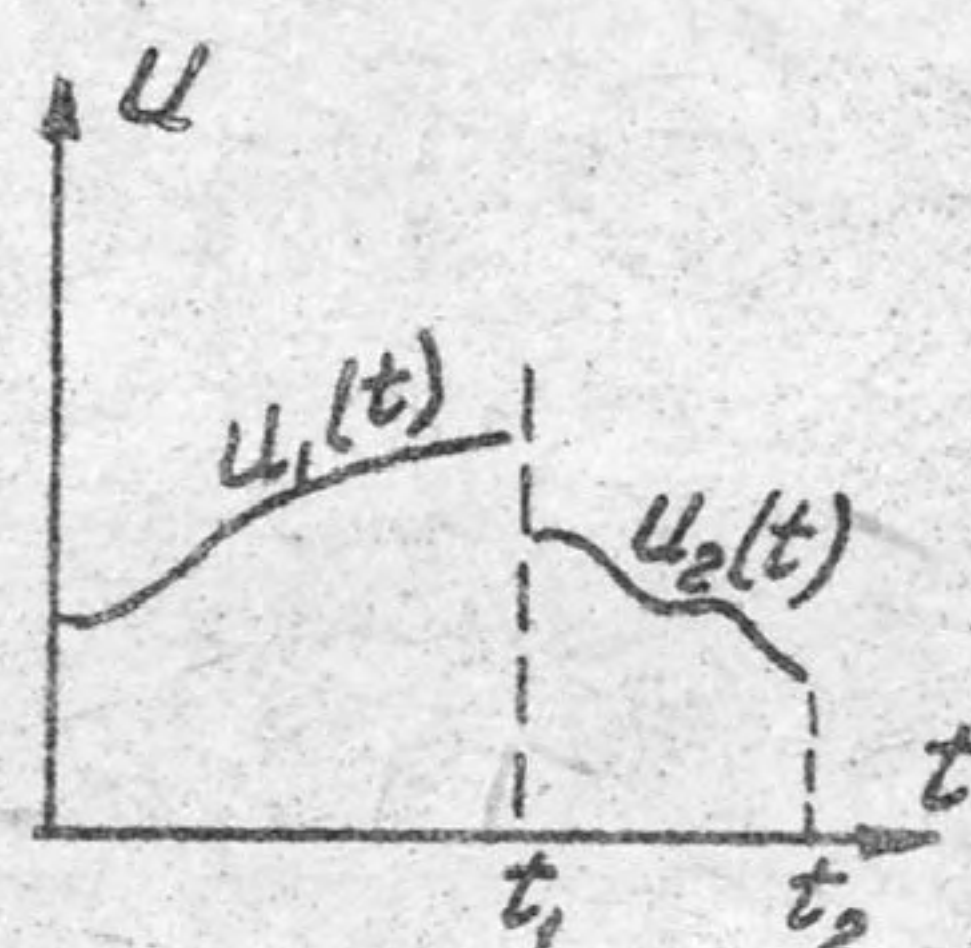


Рис. 46



Рис. 47

§ I. Представление воздействий

При анализе цепей во временной области при импульсных воздействиях часто применяют две специальные функции: единичную функцию и единичный импульс.

Единичную функцию $1(t)$ определяют следующим образом (рис. 48):

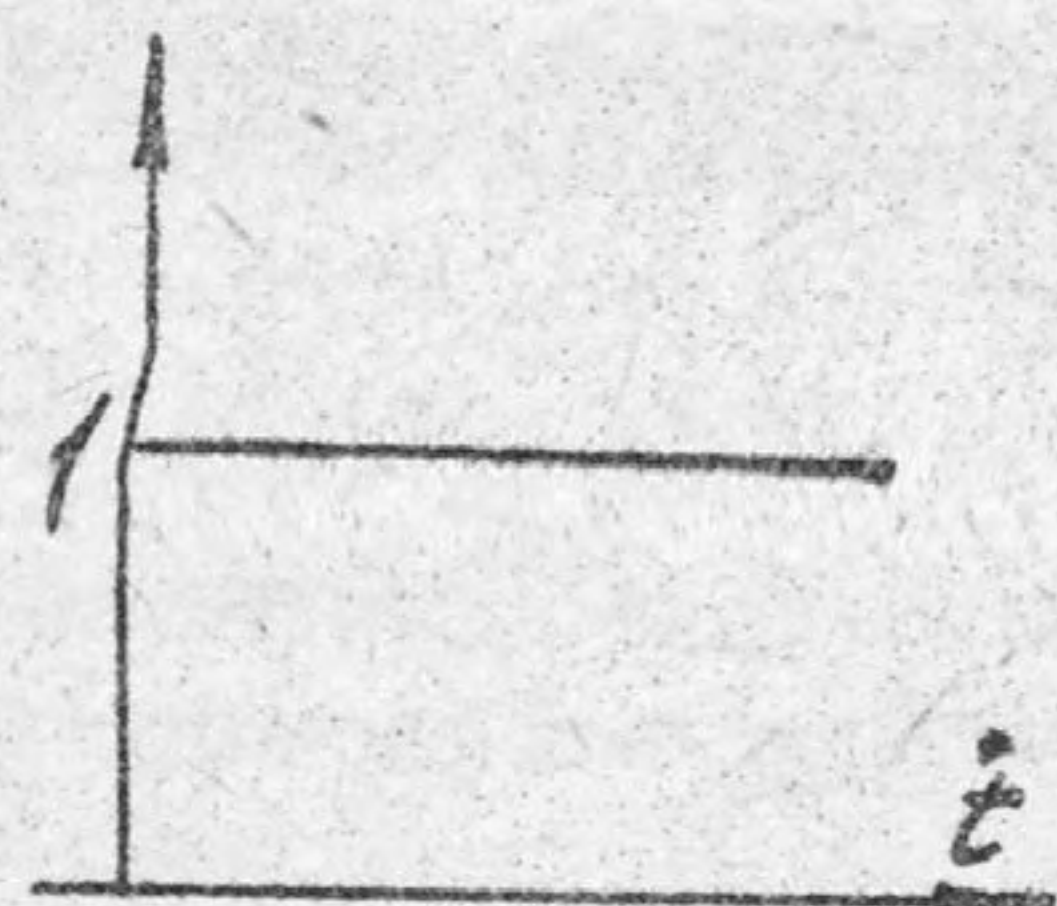


Рис. 48

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично можно определить функцию $1(t-\tau)$ (рис. 49):

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Умножение любой ограниченной функции $f(t)$ на $1(t-\tau)$ дает

$$f(t)1(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ f(t) & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Таким образом, если источник ЭДС (тока) включается в момент τ , его уравнением будет $e(t)1(t-\tau)$.

Единичный импульс или дельта-функцию $\delta(t)$ определяют как функцию, равную нулю для всех t , кроме $t = 0$.

В момент времени $t = 0$ $\delta(0) = \infty$, а интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Единичный импульс представляет собой производную от функции, которая в пределе превращается в единичную функцию $1(t)$:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t), \quad 1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

Дельта-функция, смещенная на время τ относительно начала координат, равна

$$\delta(t-\tau) = \frac{d}{dt} 1(t-\tau).$$

С единичной и дельта-функцией непосредственно связаны переходная и импульсная функции, которые имеют большое значение при расчете переходных процессов.

Применение единичных функций позволяет дать аналитическое описание сложных кусочно-непрерывных импульсов. Например, импульс (рис. 50) длительностью $t_2 - t_1$ можно представить как разность двух функций $f(t)$ и $-f(t)$, включаемых соответственно в момент t_1 и t_2 . Это позволяет написать аналитическое выражение импульсного сигнала

$$f(t)1(t-t_1) - f(t)1(t-t_2).$$

Аналогичным приемом можно получить аналитическое выражение для импульса любой сложности.

Пример 26. Записать в виде аналитической функции выражение импульса, изображенного на рис. 51а.

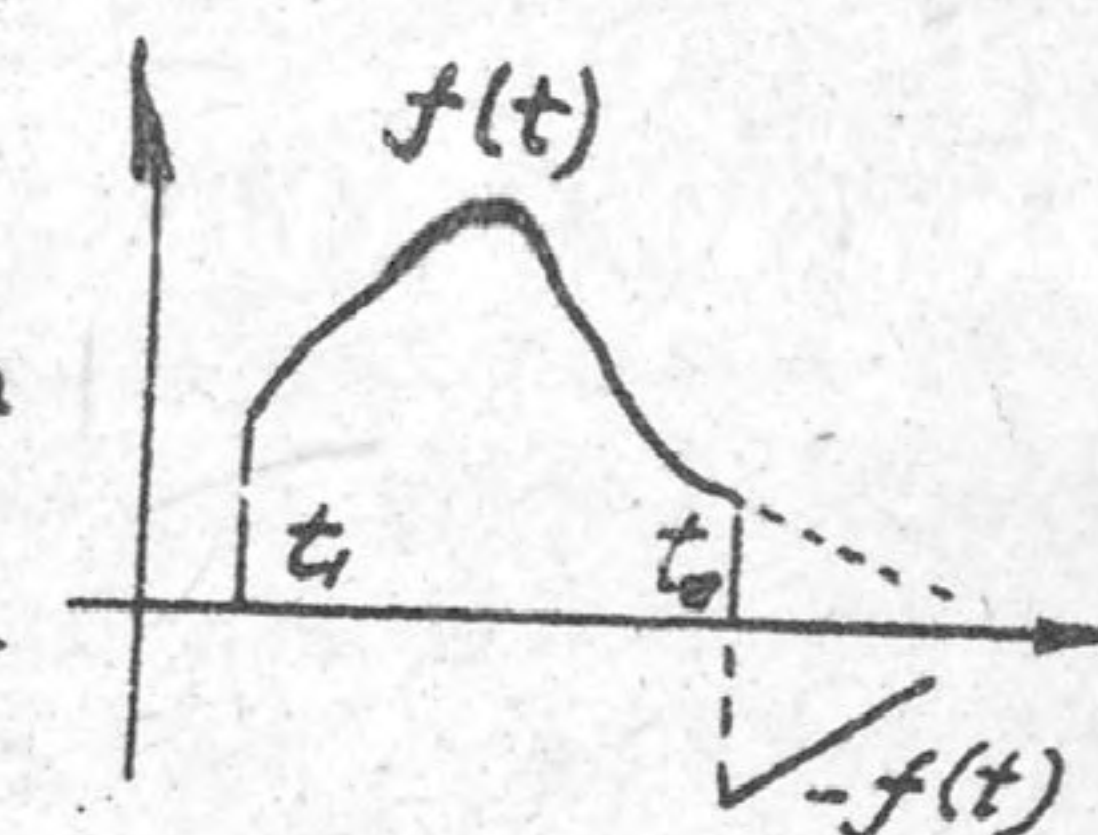


Рис. 50

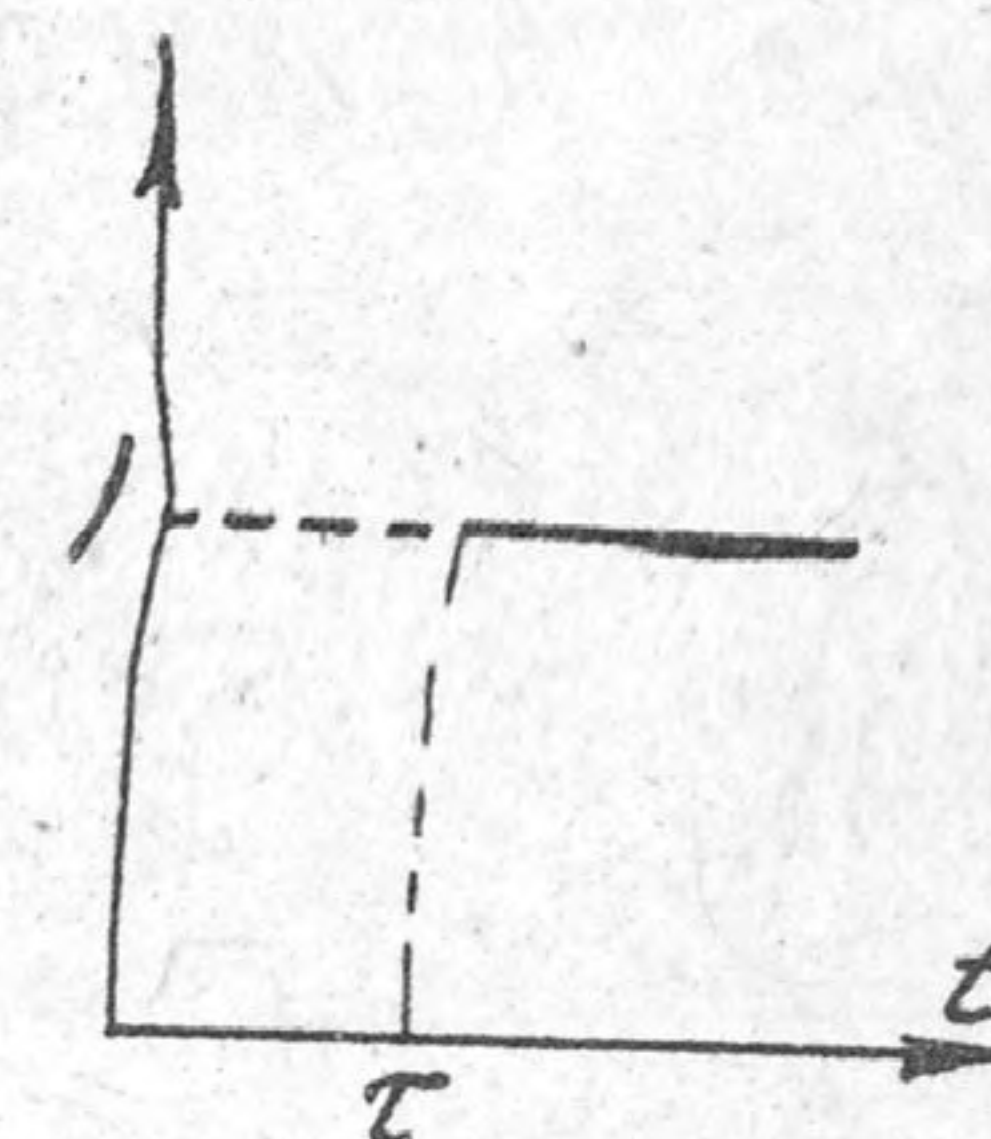


Рис. 49

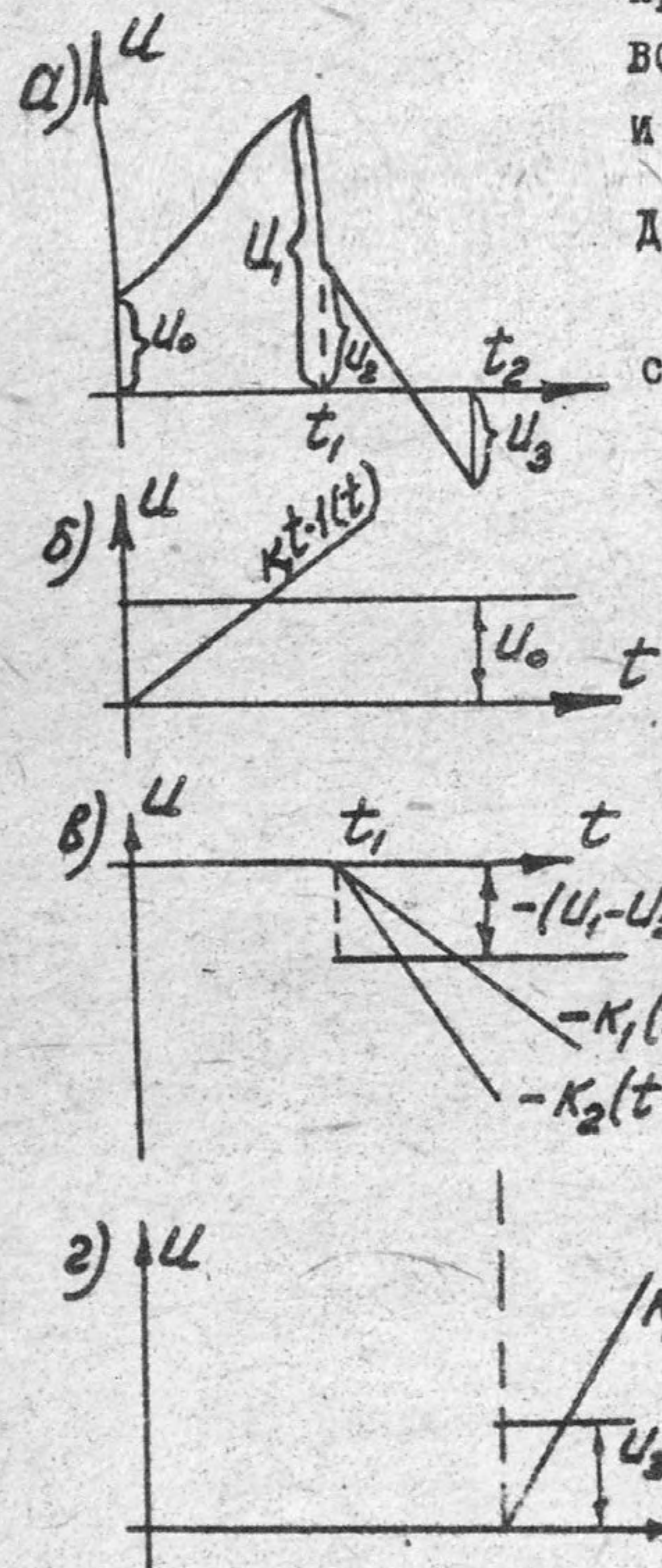


Рис. 5I

Решение. Приведенный импульс можно представить в виде суммы элементарных воздействий, включаемых в моменты 0, t_1 и t_2 и действующих от момента включения до бесконечности (рис. 5I). В интервале $0 \leq t < t_1$ импульс состоит из двух составляющих

$$u(t) = u_0 i(t) + \frac{u_1 - u_0}{t_1} t i(t) \quad (\text{рис. 5I б}).$$

С момента t_1 дополнительно включается функция $-K_1(t-t_1) i(t-t_1)$, учитывающая скачкообразное уменьшение напряжения от уровня u_1 до u_2 , а также функция $-K_2(t-t_1) \times i(t-t_1)$, компенсирующая функцию $K_1 t \cdot i(t)$, и функция $-K_2(t-t_1) i(t-t_1)$, соответствующая уменьшению напряжения в интервале $t_1 \leq t < t_2$.

Полное выражение $u(t)$ в интервале $t_1 \leq t < t_2$ имеет вид

$$u(t) = u_0 i(t) + \frac{u_1 - u_0}{t_1} t i(t) -$$

$$-(u_1 - u_2) i(t-t_1) - \frac{u_1 - u_0}{t_1} (t-t_1) i(t-t_1) - \frac{u_2 - u_3}{t_2 - t_1} (t-t_1) i(t-t_1).$$

С момента t_2 дополнительно включаются еще две составляющие $K_2(t-t_2) i(t-t_2)$ и $u_3 \cdot i(t-t_2)$. Напряжения в интервале $t_2 \leq t < \infty$ можно выразить в виде

$$u(t) = u_0 i(t) + \frac{u_1 - u_0}{t_1} t i(t) - (u_1 - u_2) i(t-t_1) - \frac{u_1 - u_0}{t_1} (t-t_1) i(t-t_1) - \frac{u_2 - u_3}{t_2 - t_1} (t-t_1) i(t-t_1) + u_3 i(t-t_2) + \frac{u_2 - u_3}{t_2 - t_1} (t-t_2) i(t-t_2).$$

При использовании операторного метода для аналитической записи

изображений простейших воздействий, включаемых в разные моменты времени, используется теорема запаздывания.

Если некоторая функция $f(t) i(t)$ имеет изображение $F(p)$, то функция $f(t-t_1) i(t-t_1)$ имеет изображение $F(p) e^{-pt_1}$.

Таким образом, изображение напряжения для примера 26 имеет

вид

$$U(p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{t_1 p^2} - \frac{u_1 - u_2}{p} e^{-pt_1} - \frac{u_1 - u_0}{t_1 p^2} e^{-pt_1} - \frac{u_2 - u_3}{(t_2 - t_1) p^2} e^{-pt_2} + \frac{u_3 - u_2}{p} e^{-pt_2} + \frac{u_3}{p} e^{-pt_2}.$$

Из приведенного примера ясно, что изображение единичной функции

$$i(t) \doteq \frac{1}{p}.$$

Изображение единичного импульса, являющегося производной от единичной функции, равно 1, т.е. $\delta(t) \doteq 1$, а для запаздывающего импульса $\delta(t-t_1) \doteq e^{-pt_1}$.

§ 2. Переходная и импульсная характеристики цепи

Если на пассивную электрическую цепь действует некоторое постоянное возмущение $f(t)$, оно вызывает появление соответствующей реакции $x(t)$. Характер реакции определяется конфигурацией электрической цепи и параметрами элементов. Отношение реакции (тока или напряжения) в некоторой ветви к значению постоянного входного воздействия (входное воздействие может быть также напряжением или током) при нулевых начальных состояниях цепи называется переходной характеристикой цепи и обозначается $h(t)$ (иногда встречаются обозначения $y(t)$, $g(t)$, $z(t)$ и т.д.):

$$h(t) = \frac{x(t)}{f(t)} = \frac{x(t)}{F \cdot i(t)},$$

где F — входное постоянное воздействие.

Из этого соотношения видно, что переходные функции численно совпадают с временными зависимостями токов или напряжений в цепи, если входное воздействие представляет собой единичную функцию напряжения или тока. Переходные функции могут быть безразмерными, иметь размерность проводимости или сопротивле-

ния в зависимости от того, какие размерности имеют входное воздействие и реакция (отклик) системы.

Если размерности воздействия и отклика одинаковы, например это напряжения, то переходные функции безразмерные. Так, для схемы рис. 52 переходная функция для напряжения на конденсаторе имеет вид $h_{u_c}(t) = 1 - e^{-t/\tau_c}$, а для тока имеет размерность проводимости: $h_i(t) = g(t) = \frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c}$.

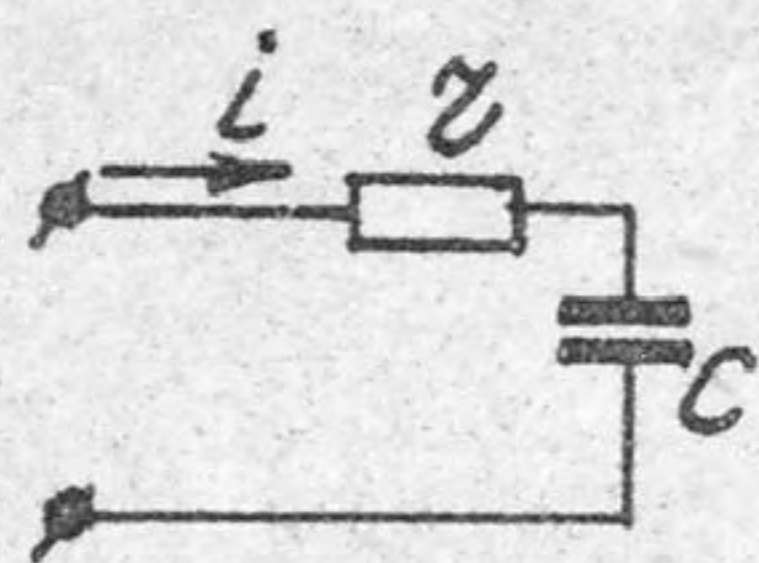


Рис. 52

Из этих определений вытекает простой метод определения переходных функций. На вход схемы включаем единичное воздействие — ЭДС, равную 1, или источник тока, равный 1, и рассчитываем переходный процесс, возникающий при этом. Закономерности изменения напряжений и токов на элементах цепи определяют соответствующие переходные функции.

Пример 27. Рассчитать переходную функцию для напряжения на конденсаторе и тока в неразветвленной части схемы i_1 (рис. 53),

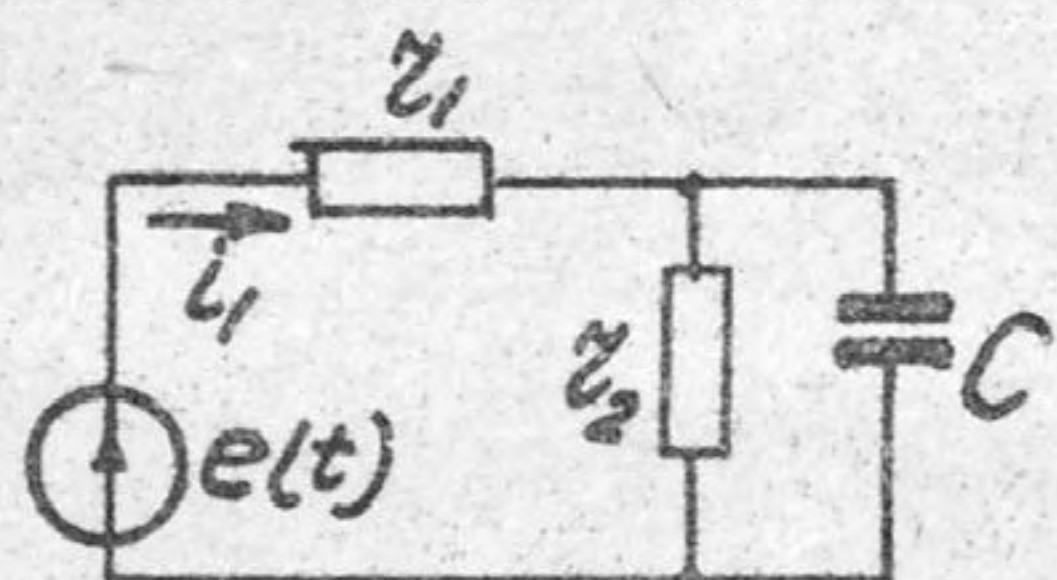


Рис. 53

если на схему воздействует источник напряжения, $\tau_1 = 100 \text{ Ом}$, $\tau_2 = 400 \text{ Ом}$, $C = 125 \text{ мкФ}$.

Решение. Включаем в схему постоянную ЭДС, равную 1, и рассчитываем переходные процессы для тока i_1 и напряжения на конденсаторе u_c , возникающие при этом:

$$i_1(t) = i_{1np} + i_{1св} = i_{1np} + A_1 e^{\rho t}$$

$$u_c(t) = u_{cnp} + u_{ссв} = u_{cnp} + A_2 e^{\rho t}$$

Для определения ρ составляем характеристическое уравнение

$$Z(\rho) = \tau_1 + \frac{\tau_2}{\rho C} = 0,$$

откуда

$$\rho = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 C} = -100 \text{ 1/с}.$$

Для определения параметров A_1 и A_2 воспользуемся начальными условиями $u_c(0_+) = 0$:

$$i_1(0_+) = \frac{e(0) - u_c(0)}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1},$$

откуда для $t = 0_+$ имеем соотношения:

$$0 = u_{cnp}(0) + A_2; \quad 0 = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} + A_2; \quad A_2 = -\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2};$$

$$\frac{1}{\tau_1} = i_{np}(0) + A_1; \quad A_1 = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Таким образом,

$$i_1(t) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)} e^{-\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 C} t},$$

$$u_c(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (1 - e^{-\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 C} t}),$$

а следовательно,

$$h_{i_1}(t) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)} e^{-\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 C} t} = 0,02 + 0,08 e^{-100t}.$$

Переходная характеристика $h_{i_1}(t)$ имеет размерность проводимости,

$$h_{u_c}(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (1 - e^{-\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 C} t}) = 0,8(1 - e^{-100t}).$$

безразмерная характеристика.

Пример 28. Определить переходную характеристику для тока i_2 и напряжения на индуктивности. В схеме рис. 54 действует источник тока, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 50 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$.

Решение. Задачу решаем операторным способом, для чего составляем операторную схему замещения (рис. 55). При определении переходных функций в схему включается единичный источник тока $\mathcal{I}(t) = 1(t)$; следовательно, его операторное изображение $\mathcal{I}(\rho) = \frac{1}{\rho}$.

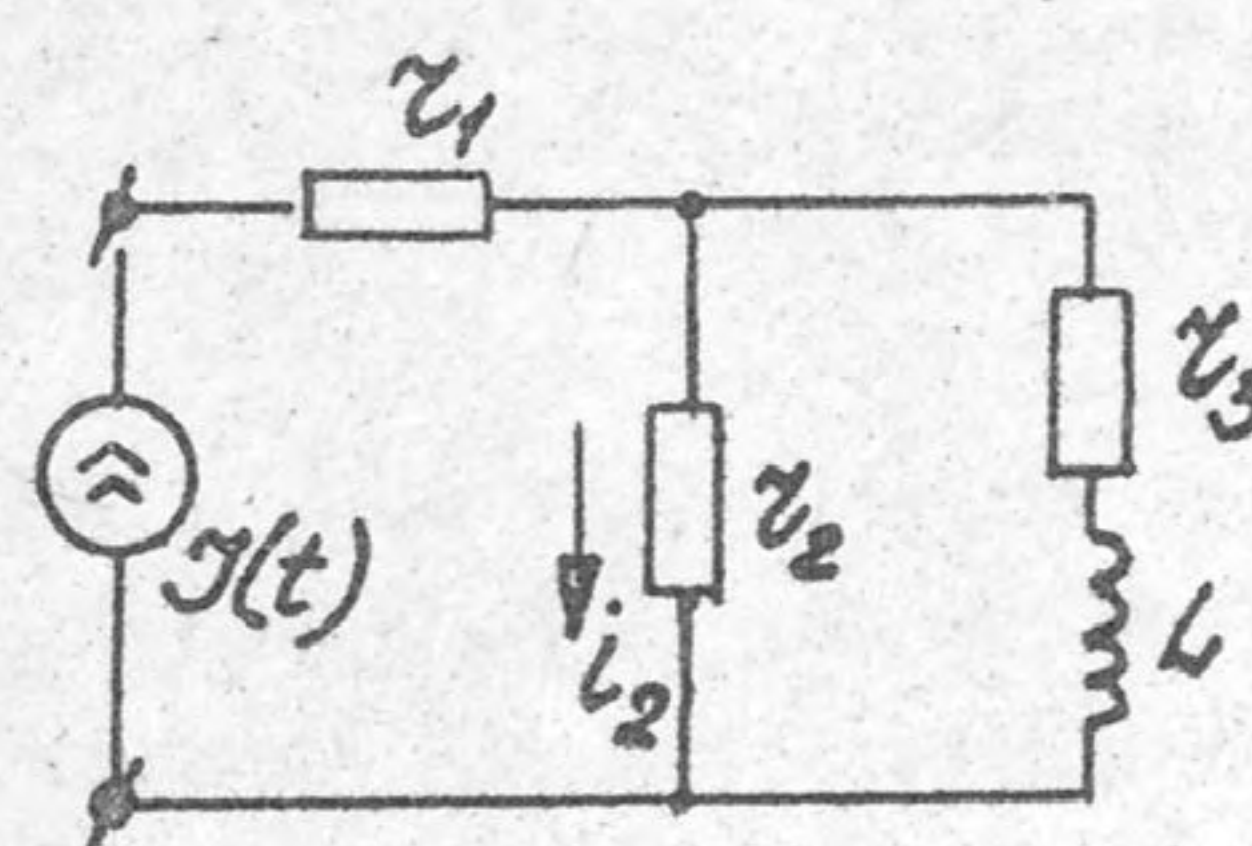


Рис. 54

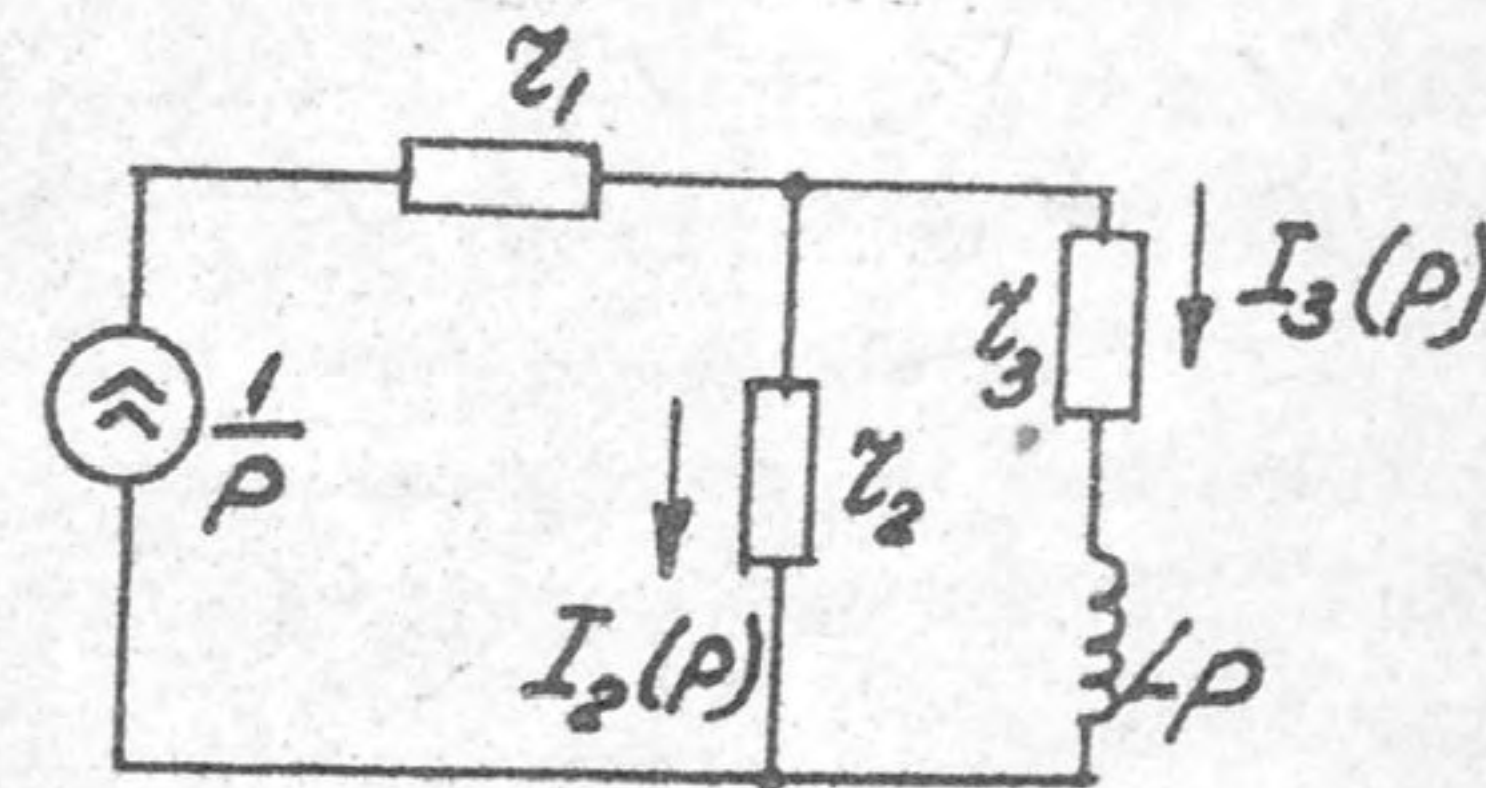


Рис. 55

Так как $I_1(\rho) = \mathcal{I}(\rho)$, а ток в разветвленной части

цепи распределяется обратно пропорционально сопротивлениям ветвей, то

$$I_2(p) = I(p) \frac{Z_3(p)}{Z_3(p) + Z_2(p)}, \quad I_3(p) = I(p) \frac{Z_2(p)}{Z_3(p) + Z_2(p)}.$$

Подставляя данные, получаем решение для изображений токов в виде

$$I_2(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\tau_3 + Lp}{\tau_2 + \tau_3 + Lp}, \quad I_3(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\tau_2}{\tau_2 + \tau_3 + Lp};$$

изображение напряжения на индуктивности

$$U_L(p) = I_3(p) \cdot Lp = \frac{\tau_2 L}{\tau_2 + \tau_3 + Lp}.$$

Следовательно,

$$H_{I_2}(p) = \frac{\tau_3 + Lp}{p(\tau_2 + \tau_3 + Lp)}, \quad H_{U_L}(p) = \frac{\tau_2 L}{\tau_2 + \tau_3 + Lp}.$$

По известным изображениям находим искомые переходные характеристики:

$$h_{I_2}(t) = \frac{\tau_3}{\tau_2 + \tau_3} + \frac{\tau_2}{\tau_2 + \tau_3} e^{-\frac{\tau_2 + \tau_3}{L}t} \quad (\text{без } p),$$

$$h_{U_L}(t) = \tau_2 e^{-\frac{\tau_2 + \tau_3}{L}t} \quad (\text{Ом})$$

или в окончательной форме $h_{I_2}(t) = 0,5 + 0,5 \cdot e^{-500t}$,

$$h_{U_L}(t) = 50 e^{-500t}$$

В некоторых случаях при расчете переходных процессов очень удобно использовать импульсные функции. Под импульсной характеристикой цепи понимается отношение временной зависимости реакции к площади импульсного воздействия. На практике импульсная характеристика определяется как реакция цепи на единичную возмущающую функцию $\delta(t)$ (единичный импульс) при нулевых начальных условиях.

Наиболее распространенным методом определения импульсных функций является операторный, при этом изображение единичного импульса $\delta(p) = 1$. Обозначаются импульсные функции обычно теми же символами, что и переходные функции, но с индексом 0.

Если $h(t)$ — переходная функция, то $h_0(t)$ — им-

пульсная функция.

Пример 29. Рассчитать импульсную функцию для тока схемы, изображенной на рис. 56, где $L = 0,1$ Гн, $\tau = 10$ Ом.

Решение. Прикладываем к схеме единичный импульс $\delta(t)$ и рассчитываем реакцию системы на его воздействие. Операторная схема для изображений имеет вид, представленный на рис. 57.

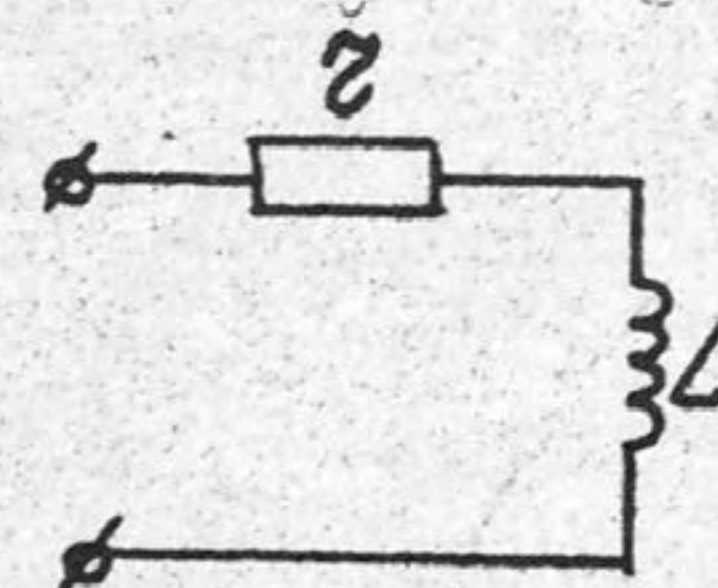


Рис. 56

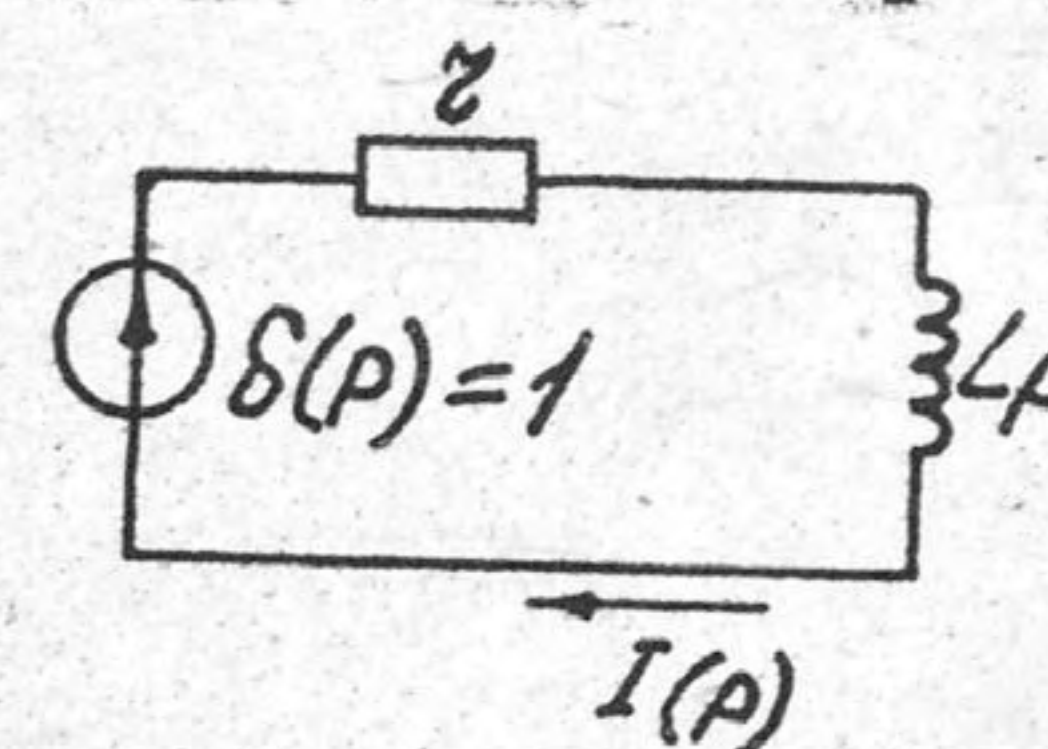


Рис. 57

Изображение тока $I(p) = \frac{1}{\tau + Lp} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{p + \frac{\tau}{L}}$.

Оригинал $i(t)$ имеет вид $\frac{1}{L} e^{-\frac{\tau}{L}t}$ и определяет искомую импульсную функцию

$$h_0(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{\tau}{L}t} = 10 e^{-100t}.$$

Пример 30. Определить импульсные функции тока i_1 и напряжения на индуктивности для схемы рис. 58 при воздействии на нее импульса напряжения; в схеме $\tau_1 = 10$ Ом, $\tau_2 = 30$ Ом, $L = 0,05$ Гн.

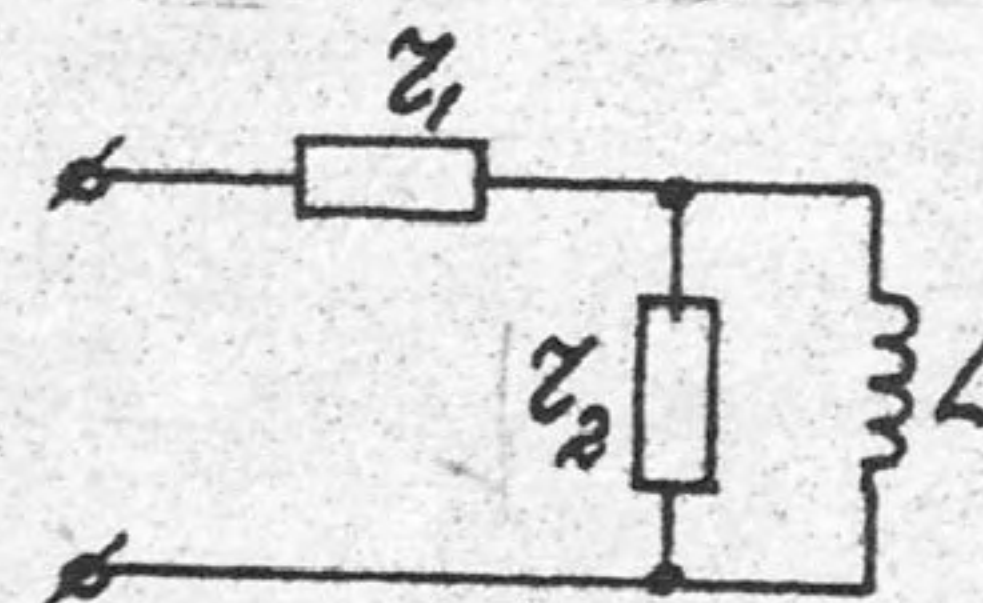


Рис. 58

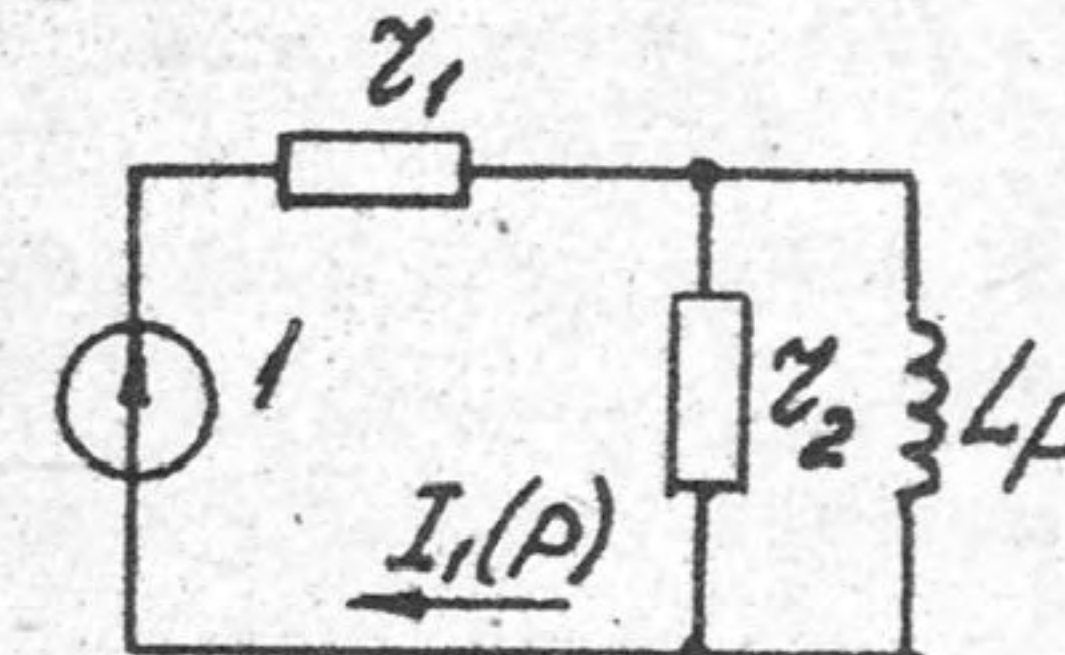


Рис. 59

Решение. Схема замещения имеет вид рис. 59, откуда

$$I_1(p) = \frac{\delta(p)}{Z(p)} = \frac{1}{\tau_1 + \frac{\tau_2 p L}{\tau_2 + p L}} = \frac{\tau_2 + p L}{\tau_1 \tau_2 + \tau_1 p L + \tau_2 p L}.$$

$$U_L(p) = U(p) - I_1(p) \tau_1 = 1 - \frac{\tau_1 (\tau_2 + p L)}{\tau_1 \tau_2 + \tau_1 p L + \tau_2 p L}.$$

Следовательно, изображение импульсной функции тока будет иметь вид

$$H_{oi}(\rho) = \frac{\rho L + \tau_2}{\rho L(\tau_1 + \tau_2) + \tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{1}{L} \frac{\tau_2^2}{(\tau_1 + \tau_2)^2} \cdot \frac{1}{\rho + \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}}$$

а оригинал

$$h_{oi}(t) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \delta(t) + \frac{1}{L} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right)^2 e^{-at},$$

где

$$a = \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Для напряжения на индуктивности

$$H_{ou}(\rho) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{\tau_1}{L} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right)^2 \frac{1}{\rho + a},$$

$$h_{ou}(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \delta(t) - \frac{\tau_1}{L} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right)^2 e^{-at}$$

или после подстановки числовых данных

$$h_{oi}(t) = 0,025 \delta(t) + 11,25 e^{-150t},$$

$$h_{ou}(t) = 0,75 \delta(t) - 112,5 e^{-150t}.$$

Аналогичным образом находятся импульсные функции, если в схеме действует импульсный источник тока.

Между импульсной и переходной характеристиками цепи существует связь, которая легко позволяет, зная одну из этих характеристик, определить вторую. Переходная функция $h(t)$ при известной импульсной определяется по формуле

$$h(t) = \int_0^t h_o(\tau) d\tau.$$

Если же известна переходная функция, импульсная функция определяется из соотношения

$$h_o(t) = \frac{d(h(t))}{dt} \quad \text{при } t > t_u,$$

в интервале $0 < t < t_u$ решение имеет вид

$$h_o(t) = h(0_+) \delta(t).$$

Пример 31. Определить переходную функцию для схемы рис. 58 по известной импульсной функции

$$h_o = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \delta(t) + \frac{1}{L} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right)^2 e^{-at},$$

где $a = \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}.$

Решение:

$$h(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{1}{L} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right)^2 e^{-a\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)} e^{-at} + \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)} e^{0t} =$$

$$= \frac{1}{\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)} e^{-at}.$$

В справедливости полученного решения можно убедиться непосредственным определением переходной функции.

Пример 32. Схема рис. 56 имеет переходную функцию вида

$$h(t) = \frac{1}{L} (1 - e^{-\frac{L}{\tau} t}). \quad \text{Определить импульсную функцию.}$$

$$\text{Решение: } h_o(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d \frac{1}{L} (1 - e^{-\frac{L}{\tau} t})}{dt} = \frac{1}{L} e^{-\frac{L}{\tau} t}.$$

Пример 33. Схема рис. 58 имеет переходную функцию вида

$$h(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} t}. \quad \text{Определить импульсную функцию.}$$

Решение. В данной задаче $h(0) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$, поэтому решение ищем в виде

$$h_o(t) = h(0) \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \delta(t) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} t} \right] =$$

$$= \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \delta(t) - \frac{\tau_1 \tau_2^2}{L(\tau_1 + \tau_2)^2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} t}.$$

Получили решение, совпадающее с решением примера 30.

§ 3. Интеграл Дюамеля

а) При нулевых начальных условиях. Использование интеграла Дюамеля (интеграла наложения) при известных переходных или импульсных функциях позволяет определить реакцию на произвольное воздействие источника ЭДС или тока.

При произвольном воздействии на схему, меняющемся по закону $u(t)$, и переходной функции схемы $h(t)$ отклик (реакция) схемы (системы) определяется из следующего соотношения:

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Формулу можно распространить и на случай, когда функция $u(t)$ имеет разрывы. Например, если $u(t)$ меняется в соответствии с законом, изображенным на рис. 46, то решение запишется по интервалам времени в виде:

$$1) i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad 0 \leq t < t_1;$$

$$2) i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad t_1 \leq t < t_2;$$

$$3) i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau - u_2(t_2)h(t-t_2), \quad t \geq t_2.$$

В общем случае количество интервалов, для которых существует своя форма решения интеграла Дюамеля, зависит от количества участков, в пределах которых действует свой закон изменения:

$$u(t) = u_1(t), \quad u_2(t) \quad \text{и т.д.}$$

Пример 34. Рассчитать ток в цепи и определить закон изменения напряжения на конденсаторе для цепи, изображенной на рис. 53, если напряжение на входе схемы меняется в соответствии с законом рис. 60.

$$u_1(t) = 100(1 - e^{-200t}), \quad u_2(t) = -\frac{100}{e}e^{-50(t-t_1)},$$

$$C = 125 \text{ мкФ}, \quad r_1 = 100 \text{ Ом}, \quad r_2 = 400 \text{ Ом}.$$

Решение. Для схемы рис. 53 нами уже были определены переходные функции, они имеют вид:

$$h_{u_c}(t) = h_1(t) = 0,8(1 - e^{-100t}),$$

$$h_{u_2}(t) = h_2(t) = 2 \cdot 10^{-3}(1 + 4e^{-100t}).$$

В данной задаче имеются два участка, для которых справедлива своя форма решения:

1-й участок ($0 \leq t < t_1$)

$$u_c(t) = \int_0^t u'_1(\tau)h_1(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1,6 \cdot 10^4 e^{-200\tau} (1 - e^{-100(t-\tau)}) d\tau =$$

$$= \int_0^t 1,6 \cdot 10^4 e^{-200\tau} d\tau - 1,6 \cdot 10^4 e^{100t} \int_0^t e^{-100\tau} d\tau =$$

$$= -80 e^{-200\tau} \Big|_0^t + 160 e^{-100t} \cdot e^{-100\tau} \Big|_0^t =$$

$$= 80 - 160 e^{-100t} + 80 e^{-200t},$$

$$i(t) = \int_0^t u'_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t 2 \cdot 10^4 e^{-200\tau} \cdot 2 \cdot 10^{-3} [1 + 4e^{-100(t-\tau)}] \times$$

$$\times d\tau = 0,2 + 1,6 e^{-100t} - 1,8 e^{-200t};$$

2-й участок

$$u_c(t) = \int_0^{t_1} u'_1(\tau)h_1(t-\tau)d\tau - 100h_1(t-t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)h_1(t-\tau)d\tau =$$

$$0,005 \int_0^{0,005} [100(1 - e^{-200\tau})] \cdot 0,8 [1 - e^{-100(t-\tau)}] d\tau -$$

$$- 80 [1 - e^{-100(t-0,005)}] + \int_{0,005}^t [-\frac{100}{e} e^{-50(t-\tau)}] \times$$

$$\times 0,8 [1 - e^{-100(t-\tau)}] d\tau = e^{-100t} (240 e^{0,5} - 160 +$$

$$80 e^{0,5} - 160 e^{-50t} \cdot e^{-0,75}).$$

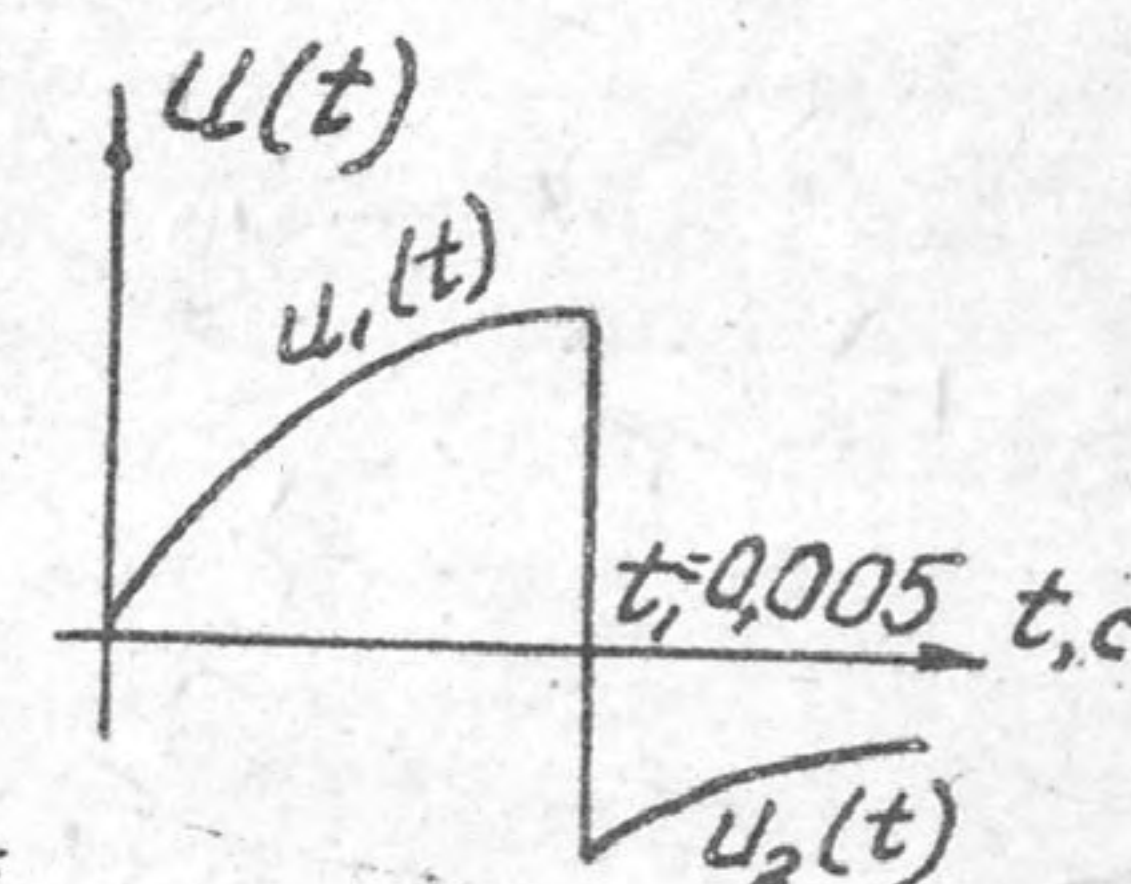


Рис. 60

Аналогично определяется и ток в цепи на втором участке.

Формула интеграла Дюамеля может быть преобразована в другую форму, если под знаком интеграла переменную $t-\tau$ заменить на τ :

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(\tau)d\tau.$$

Выбор формулы для решения зависит от того, какая из форм обеспечивает минимальную трудоемкость расчетов.

В некоторых случаях более удобно при расчете задач методом интеграла Дюамеля использовать импульсную функцию $h_0(t)$. В этом случае общая форма решения имеет вид:

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) h_0(t-\tau) d\tau \quad \text{или} \quad i(t) = \int_0^t u(t-\tau) h_0(\tau) d\tau.$$

Пример 35. Для схемы, состоящей из последовательно соединенных элементов r и L , определить закон изменения тока в цепи, если известны:

$$u(t) = 100e^{-50t}, \quad L = 0,1 \text{ Гн}, \quad r = 10 \text{ Ом}.$$

Решение. Импульсная функция по току для указанной схемы

$$h_0(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t} = 10e^{-100t}, \quad \text{переходная функция}$$

$$h(t) = \frac{1}{L} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}) = 0,1(1 - e^{-100t}).$$

Следовательно,

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) h_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t 100e^{-50\tau} \cdot 10e^{-100(t-\tau)} d\tau =$$

$$= 1000e^{-100t} \int_0^t e^{50\tau} d\tau = 20(e^{-50t} - e^{-100t}).$$

Решение этой же задачи при известной переходной функции имеет вид

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t-\tau) d\tau =$$

$$= 100 \cdot 0,1(1 - e^{-100t}) + \int_0^t -5 \cdot 10^3 e^{-50\tau} \cdot 0,1(1 - e^{-100(t-\tau)}) d\tau =$$

$$= 10(1 - e^{-100t}) - 500 \int_0^t e^{-50\tau} d\tau + 500e^{-100t} \int_0^t e^{50\tau} d\tau =$$

$$= 10 - 10e^{-100t} + 10e^{-50t} - 10 + 10e^{-50t} - 10e^{-100t} = 20e^{-50t} - 20e^{-100t}.$$

Как показывает приведенный пример, первая форма решения позволяет для данной задачи получить результат более быстрым способом.

Пример 26. На схему предыдущей задачи действует прямоугольный импульс длительностью T и амплитудой $\mathcal{U}$. Рассчитать закон изменения тока.

Решение. Так как импульсная функция нам известна, то решение имеет вид $h_0(t) = 10e^{-100t}$;

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) h_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \mathcal{U} \cdot 10e^{-100(t-\tau)} d\tau =$$

$$= 0,1\mathcal{U}(1 - e^{-100t}) \quad \text{в интервале } 0 \leq t < T$$

или

$$i(t) = \int_0^T u(\tau) h_0(t-\tau) d\tau = 0,1\mathcal{U}e^{-100t}(e^{100T} - 1)$$

в интервале времени $t \geq T$.

Пример 37. Рассчитать закон изменения тока в схеме рис. 56 в интервале времени $t_u < t < \infty$, если на нее действует треугольный импульс напряжения, изображенный на рис. 6I (см. далее), и

$$r = 10 \text{ Ом}, \quad L = 0,1 \text{ Гн}, \quad t_u = 0,001 \text{ с}, \quad \mathcal{U}_m = 10 \text{ В}.$$

Решение. Импульсная функция для данного случая определена в примере 36 и имеет вид

$$h_0(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t} = 10e^{-100t};$$

следовательно, $i(t) = \int_0^{t_u} u(\tau) h_0(t-\tau) d\tau =$

$$= \int_0^{t_u} \kappa \tau \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau = \frac{\kappa}{L} e^{-\frac{r}{L}t} \left(\tau \frac{L}{r} e^{\frac{r}{L}\tau} - \frac{L^2}{r^2} e^{\frac{r}{L}\tau} \right) \Big|_0^{t_u},$$

$$\text{где } \kappa = \frac{\mathcal{U}_m}{t_u} = 10^4 \text{ В/с}.$$

В окончательной форме решение таково:

$$i(t) = 0,055e^{-100t}.$$

Решение этой задачи можно получить по приближенной формуле, непосредственно вытекающей из определения импульсной функции:

$$i(t) = S_u \cdot h_0(t),$$

$$\text{где } S_u \text{ (площадь импульса)} = \frac{1}{2} \mathcal{U}_m \cdot t_u = 0,005 \text{ В} \cdot \text{с}.$$

Приведенная формула дает достаточно точное решение, если $t_u < T$, где T — постоянная затухания.

Для данного примера

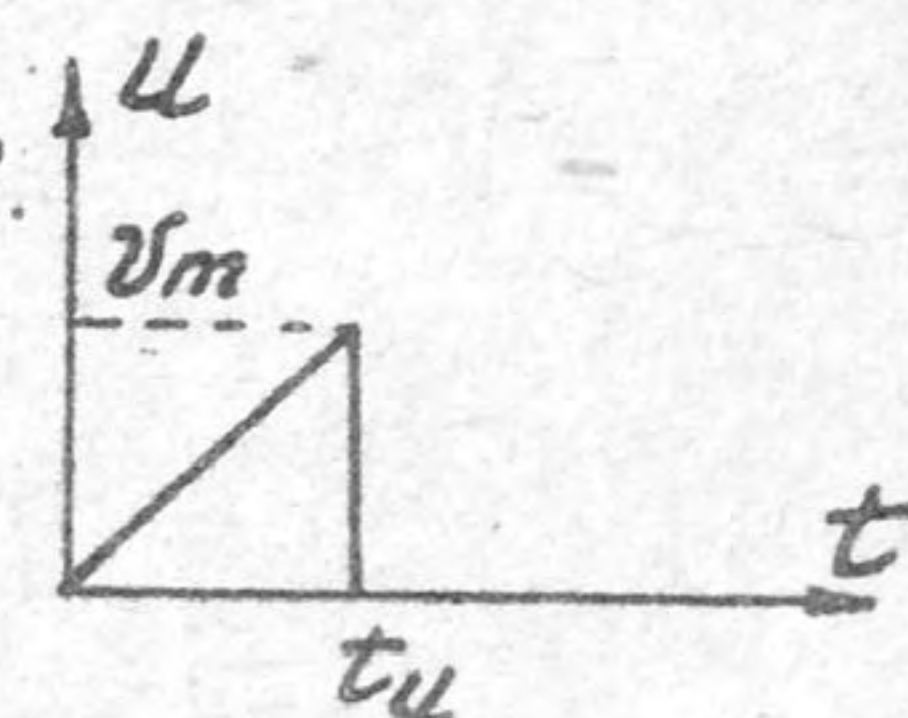


Рис. 6I

$$i(t) = 0,005 \cdot 10e^{-100t} = 0,05e^{-100t};$$

ошибка решения не превосходит 10%.

б) При ненулевых начальных условиях. С помощью интеграла Дюамеля в некоторых случаях решаются задачи с ненулевыми начальными условиями. В линейных системах, для которых справедлив принцип наложения, сложную реакцию, обусловленную внешним воздействием и ненулевыми начальными условиями, можно рассматривать как сумму простых реакций; первая реакция на ненулевые начальные условия при отсутствии внешних воздействий, вторая от внешних воздействий при нулевых начальных условиях.

Пример 38. Рассчитать ток в цепи для схемы рис. 62, если к ней приложено напряжение, меняющееся по закону рис. 63, а начальный ток в индуктивности равен 1 А, $L = 0,16$ Гн, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 80$ Ом.

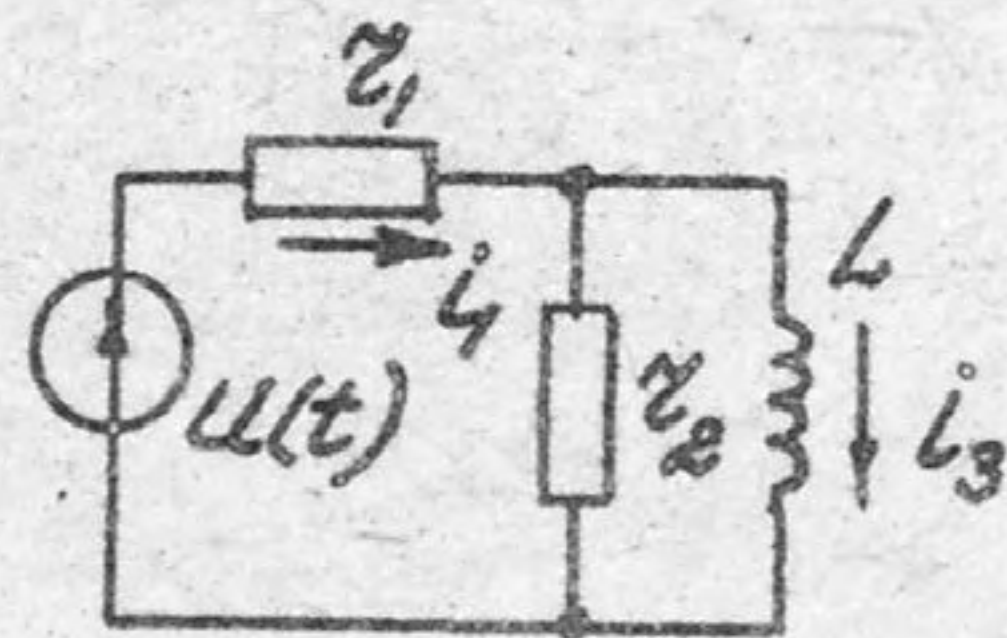


Рис. 62

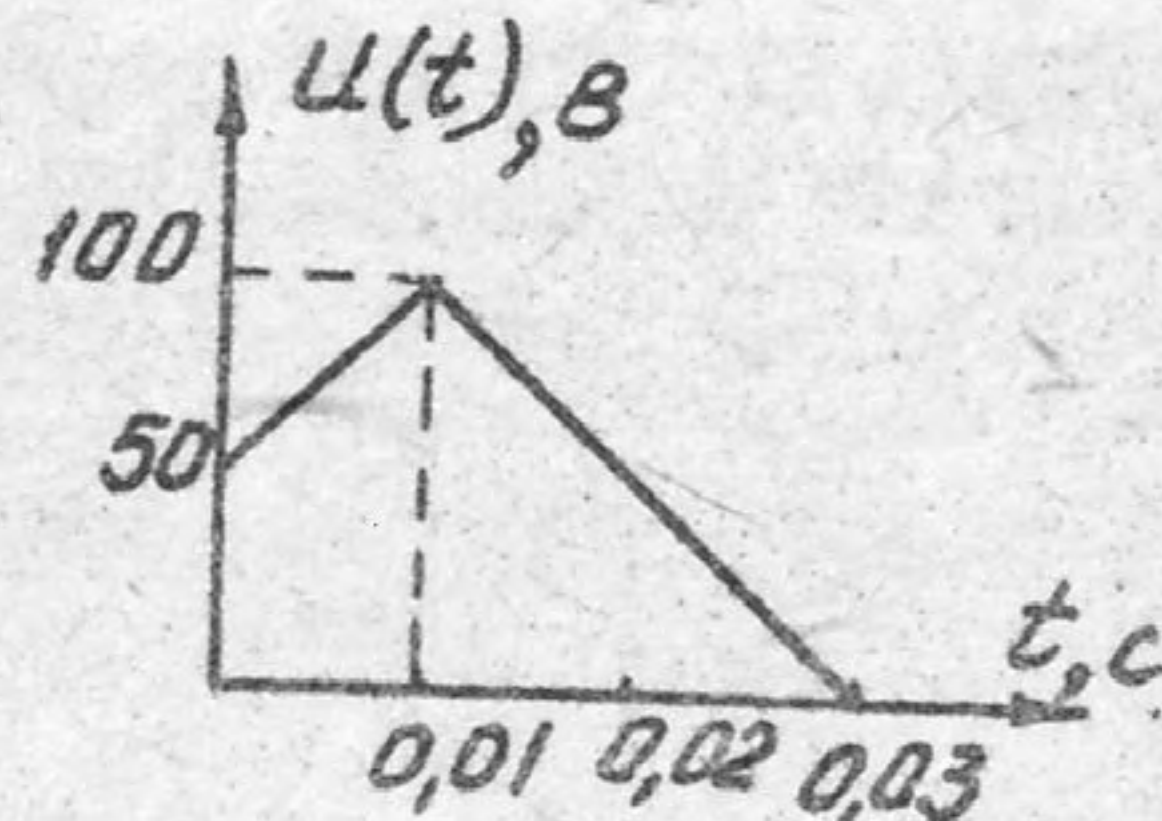


Рис. 63

Решение. Поведение линейной системы в некоторый момент в будущем определяется состоянием системы в настоящий момент и характером последующих входных воздействий и не зависит от способа, которым система достигла своего начального состояния, поэтому последовательно рассмотрим две задачи: реакцию на начальное состояние и реакцию на входное воздействие.

1) $u(t) = 0$, $i_3(0) = 1$ А (схема решения приведена на рис. 64),

$$i_3'(t) = i_{np}' + i_{св}'$$

Так как внешние источники отсутствуют, $i_{np}' = 0$, поэтому

$$i_3'(t) = i_{св}'(t) = A e^{\rho t} = A e^{-\frac{r_2 + r_1}{L} t} = A \cdot e^{-100t}$$

В начальный момент токи по ветвям 1 и 2 распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям, поэтому

$$i_1'(0) = i_3(0) \cdot \frac{r_2}{r_2 + r_1} = 0,8 \text{ А.}$$

Следовательно, при $t = 0$,

$$0,8 = A e^{\rho \cdot 0} = A.$$

Таким образом, составляющая тока i_1 , обусловленная ненулевыми начальными условиями, меняется по закону $i_1' = 0,8e^{-100t}$

2) $i_3(0) = 0$ и имеется внешнее воздействие в соответствии с законом рис. 63.

Задачу решаем обычным способом с использованием интеграла Дюамеля: применяем готовое решение для переходной функции, полученное в примере 31: $h(t) = 0,01(5 - 4e^{-100t})$,

$$i_1''(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{при } 0 \leq t < t_1;$$

$$i_1''(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{при } t_1 \leq t < 3t_1;$$

$$i_1''(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^{3t_1} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{при } t \geq 3t_1.$$

Решаем задачу последовательно для каждого интервала,

при $0 \leq t < t_1$, $u_1(\tau) = u(0) + K_1 \tau$, где

K_1 определяется наклоном прямой на первом участке:

$$K_1 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{50}{0,01} = 5000 \text{ В/с,}$$

следовательно, $u_1'(\tau) = K_1 = 5000 \text{ В/с,}$

$$i_1''(t) = 50 \cdot 0,01(5 - 4e^{-100t}) + \int_0^t 5000 \cdot 0,01(5 - 4e^{-100(t-\tau)})d\tau =$$

$$= 2,5 - 2e^{-100t} + 250t + 2e^{-100t} - 2 = 0,5 + 250t;$$

при $t_1 \leq t < 3t_1$,

$$i_1''(t) = 50 \cdot 0,01(5 - 4e^{-100t}) + \int_0^{t_1} 500 \cdot 0,01[5 - 4e^{-100(t-\tau)}]d\tau -$$

$$- \int_{t_1}^t 5000 \cdot 0,01[5 - 4e^{-100(t-\tau)}]d\tau;$$

$t_1 = 0,01$

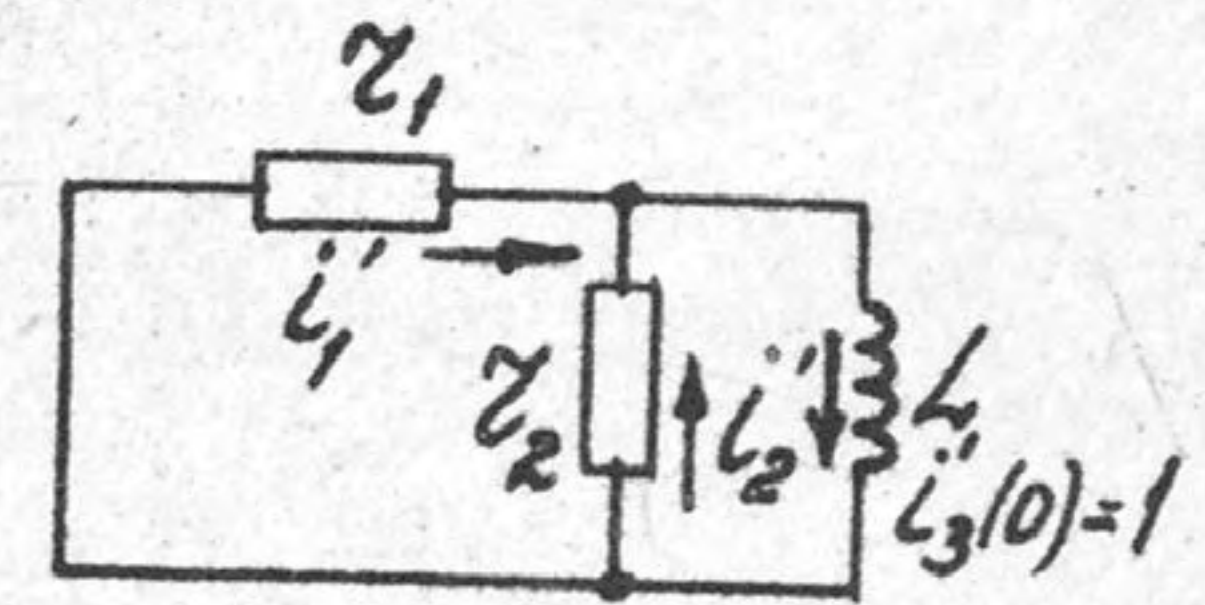


Рис. 64

$$K_2 = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{100}{0,02} = -5000 \text{ В/с,} \quad \text{тогда}$$

$$i_1''(t) = 2,5 - 2e^{-100t} + 2,5 + 2e^{-100t} - 2e \cdot e^{-100t} -$$

$$-250t + 2,5 + 2 - 2e \cdot e^{-100t} = 9,5 - 4e \cdot e^{-100t} - 250t,$$

при $t_1 > 3t_1$,

$$i_1''(t) = 2 \cdot e^{-100t} (e^3 - 2e).$$

Полное решение задачи $i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t)$.

Например, для интервала $t > 3t_1$, оно имеет вид

$$i(t) = 2e^{-100t} (e^3 - 2e) + 0,8e^{-100t} =$$

$$= e^{-100t} (2e^3 - 4e + 0,8).$$

в) Особые случаи. Иногда переходные процессы на отдельном участке схемы целиком определяются законом изменения источника, и тогда решение задачи требует индивидуального подхода. Часть задачи решается с применением интеграла Дюамеля, другая часть — непосредственным дифференцированием (интегрированием) уравнений, определяемых изменением источников.

Пример 39. Для схемы, изображенной на рис. 65, определить закон изменения напряжения на зажимах источника тока u_{ab} , если ток источника тока меняется в соответствии с законом рис. 66, $r = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

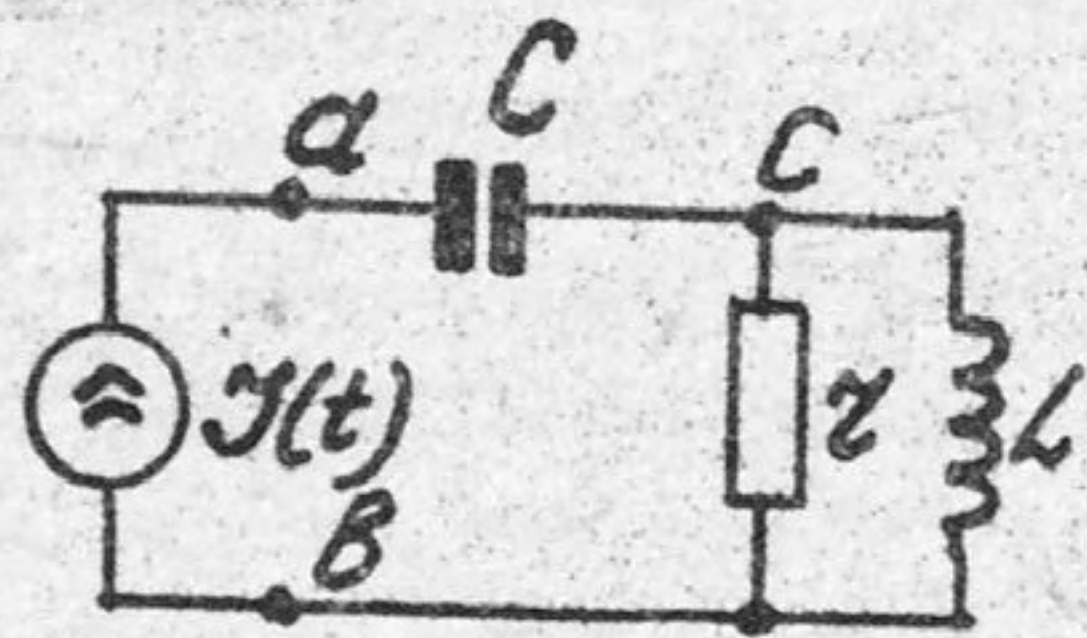


Рис. 65

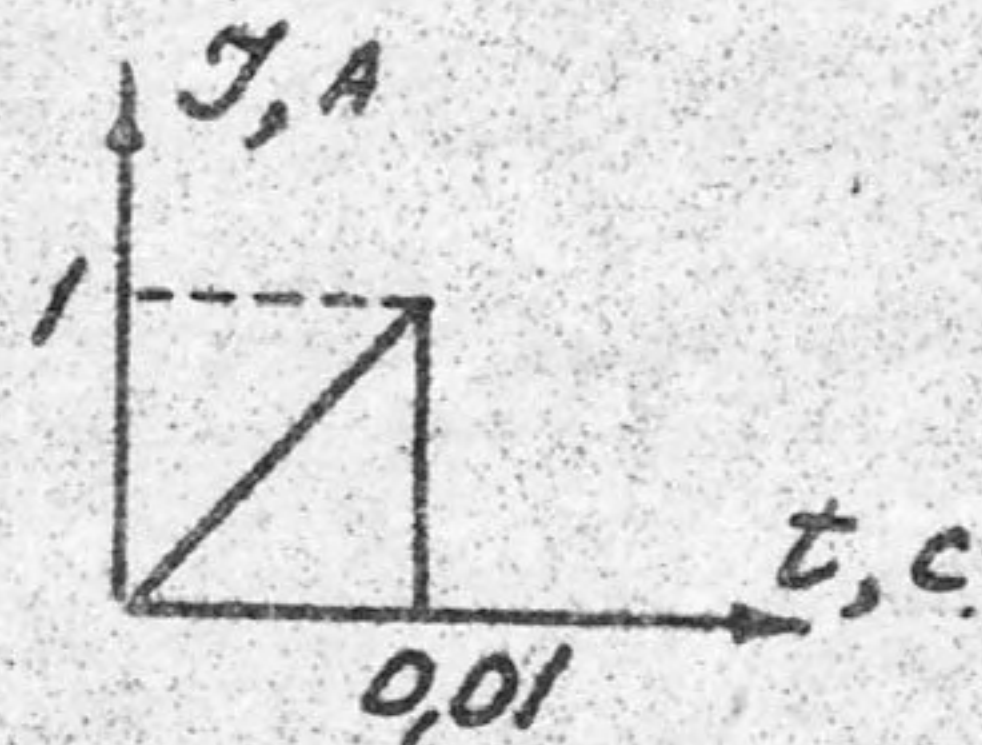


Рис. 66

Решение. В данной задаче участок цепи, состоящий из параллельно соединенных индуктивности и конденсатора, рассчитывается интегралом Дюамеля, так как для него существует переходная функция; напряжение на конденсаторе целиком определя-

62

ется законом изменения тока источника

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int y(t) dt.$$

Поэтому напряжение на зажимах источника будем искать по частям; отдельно напряжение u_{cb} , отдельно напряжение на конденсаторе u_{ac} .

Определяем переходную функцию для напряжения u_{cb} в соответствии со схемой рис. 67:

$$u_{cb}(t) = u_{cbnp} + u_{cbcb} = u_{cbnp} + A \cdot e^{\rho t}, \quad u_{cbnp} = 0,$$

так как $\lim_{t \rightarrow \infty} u_{cb} = 0$. Следовательно, $u_{cb}(t) = A e^{\rho t}$

Напряжение $u_{cb}(0) = y(0) \cdot r = r$, так как ток через индуктивность равен нулю, а характеристическое уравнение имеет вид $r + L\rho = 0$. Окончательно переходная функция

$$h(t)_{cb} = r \cdot e^{-r/L t}$$

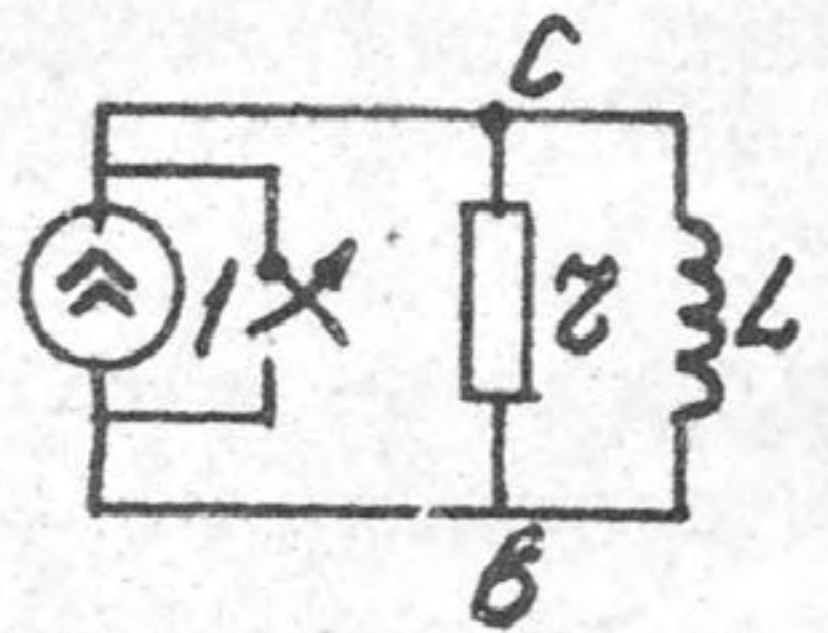


Рис. 67

Следовательно, напряжение на режимах источника определяется выражением

$$u_{ab}(t) = u_{ac} + u_{cb} = \frac{1}{C} \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^t y'(\tau) h_{cb}(t-\tau) d\tau$$

в интервале $0 \leq t < t_1$;

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{C} \int_0^{t_1} y(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} y'(\tau) h_{cb}(t-\tau) d\tau -$$

$$- y(t_1) h_{cb}(t-t_1)$$

в интервале $t > t_1$.

Подставляя в уравнение условия задачи, получаем

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{C} \int_0^{t_1} \kappa \tau d\tau + \int_0^{t_1} \kappa \cdot \tau \cdot e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{C} \kappa \frac{t_1^2}{2} + \kappa \tau \cdot e^{-\frac{r}{L}t} \cdot \frac{L}{r} (-1 + e^{\frac{r}{L}t_1}) =$$

$$-\frac{\kappa t^2}{2C} + \kappa L - \kappa L \cdot e^{-\frac{z}{L}t} = 5 \cdot 10^{-5} t^2 + 10 - 10e^{-100t}$$

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{C} \int_0^{t_1} \kappa \tau d\tau + \int_0^{t_1} \kappa \tau e^{-\frac{z}{L}(t-\tau)} d\tau - \tau e^{-\frac{z}{L}(t-t_1)} \quad \text{при } 0 \leq t < t_1$$

$$= \frac{1}{C} \kappa \frac{t_1^2}{2} + \kappa \tau e^{-\frac{z}{L}t} \frac{L}{z} (-1 + e^{\frac{z}{L}t_1}) - \tau e^{-\frac{z}{L}(t-t_1)}$$

$$= 50 + 10e^{-100t} (e-1) - 10e \cdot e^{-100t} = 50 - 10e^{-100t}$$

при $t > t_1$.

§ 4. Метод переменных состояний

При расчете переходных процессов в цепях большой сложности, на которые одновременно действует несколько ЭДС или источников тока, используется метод переменных состояний. Если система имеет n реактивных независимых накопителей, то она характеризуется n -мерным вектором $\bar{x}(t)$:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

При этом отдельные компоненты вектора могут иметь различные размерности (вольты, амперы и т.п.).

Уравнения, описывающие переходные процессы в такой системе, носят название канонических уравнений состояния линейной системы и имеют вид

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — переменные состояния, в качестве которых, как правило, используются напряжения на конденсаторах и токи в индуктивностях, хотя в принципе можно исполь-

зовать и другие переменные характеристики;

$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ — производные переменных состояния;

$a_{jk}, \dots, b_{jk}$ — постоянные коэффициенты, определяемые конфигурацией схемы и параметрами элементов;

$u_1, \dots, u_m$ — воздействия, т.е. источники э.д.с. (тока) в линейной системе.

Количество уравнений системы равно количеству основных независимых начальных условий.

В матричной форме эта система имеет вид

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t),$$

где $\bar{A}$ — матрица порядка $n \times n$, состоящая из коэффициентов вида a_{jk} ;

$\bar{B}$ — матрица порядка $n \times m$, матрица коэффициентов b_{jk} ;

$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ — матрица-столбец входных воздействий.

Количество основных независимых начальных условий равно числу реактивных накопителей z минус число независимых контуров ρ , образованных только емкостями и источниками ЭДС, и минус число узлов q , к которым подсоединены только источники тока и ветви с индуктивностями, т.е.

$$n = z - \rho - q.$$

Чтобы легче выявить перечисленные выше контуры, рекомендуется разомкнуть все элементы, кроме емкостей и источников ЭДС, а для выявления узлов закоротить все элементы, за исключением индуктивностей и источников тока.

Количество независимых контуров, образующихся при этой операции, определяет величину ρ , а количество независимых узлов — величину q .

Пример 40. Определить количество переменных состояний для электрической схемы, изображенной на рис. 68.

Решение. Выполняем операции в соответствии с перечисленными рекомендациями; получаем схемы, изображенные на рис. 69.

В схеме (рис. 69а) имеется два независимых контура, следовательно, $\rho = 2$. В схеме рис. 69б имеется один независимый узел, следовательно, $q = 1$.

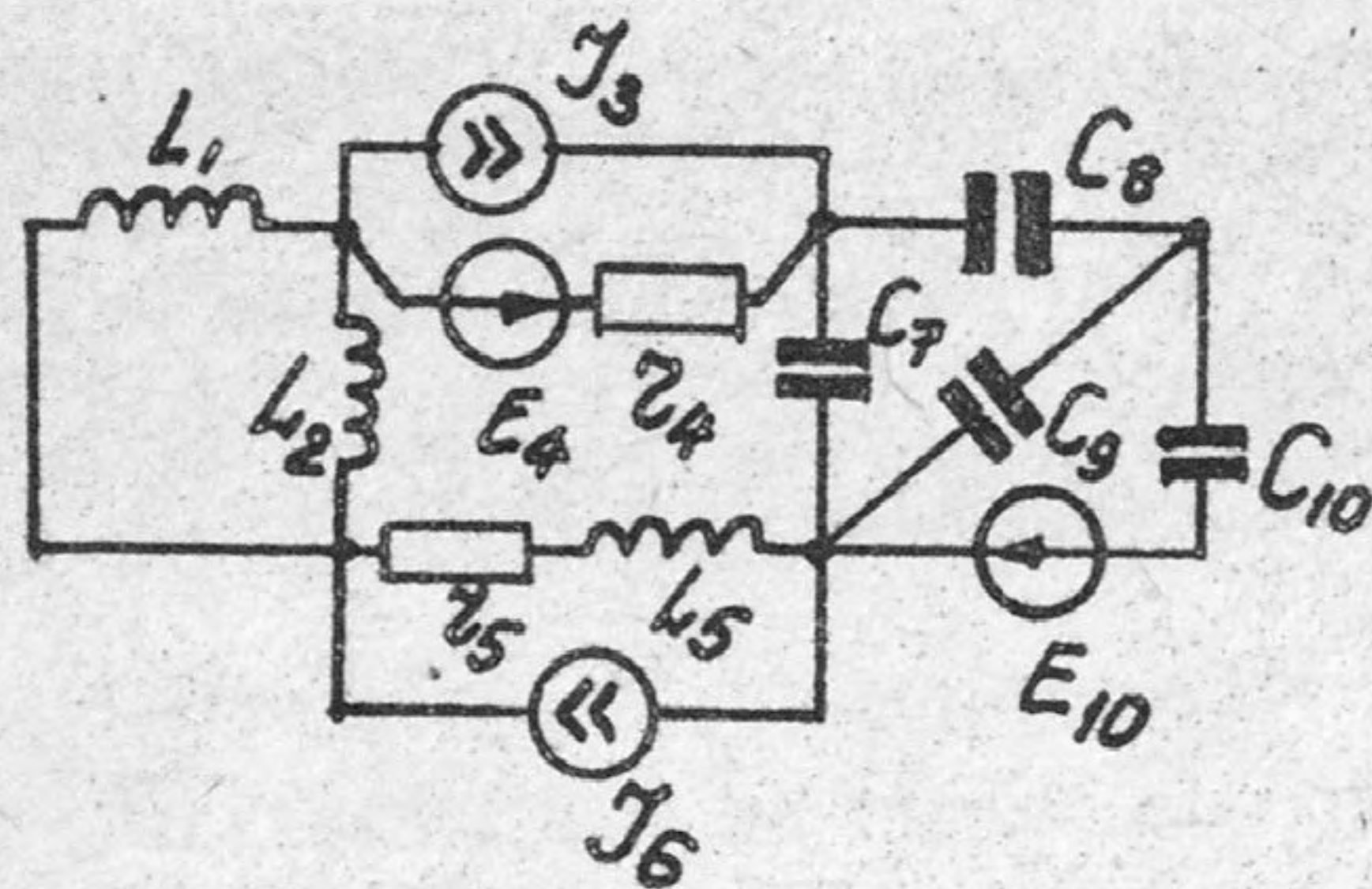


Рис. 68

Общее число переменных состояний

$$n = r - \rho - q = 7 - 2 - 1 = 4.$$

В системе уравнений состояния:

- 1) уравнения системы должны быть независимыми;
- 2) в уравнения должны входить только переменные состояния, остальные характеристики следует выразить через переменные состояния.

Пример 4I. Составить дифференциальные уравнения состояния в канонической форме для схемы, изображенной на рис. 70; начальный ток в индуктивности равен i_{40} , а напряжение на конденсаторе u_{c0} .

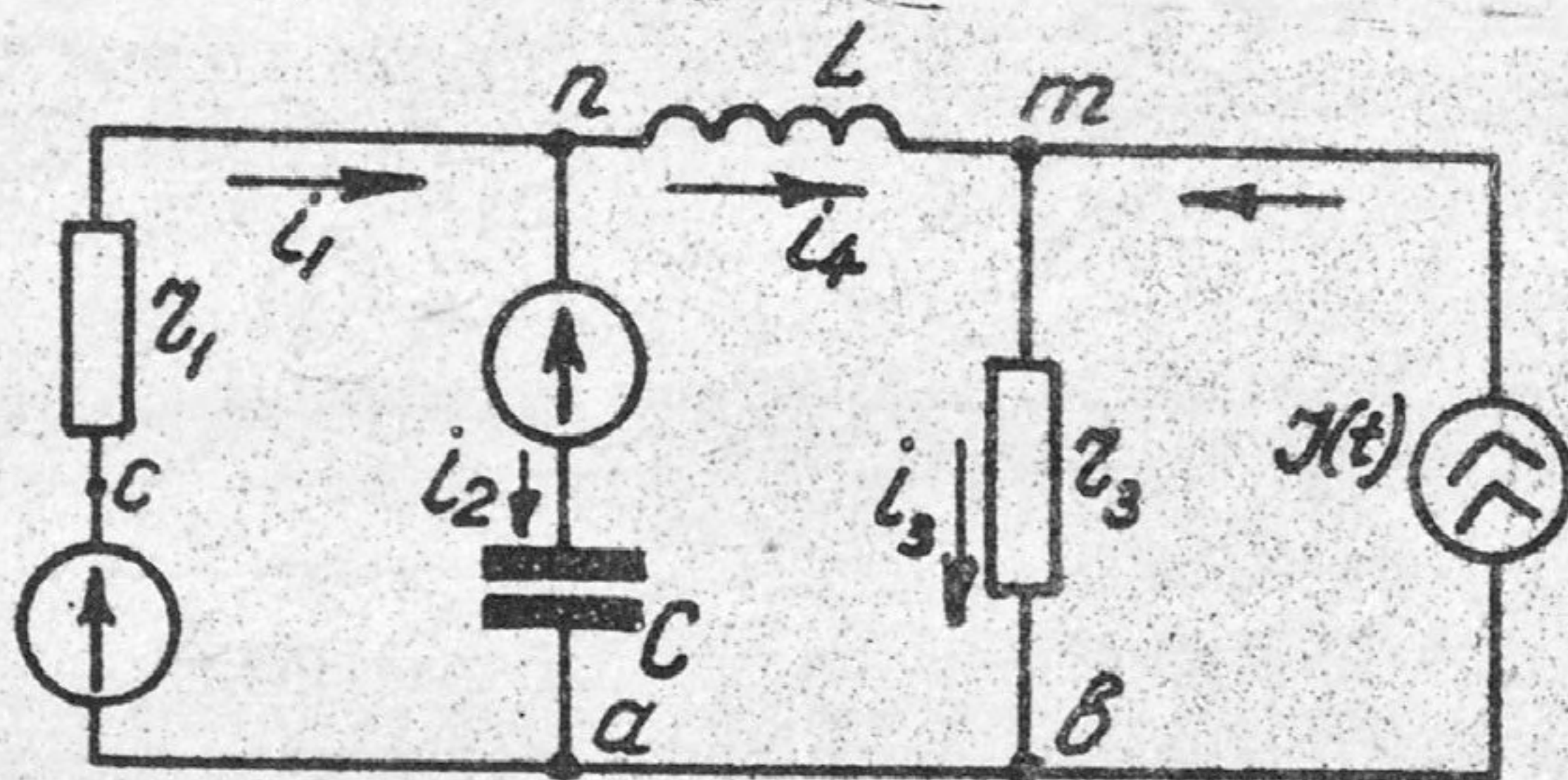


Рис. 70

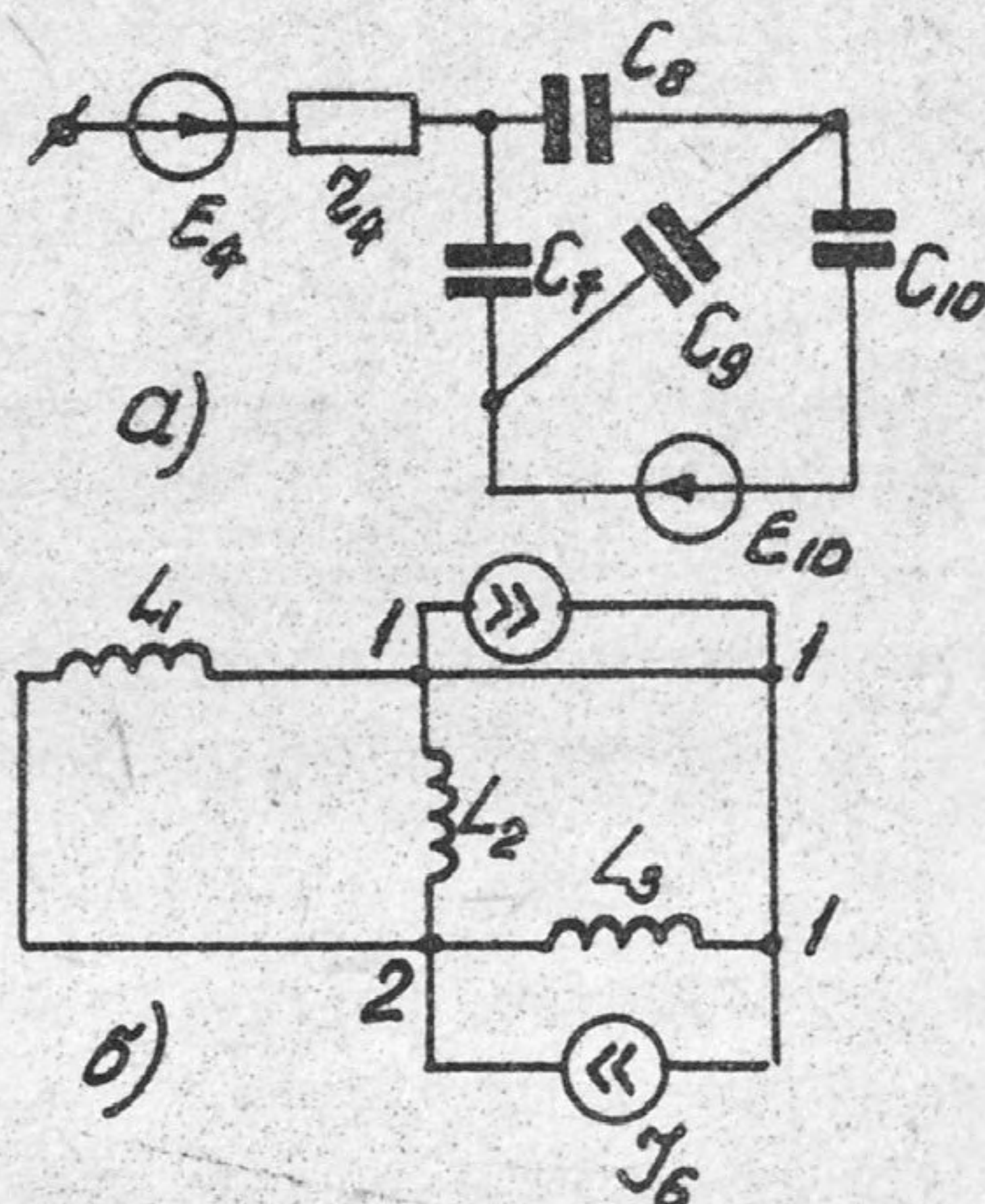


Рис. 69

Решение. В качестве переменных состояний выбираем ток в индуктивности i_4 и напряжение на конденсаторе u_c , т.е. в данной задаче у нас имеется две переменные состояния.

Первое уравнение составляем по контуру так, чтобы в него входили обе переменные состояния и, по возможности, меньше других переменных, которые в дальнейшем мы выразим через переменные состояния; таким контуром будет контур $nmban$:

$$e_2(t) = L \frac{di_4}{dt} + i_3 r_3 - u_c. \quad (I)$$

Ток i_3 нетрудно выразить через i_4 и $y(t)$, используя уравнение $i_3 = i_4 + y(t)$, составленное по первому закону Кирхгофа для узла m .

Решая уравнение (I) относительно $\frac{di_4}{dt}$, получаем

$$\frac{di_4}{dt} = -\frac{r_3}{L} i_4 + \frac{1}{L} u_c + \frac{1}{L} e_2(t) - \frac{r_3}{L} y(t). \quad (2)$$

Учитывая соотношение $i_2 = C \frac{du_c}{dt}$, второе каноническое уравнение составляем по I-му закону Кирхгофа для узла n :

$$i_2 = i_1 - i_4 \quad \text{или} \quad C \frac{du_c}{dt} = i_1 - i_4. \quad (3)$$

Чтобы исключить характеристику i_1 из уравнений, выразим его через ток i_2 и напряжение на конденсаторе.

Для контура $снас$ можно записать

$$e_1(t) - e_2(t) = i_1 r_1 + u_c; \quad (4)$$

подставляя значение тока i_1 в уравнение (3), получаем в окончательной форме

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{C} i_4 - \frac{1}{r_1 C} u_c + \frac{1}{r_1 C} e_1(t) - \frac{1}{r_1 C} e_2(t). \quad (5)$$

В матричной форме система уравнений (2), (5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{di_4}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_3}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{r_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_4 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{r_3}{L} \\ \frac{1}{r_1 C} & -\frac{1}{r_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t)$$

т.е.
$$\bar{A} = \begin{vmatrix} -\frac{r_3}{L}; & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C}; & -\frac{1}{r_1 C} \end{vmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{vmatrix} 0; & \frac{1}{L}; & -\frac{r_3}{L} \\ \frac{1}{r_1 C}; & -\frac{1}{r_1 C}; & 0 \end{vmatrix}$$

Это и есть искомое уравнение состояния.

При составлении канонических уравнений состояния для схем большей сложности используют специальные методы, основанные на топологическом анализе схем [9]. Решение уравнений состояния производится по формуле

$$\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}_0 + e^{\bar{A}t} \int_0^t e^{-\bar{A}\tau} \bar{B} \bar{u}(\tau) d\tau,$$

где $\bar{x}$ — начальные состояния системы.

При решении уравнения наиболее трудоемкой операцией является вычисление матричной функции $e^{-\bar{A}t}$, которая осуществляется с помощью интерполяционной формулы Кели-Гамильтона

$$e^{\bar{A}t} = \alpha_0(t) \bar{I} + \alpha_1(t) \bar{A} + \dots + \alpha_{n-1}(t) \bar{A}^{n-1},$$

где $\bar{I}$ — единичная диагональная матрица;

$\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ — функции, определяемые для различных корней характеристического уравнения из соотношений

$$e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_2 + \alpha_2(t) \lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t) \lambda_2^{n-1};$$

здесь λ_2 — корни характеристического уравнения вида

$$\Delta(\lambda) = \det(\bar{A} - \lambda \bar{I}) = 0.$$

Если среди корней характеристического уравнения кратные корни λ_e порядка m , то для этих корней формулы вычисления функций $\alpha_k(t)$ имеют вид

$$e^{\lambda_e t} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) \lambda_e^k,$$

$$t \cdot e^{\lambda_e t} = \sum_{k=1}^{m-1} (k-1) \alpha_k \lambda_e^{k-1} \quad \text{и т.д.}$$

Пример 42. Задана матрица $\bar{A} = \begin{vmatrix} -50 & -250 \\ 10 & -150 \end{vmatrix}$ опреде-

лить матрицу $e^{\bar{A}t}$.

Решение. Характеристическое уравнение для матрицы $\bar{A}$ имеет вид

$$\det(\bar{A} - \lambda \bar{I}) = \lambda^2 + 200\lambda + 10^4,$$

а его корни $\lambda_{1,2} = -100$.

Следовательно, в соответствии с формулой

$$e^{-100t} = \alpha_0(t) - 100\alpha_1(t), \quad t \cdot e^{-100t} = \alpha_1(t).$$

Решая относительно $\alpha_0(t)$, получаем

$$\alpha_0(t) = (1 + 100t)e^{-100t}$$

Следовательно, $e^{\bar{A}t} = \alpha_0(t) \bar{I} + \alpha_1(t) \bar{A} =$

$$= (1 + 100t)e^{-100t} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + te^{-100t} \begin{vmatrix} -50 & -250 \\ 10 & -150 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (1+50t)e^{-100t} & -250te^{-100t} \\ 10e^{-100t} & (1-50t)e^{-100t} \end{vmatrix}.$$

После определения переменных состояния нетрудно выразить через них отклики системы по ρ выходам. Общий вид решения в матричной форме определяется формулой

$$\bar{y}(t) = \bar{C} \bar{x}(t) + \bar{D} \cdot \bar{u}(t),$$

где $\bar{y}$ — матрица-столбец ($\rho \times 1$) откликов системы;

$\bar{C}$ — матрица коэффициентов ($\rho \times n$);

$\bar{D}$ — матрица коэффициентов ($\rho \times m$).

Пример 43. В примере 4I выразить токи i_1, i_3 и напряжение u_L через переменные состояния и параметры входных воздействий.

Решение. Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура $снас$, следует, что

$$i_1 = -\frac{1}{r_1} u_c + \frac{1}{r_1} e_1(t) - \frac{1}{r_1} e_2(t).$$

Для узла m можно записать

$$i_3 = i_4 + y(t),$$

а для контура $пмбан$

$$u_L = -i_4 r_3 + u_c + e_2(t) - y(t) r_3.$$

В матричной форме уравнения откликов имеют вид

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\tau} \\ 1 & 0 \\ -\tau_3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_4 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\tau_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

где

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\tau} \\ 1 & 0 \\ -\tau_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\tau_3 \end{bmatrix}$$

§ 5. Операторный метод расчета переходных процессов при произвольных воздействиях

Как уже было показано выше, расчет переходных процессов при произвольных воздействиях операторным методом принципиально не отличается от расчета цепей при постоянных или синусоидальных воздействиях.

В связи с этим рассмотрим пример только для случая импульсного воздействия.

Пример 44. Рассчитать ток i в схеме, изображенной на рис. 58, если к схеме приложено напряжение, меняющееся по закону рис. 61: $U_m = U_0$.

Решение. Импульсное воздействие на схему можно представить как сумму трех непрерывных воздействий, включаемых соответственно в моменты времени 0, t_1 и t_2 . Аналитическое выражение входного воздействия имеет вид

$$u(t) = \frac{U_0}{t_1} t \cdot 1(t) - \frac{U_0}{t_1} (t - t_1) 1(t - t_1) - U_0 1(t - t_2),$$

а его операторное изображение

$$U(p) = \frac{U_0}{t_1 p^2} - \frac{U_0}{t_1 p^2} e^{-pt_1} - \frac{U_0}{p} e^{-pt_2}$$

Изображение тока в неразветвленной части цепи

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{\tau_1 + \frac{\tau_2 p L}{\tau_2 + p L}} = \frac{U(p)(\tau_2 + p L)}{\tau_1 \tau_2 + p L(\tau_1 + \tau_2)},$$

а ток $I_2(p) = I_1(p) \frac{Z_3(p)}{Z_2(p) + Z_3(p)} =$

$$= \frac{U(p)(\tau_2 + p L)}{\tau_1 \tau_2 + p L(\tau_1 + \tau_2)} \cdot \frac{p L}{\tau_2 + p L} = \frac{U(p) \cdot p L}{\tau_1 \tau_2 + p L(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Далее, используя метод наложения, находим отклик от первой составляющей воздействия $\frac{U_0}{t_1} t \cdot 1(t)$, изображение которой

$$\frac{U_0}{t_1 p^2}; \quad I_{2(1)}(p) = \frac{U_0 p L}{t_1 p^2 [\tau_1 \tau_2 + p L(\tau_1 + \tau_2)]} = \frac{U_0}{t_1 (\tau_1 + \tau_2) p [\rho + \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}]}.$$

Оригинал функции получаем с помощью формулы разложения, если

$$I_{2(1)}(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}; \quad i_{2(1)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t};$$

имеем $F_1(p) = \frac{U_0}{t_1 (\tau_1 + \tau_2)}; \quad F_2(p) = p^2 + p \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)},$

$$F_2'(p) = 2p + \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)},$$

а корни полинома знаменателя

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)};$$

$$\begin{aligned} i_{2(1)}(t) &= \frac{\frac{U_0}{t_1 (\tau_1 + \tau_2)} 1(t)}{0 + \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}} + \frac{\frac{U_0}{t_1 (\tau_1 + \tau_2)} 1(t)}{2 \left[-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} \right] + \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} t} \\ &= \left(\frac{U_0 L}{t_1 \tau_1 \tau_2} - \frac{U_0 L}{t_1 \tau_1 \tau_2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} t} \right) 1(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что второе воздействие имеет тот же характер, что и первое, только включается с запаздыванием t_1 , можем записать

$$i_{2(2)}(t) = - \left[\frac{U_0 L}{t_1 \tau_1 \tau_2} - \frac{U_0 L}{t_1 \tau_1 \tau_2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} (t - t_1)} \right] 1(t - t_1).$$

Изображение для третьей составляющей имеет вид

$$I_{2(3)}(\rho) = - \frac{\frac{U_0}{\rho} e^{-\rho t_2} L\rho}{\tau_1 \tau_2 + \rho L(\tau_1 + \tau_2)} = - \frac{U_0}{(\tau_1 + \tau_2) \left[\rho + \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} \right]} e^{-\rho t_2} =$$

$$= -I'_{2(3)}(\rho) \cdot e^{-\rho t_2}$$

Оригинал для изображения $I'_{2(3)}(\rho)$ имеет вид

$$i'_{2(3)}(t) = \frac{U_0}{\tau_1 + \tau_2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} t}$$

Следовательно,

$$i_{2(3)}(t) = \frac{U_0}{\tau_1 + \tau_2} e^{-\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)} (t - t_2)} \cdot 1(t - t_2).$$

Окончательно решение имеет вид

$$i_2(t) = i_{2(1)} + i_{2(2)} + i_{2(3)} = \frac{U_0 L}{t, \tau_1 \tau_2} (1 - e^{-at}) 1(t) -$$

$$- \frac{U_0 L}{t, \tau_1 \tau_2} [1 - e^{-a(t-t_1)}] 1(t - t_1) - \frac{U_0}{\tau_1 + \tau_2} e^{-a(t-t_2)} 1(t - t_2),$$

где $a = \frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}$;

или по интервалам:

$$1) \quad 0 \leq t < t_1, \quad i(t) = \frac{U_0 t}{t, \tau_1 \tau_2} (1 - e^{-at});$$

$$2) \quad t_1 \leq t < t_2, \quad i(t) = \frac{U_0 t}{t, \tau_1 \tau_2} [e^{-a(t-t_1)} - e^{-at}];$$

$$3) \quad t > t_2, \quad i(t) = \frac{U_0 L}{t, \tau_1 \tau_2} [e^{-a(t-t_1)} - e^{-at}] - \frac{U_0}{\tau_1 + \tau_2} e^{-a(t-t_2)}.$$

§ 6. Расчет реакции системы на непрерывную последовательность импульсов

При расчетах реакции системы, на которую действует бесконечная последовательность одинаковых импульсов, наиболее широкое распространение получили метод припасовывания и операторный метод с использованием решетчатых функций и $\mathcal{D}$ -

преобразования Лапласа [3]. Рассмотрим оба этих метода на конкретных примерах.

а) Метод припасовывания дает возможность задачу по расчету переходных процессов решать классическим способом. Неизвестными в этом случае являются как начальные условия, так и постоянные интегрирования, а число неизвестных возрастает вдвое.

Дополнительные уравнения составляются из условия стыковки участков. Токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах, полученные для конца n -го интервала, являются начальными условиями для $(n+1)$ -го интервала, при этом в силу того, что процесс в схеме считается установившемся, т.е. законы изменения характеристик на n -м интервале и на $(n+1)$ -м интервале совпадают, можно записать соотношения вида

$$i_n(0_+) = i_{n+1}(0_+); \quad u_n(0_+) = u_{n+1}(0_+).$$

Эти соотношения являются справедливыми для любых характеристик вне зависимости от того, изменяются или не изменяются они в момент появления очередного импульса.

Пример 45. Рассчитать закон изменения напряжения на конденсаторе для схемы (рис. 53), если на нее действует последовательность импульсов вида (рис. 47).

Решение. Напряжение на конденсаторе меняется по закону

$$u_c(t) = u_{cnp}(t) + u_{cсв}(t);$$

u_{cnp} определяется методами расчета установившихся режимов:

$$U_{cnp} = \frac{E \frac{\tau_2 (-j \frac{1}{\omega C})}{\tau_2 - j \frac{1}{\omega C}}}{\tau_1 + \frac{\tau_2 (-j \frac{1}{\omega C})}{\tau_2 - j \frac{1}{\omega C}}} = \frac{-j E \tau_2 \frac{1}{\omega C}}{\tau_1 \tau_2 - j(\tau_1 + \tau_2) \frac{1}{\omega C}},$$

$$u_{cnp}(t) = E_m \frac{\tau_2 \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{\tau_1^2 \tau_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 (\tau_1 + \tau_2)^2}} \sin(\omega t - 90^\circ + \alpha) =$$

$$= E_m \kappa \sin(\omega t - 90^\circ + \alpha),$$

$$\text{где } \alpha = \arctg\left(-\frac{\tau_1 \tau_2}{\omega C \tau_1 \tau_2}\right); \quad \kappa = \frac{\tau_2 \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{\tau_1^2 \tau_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 (\tau_1 + \tau_2)^2}};$$

$$u_{ссв}(t) = A \cdot e^{\rho t}, \quad \text{где } \rho = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 C};$$

$$u_c(t) = E_m \kappa \sin(\omega t - 90^\circ + \alpha) + A \cdot e^{\rho t}$$

Пусть в момент начала действия импульса напряжение на конденсаторе равно u_{co} , тогда

$$u_{co} = E_m \kappa \sin(\alpha - 90^\circ) + A, \quad \text{откуда}$$

$$A = u_{co} - E_m \kappa \sin(\alpha - 90^\circ).$$

Следовательно, решение имеет вид

$$u_c(t) = E_m \kappa \sin(\omega t - 90^\circ + \alpha) + [u_{co} - E_m \kappa \sin(\alpha - 90^\circ)] e^{\rho t},$$

а напряжение в момент окончания импульса

$$u_c(\frac{T}{2}) = E_m \kappa \sin(\omega \frac{T}{2} - \frac{\pi}{2} + \alpha) + [u_{co} - E_m \kappa \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})] e^{\rho \frac{T}{2}}.$$

Это напряжение является начальным для следующего импульса и, значит, как и напряжение предшествующего импульса, равно u_{co} . Получаем дополнительное соотношение, позволяющее определить u_{co} ; учитывая, что $\omega \frac{T}{2} = \pi$, получим

$$u_{co} = E_m \kappa \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + u_{co} \cdot e^{\rho \frac{T}{2}} + E_m \kappa \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) e^{\rho \frac{T}{2}} \quad \text{или}$$

$$u_{co}(1 - e^{\rho \frac{T}{2}}) = E_m \kappa \cos \alpha (1 + e^{\rho \frac{T}{2}}),$$

$$u_{co} = E_m \kappa \cos \alpha \frac{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}}{1 - e^{\rho \frac{T}{2}}}.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$u_c(t) = E_m \kappa [\sin(\omega t - \frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos \alpha (\frac{2}{1 - e^{\rho \pi/2}}) \cdot e^{\rho t}].$$

Пример 46. Рассчитать закон изменения тока в индуктивности, если на схему (рис. 62) действует последовательность импульсов, изображенная на рис. 71.

Решение. Пусть в начале n -го периода ток в индуктивности равен $i_L(0)$, тогда, решая задачу для первой половины интервала, запишем $i_L(t) = i_{np} + A e^{\rho t}$, где $\rho = -\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}$. Принужденная составляющая тока равна $\frac{E}{\tau_1}$. Следовательно, $A = i_L(0) - \frac{E}{\tau_1}$ и ток на первом участке меняется по закону

$$i_L(t) = \frac{E}{\tau_1} + [i_L(0) - \frac{E}{\tau_1}] e^{\rho t},$$

а к моменту окончания действия импульса

$$i_L(\frac{T}{2}) = \frac{E}{\tau_1} + [i_L(0) - \frac{E}{\tau_1}] e^{\rho \frac{T}{2}}.$$

В этой формуле неизвестным остается ток $i_L(0)$.

Проведем решение для второй части периода (время паузы), в качестве начальных условий используем значение тока

$$i_L(\frac{T}{2}) = i_L'(0).$$

Решение в общем виде запишется

$$i_L'(t') = i_{np}' + B e^{\rho t'}$$

где $t' = t - \frac{T}{2}$; $t' = 0$ — момент начала паузы.

Корень характеристического уравнения, как и в первом случае, имеет вид $\rho = -\frac{\tau_1 \tau_2}{L(\tau_1 + \tau_2)}$, а принужденная составляющая равна 0; таким образом,

$$i_L'(t') = i_L'(0) \cdot e^{\rho t'} = [\frac{E}{\tau_1} + (i_L(0) - \frac{E}{\tau_1}) e^{\rho \frac{T}{2}}] e^{\rho t'}.$$

К концу паузы ток в индуктивности $i_L'(\frac{T}{2})$ достигнет такого значения, которое будет начальным значением для $(n+1)$ -го периода. Предполагая, что в схеме имеет место установившийся процесс, будем считать $i_{Ln}(0) = i_{Ln+1}(0)$; следовательно, можем записать

$$i_L'(\frac{T}{2}) = i_{Ln}(0) = i_{Ln+1}(0) \quad \text{или}$$

$$[\frac{E}{\tau_1} + (i_L(0) - \frac{E}{\tau_1}) e^{\rho \frac{T}{2}}] e^{\rho \frac{T}{2}} = i_L(0); \quad \text{решая}$$

последнее уравнение относительно $i_L(0)$, получаем

$$i_L(0) = \frac{E}{\tau_1} \frac{e^{\rho \pi/2}}{1 + e^{\rho \pi/2}},$$

а общий вид решения для первой части периода

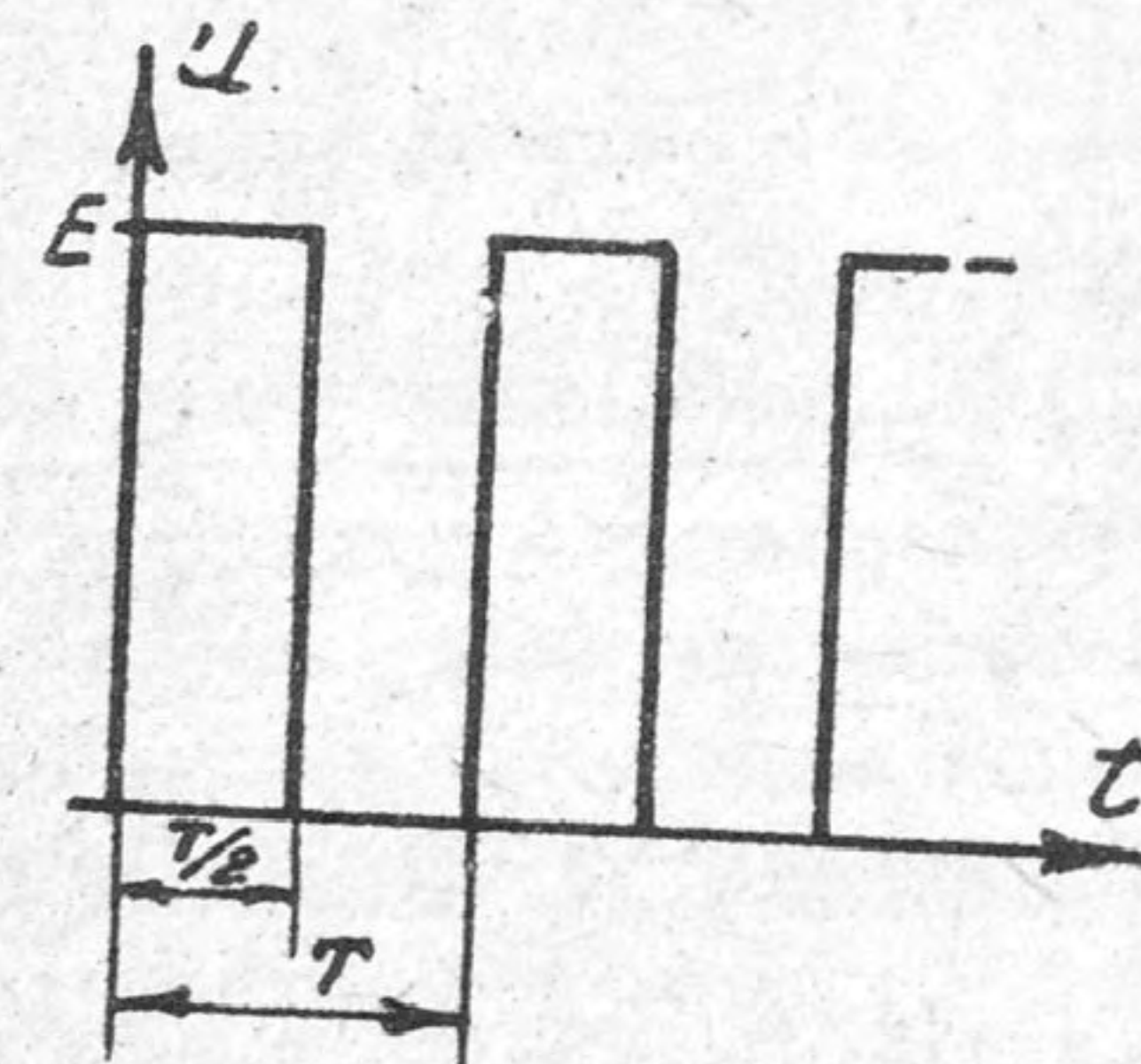


Рис. 71

$$i_L(t) = \frac{E}{\tau_1} \frac{1 + e^{\rho \frac{T}{2}} - e^{\rho t}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}},$$

и для второй

$$i_L'(t) = \frac{E}{\tau_1} \frac{e^{\rho t}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}} - \frac{E}{\tau_1} \frac{e^{\rho(t - \frac{T}{2})}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}}.$$

б) Использование решетчатых функций. Когда требуется рассчитать переходный процесс в цепях, в которых действует последовательность импульсов, включенных в момент времени $t = 0$, и установившийся режим еще не существует из-за малости n , то задача решается в общем виде с использованием решетчатых функций и дискретного преобразования Лапласа [8]. Пусть в задаче предыдущего примера включение источника произошло в момент $t = 0$ и нас интересует закономерность изменения тока индуктивности в n -м интервале.

Предположим, что начальное значение тока для n -го периода равно $i_L(n)$, тогда, решая задачу классическим образом, получим значение тока для конца периода (в нашем примере это решение уже получено), являющееся начальным для $(n+1)$ -го периода:

$$i_L(n+1) = \left[\frac{E}{\tau_1} + (i_L(n) - \frac{E}{\tau_1}) e^{\rho \frac{T}{2}} \right] e^{\rho \frac{T}{2}}$$

или, обозначая $\frac{E}{\tau_1} = A$, $e^{\rho \frac{T}{2}} = a$ получим

$$i_L(n+1) = [A + (i_L(n) - A)a]a.$$

Используя дискретное преобразование Лапласа вида $F^*(q) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q n T} f(n)$, получаем изображение $F^*(q)$; в нашем случае лучше воспользоваться таблицами оригиналов и изображений [8].

Если $i_L(n) = F^*(q)$, то

$$i_L(n+1) = F^*(q) \cdot e^q - e^q \cdot i_L(0),$$

изображение постоянной

$$A(a - a^2) = A(a - a^2) \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Для нашего примера, учитывая $i_L(0) = 0$, можно записать

$$e^q F^*(q) = A(a - a^2) \frac{e^q}{e^q - 1} + F^*(q) \cdot a^2.$$

Решая относительно $F^*(q)$, получаем

$$F^*(q) = \frac{A(a - a^2) e^q}{(e^q - 1)(e^q - a^2)}.$$

Для нахождения оригинала решения можно воспользоваться таблицами оригиналов и изображений, либо формулой разложения

$$f(n) = \sum \text{Res} [F(z) \cdot z^{n-1}].$$

Для нашего примера $z = e^q$, следовательно,

$$i_L(n) = \sum \text{Res} \left[\frac{A(a - a^2) \cdot z \cdot z^{n-1}}{(z - 1)(z - a^2)} \right];$$

у нашей функции два полюса $z = 1$, $z = a^2$. Таким образом, решение имеет вид

$$i_L(n) = A(a - a^2) \left(\frac{1}{1 - a^2} + \frac{a^{2n}}{a^2 - 1} \right) = \frac{Aa(1 - a)(1 - a^{2n})}{1 - a^2} = \frac{Aa(1 - a^{2n})}{1 + a}$$

или, подставляя A и a , получаем

$$i_L(n) = \frac{E}{\tau_1} e^{\rho \frac{T}{2}} \frac{1 - e^{\rho n T}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}}.$$

Решение задачи для n -го участка приобретает вид

$$i(t) = \frac{E}{\tau_1} \left(1 + e^{\rho \frac{T}{2}} \cdot \frac{1 - e^{\rho n T}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}} \cdot e^{\rho t} - e^{\rho t} \right) \quad 0 \leq t < \frac{T}{2},$$

$$i(t) = \frac{E}{\tau_1} \frac{1 - e^{\rho T(n+1)}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}} \cdot e^{\rho(t - \frac{T}{2})} \quad \frac{T}{2} \leq t < T;$$

в данном примере $t = 0$ соответствует началу импульса. При $n \rightarrow \infty$ эти формулы в связи с тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\rho n T} = 0$,

переходят в ранее полученные формулы установившегося режима (пример 46).

Пример 47. На схему рис. 52 действует последовательность импульсов (рис. 72). Определить закон изменения напряжения на конденсаторе в n -м интервале.

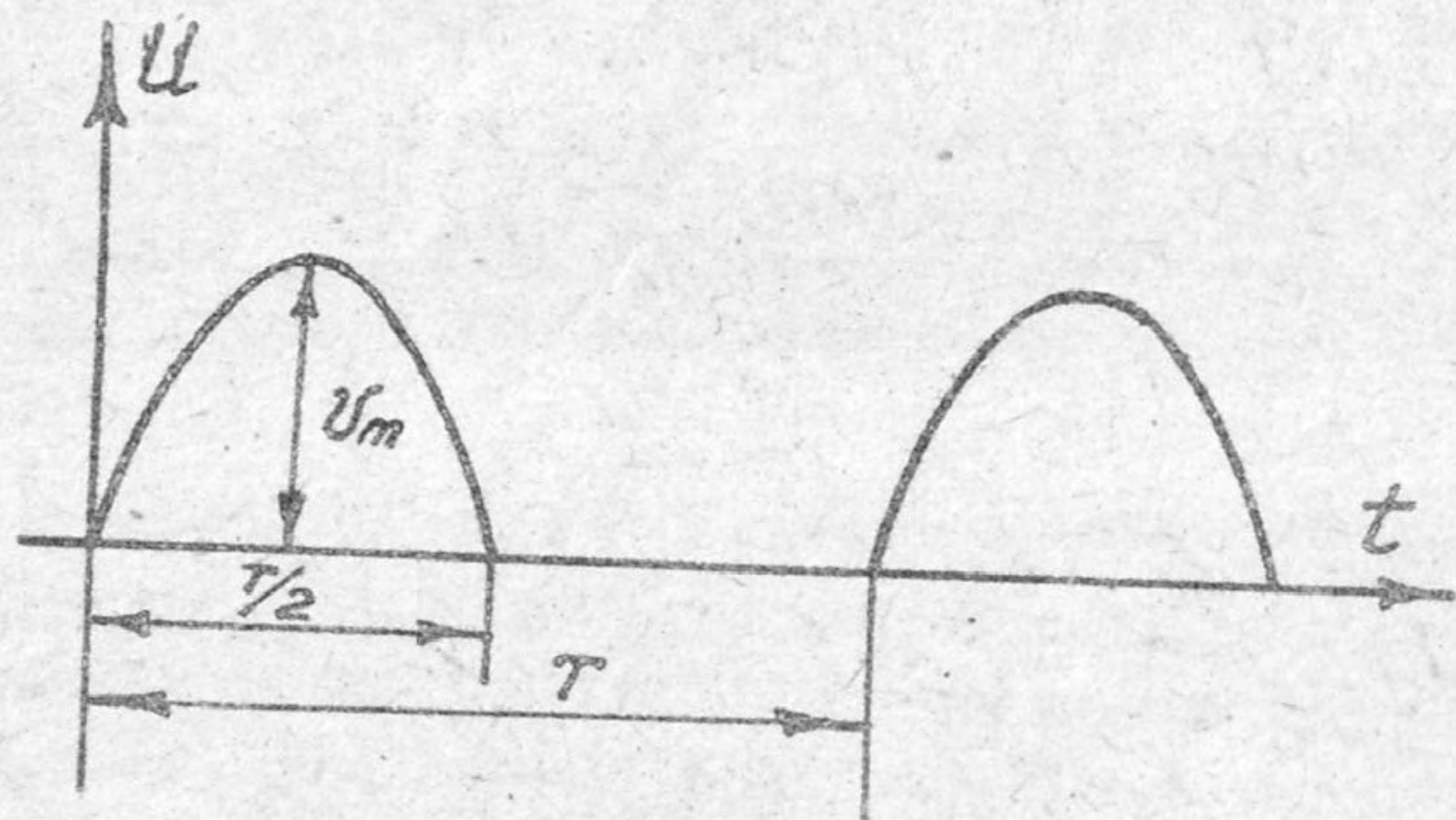


Рис. 72

Решение. Предположим, что начальное значение напряжения на конденсаторе для n -го периода равно $u_c(n)$; тогда, решая задачу для первой половины и периода, получим ($t = 0$ в момент начала n -го периода)

$$u_c(t) = u_{снр} + u_{св} = \frac{U_m \omega C}{\sqrt{\tau^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + A e^{-\frac{t}{\tau c}}, \quad \text{где } \varphi = \arctg \frac{1}{\omega C \tau};$$

подставляя начальное значение $u_c(0) = u_c(n)$, находим A :

$$u_c(n) = \frac{U_m \omega C}{\sqrt{\tau^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) + A,$$

откуда $A = u_c(n) + B$,
здесь

$$B = \frac{U_m \omega C}{\sqrt{\tau^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \cos \varphi.$$

В окончательной форме при $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$

$$u_c(t) = \frac{U_m \omega C}{\sqrt{\tau^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + [u_c(n) + B] \cdot e^{-\frac{t}{\tau c}};$$

в конце полупериода

$$u_c(\frac{T}{2}) = \frac{U_m \omega C}{\sqrt{\tau^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\pi + \varphi - \frac{\pi}{2}) + [u_c(n) + B] \cdot e^{-\frac{\pi}{\omega \tau c}} =$$

$$= B + B \cdot a + u_c(n) \cdot a,$$

$$\text{где } a = e^{-\frac{\pi}{\omega \tau c}}$$

Значение $u_c(\frac{T}{2})$ будет начальным для второй части полупериода, в которой будет происходить разряд конденсатора в соответствии с законом

$$u_c(t) = u_c(\frac{T}{2}) \cdot e^{-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau c}} \quad \text{при } \frac{T}{2} \leq t < T.$$

В конце периода $u_c(T) = u_c(\frac{T}{2}) \cdot e^{-\frac{\pi}{\omega \tau c}}$. Подставляя $u_c(\frac{T}{2})$ и учитывая, что $u_c(T)$ будет начальным условием для $n+1$ периода, получим

$$u_c(n+1) = [B + Ba + u_c(n) \cdot a] \cdot a =$$

$$= B(1+a) \cdot a + u_c(n) \cdot a^2;$$

переходя к изображениям, найдем

$$e^q [F^*(q) - u_c(0)] = Ba(1+a) \frac{e^q}{1 - e^q} + F^*(q) \cdot a^2.$$

В приведенном примере $u_c(0) = 0$, следовательно,

$$F^*(q) = \frac{B \cdot a(1+a) \cdot e^q}{(e^q - 1)(e^q \cdot a^2)};$$

переходя к оригиналам по формуле разложения, получим

$$u_c(n) = Ba(1+a) \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{a^{2n}}{a^2-1} \right) = \frac{Ba(1-a^{2n})}{1-a}.$$

Подставляя B и a , в окончательной форме будем иметь

$$u_c(n) = \frac{U_m \cos \varphi \omega C}{\sqrt{\tau^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} e^{-\frac{\pi}{\omega \tau c}} \frac{1 - e^{-\frac{2n\pi}{\omega \tau c}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega \tau c}}}.$$

Следовательно,

$$u_c(t) = D \left[\sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + \cos \varphi \left(1 + a \frac{1-a^{2n}}{1-a} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau c}} \right]$$

при $0 \leq t < \frac{T}{2}$,

$$u_c(t) = D \left[\cos \varphi + \cos \varphi \left(1 + a \frac{1-a^{2n}}{1-a} \right) \cdot a \right] \cdot e^{-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau c}}$$

при $\frac{T}{2} \leq t < T$,

где

$$D = \frac{U_m \frac{1}{\omega c}}{\sqrt{\tau^2 + \left(\frac{1}{\omega c} \right)^2}}$$

Л и т е р а т у р а

1. П.А.Ионкин. Теоретические основы электротехники. Т.І. - М.: Высшая школа, 1976.
2. А.Ф.Белецкий. Основы теории линейных электрических цепей. - М.: Связь, 1967.
3. А.Л.Бессонов. Линейные электрические цепи. - М.: Высшая школа, 1968.
4. Ф.Реза и С.Сили. Современный анализ электрических цепей. - М.: Энергия, 1964.
5. Л.Заде, Ч.Дезоер. Теория линейных цепей. - М.: Наука, 1970.
6. С.С.Николаев. Расчет переходных процессов в электрических цепях методом переменных состояний. - М.: изд. МВТУ, 1978.
7. Е.Н.Баранов, И.А.Рейнеке. Расчет переходных процессов в электрических цепях при произвольных воздействиях. - М.: изд. МВТУ, 1977.
8. Я.З.Цыкин. Теория импульсных систем. - М.: Физматгиз, 1958.
9. П.А.Ионкин. Основы инженерной электрофизики. Ч.П. - М.: Высшая школа, 1972.

$$u_c(t) = D \left[\sin(\omega t + \varphi - \frac{T}{2}) + \cos \varphi \left(1 + a \frac{1-a^{2n}}{1-a} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau c}} \right]$$

при $0 \leq t < \frac{T}{2}$,

$$u_c(t) = D \left[\cos \varphi + \cos \varphi \left(1 + a \frac{1-a^{2n}}{1-a} \right) \cdot a \right] \cdot e^{-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau c}}$$

при $\frac{T}{2} \leq t < T$,

где

$$D = \frac{U_m \frac{1}{\omega c}}{\sqrt{\tau^2 + \left(\frac{1}{\omega c} \right)^2}}$$

Л и т е р а т у р а

1. П.А.Ионкин. Теоретические основы электротехники. Т.1. - М.: Высшая школа, 1976.
2. А.Ф.Белецкий. Основы теории линейных электрических цепей. - М.: Связь, 1967.
3. А.Л.Бессонов. Линейные электрические цепи. - М.: Высшая школа, 1968.
4. Ф.Реза и С.Сили. Современный анализ электрических цепей. - М.: Энергия, 1964.
5. Л.Заде, Ч.Дезоер. Теория линейных цепей. - М.: Наука, 1970.
6. С.С.Николаев. Расчет переходных процессов в электрических цепях методом переменных состояний. - М.: изд. МВТУ, 1978.
7. Е.Н.Баранов, И.А.Рейнеке. Расчет переходных процессов в электрических цепях при произвольных воздействиях. - М.: изд. МВТУ, 1977.
8. Я.З.Цыкин. Теория импульсных систем. - М.: Физматгиз, 1958.
9. П.А.Ионкин. Основы инженерной электрофизики. Ч.П. - М.: Высшая школа, 1972.