ОСНОВАНІЙ АЛГЕБРЫ

ЛЕОНГАРДА ЕЙЛЕРА

ЧАСТИ ПЕРВОЙ

ПЕРВЫЯ ТРИ ОТДѢЛЕНІЯ,

переведенныя съ Французскаго языка на Россійской, со многими присовокупленіями,

ВАСИЛІЕМЪ ВИСКОВАТОВЫМЪ,
Академіи Наукъ Екстраординарнымъ Академикомъ.

ТОМЪ IIй,

содержащій въ себѣ

ОТДѢЛЕНІЕ IIIе.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
при Императорской Академіи Наукъ,
1812 года.

Печатано отъ Императорской Академіи Наукъ.

Николай Фуссъ,
Непремѣнный Секретарь.

ОСНОВАНІИ АЛГЕБРЫ

ПЕРВОЙ ЧАСТИ

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ

ОБЪ ОТНОШЕНІЯХЪ И ПРОПОРЦІЯХЪ

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ.

Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ.

ГЛАВА I.

Объ отношеніи ариѳметическомъ, или о разности двухъ чиселъ.

378.

Двѣ величины быть могутъ или равны, или не равны между собою. Въ послѣднемъ случаѣ, то есть когда одна изъ величинъ больше другой, неравенство оныхъ разсматривать можно подъ двумя различными видами; а именно: можно вопрошать, *на сколько* одна величина больше другой; или можно вопрошать *во сколько кратъ* одна величина больше другой. Слѣдствія, разрѣшающія сіи два вопроса называются *отношеніями*; и притомъ первое обыкновенно называется *отношеніе ариѳметическое*, а второе *отношеніе геометрическое*: сіи наименованія приняты произвольно, и съ самымъ свойствомъ предмета никакой связи не имѣютъ.

379.

Всякой удобно представить себѣ можетъ, что величины, о коихъ мы говоримъ, должны быть того же рода, потому что въ противномъ случаѣ ни о равенствѣ, ни о неравенствѣ оныхъ ничего сказать не можно. Напримѣръ, нелѣпо бы было вопрошать, что два фунта и три аршина суть равныя ли, или не равныя количества. И для сей причины во всемъ нижеслѣдующемъ слово настоять будетъ токмо о количествахъ одного и того же рода; и какъ оныя всегда изображены быть могутъ въ числахъ (56), то, такъ какъ мы уже въ самомъ началѣ сказали, мы говорить будемъ токмо о числахъ.

380.

И такъ когда вопрошается на сколько одно изъ двухъ данныхъ чиселъ больше дру-

(56) Изключая количества не соизмѣримыя, какъ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, и проч., кои числами только по приближенію изображены быть могутъ.

таго, то разрѣшеніе сего вопроса опредѣляетъ ариѳметическое отношеніе сихъ двухъ чиселъ. Но какъ сіе разрѣшеніе состоитъ въ назначеніи разности сихъ двухъ чиселъ, то слѣдуетъ изъ сего, что отношеніе ариѳметическое не иное что есть, какъ разность двухъ чиселъ. И какъ сіе слово *разность*, кажется намъ, есть приличнѣйшее выраженіе, нежели отношеніе ариѳметическое, то мы подъ словомъ *отношеніе* всегда разумѣть будемъ отношеніе геометрическое.

381.

Разность двухъ чиселъ, какъ извѣстно, опредѣлится вычитаніемъ меньшаго числа изъ большаго; и потому ничего нѣтъ легче, какъ разрѣшить вопросъ, на сколько одно число больше другаго. И такъ, когда въ случаѣ количествъ равныхъ, гдѣ разность ихъ ничто или нуль, вопрошается на сколько одно число больше другаго, то надлежитъ отвѣчать, ни на сколько. Напримѣръ поелику 6 = 2 . 3, то разность между 6 и 2 . 3 будетъ 0.

382.

Но когда два числа не равны между собою, какъ 5 и 3, и вопрошается на сколько 5 больше 3, то должно отвѣчать на 2, каковое число опредѣляется вычитаніемъ 3 изъ 5. Такъ же 15 больше 5 на 10, и 20 превозходитъ 8 числомъ 12.

383.

И такъ здѣсь предстоятъ разсматриванію нашему три вещи: 1) большее изъ двухъ чиселъ; 2) меньшее изъ двухъ чиселъ и 3) разность сихъ двухъ чиселъ. И сіи три количества такое имѣютъ между собою сопряженіе, что когда даны будутъ два изъ нихъ, то третіе всегда опредѣлить можно.

Пусть большее число $= a$, меньшее $= b$, разность $= d$: сія разность найдется, отнимая b отъ a, такъ что $d = a - b$. Откуда явствуетъ, какимъ образомъ, по даннымъ a и b опредѣлить d.

384.

Но когда дана разность и меньшее число или b, то можно опредѣлить большее число; и именно надлежитъ меньшее число сложить съ разностію; что даетъ $a = b + d$. Ибо когда изъ $b + d$ отнимется меньшее число b, то останется d, которое есть извѣстная разность. Пусть меньшее число $= 12$, разность $= 8$, будетъ большее число $= 20$.

385.

Наконецъ естьли дана разность d и большее число a, то другое число b найдется, отнимая разность отъ большаго числа, что даетъ $b = a - d$. Ибо когда отнимемъ $a - d$ отъ большаго числа a, то останется d, что есть данная разность.

386.

И такъ между сими тремя числами a, b, d имѣется такое сопряженіе, что изъ онаго опредѣляются три слѣдующія равенства 1) $d = a - b$; 2) $a = b + d$; 3) $b = a - d$; и естьли одно изъ сихъ сравненій справедливо, то по необходимости и два остальныя такъ же справедливы быть долженствуютъ. Слѣдовательно вообще, когда $z = x + y$, то по необходимости должно быть $y = z - x$ и $x = z - y$.

387.

Въ разсужденіи сихъ ариѳметическихъ отношеній надлежитъ примѣтить, что когда къ двумъ числамъ a и b приложится, по произволенію взятое число c, или отъ оныхъ отнимется сіе число c, то разность между произшедшими суммами или остатками будетъ та же самая d; то есть, что когда d есть разность между a и b, то самое же сіе число d будетъ такъ же разность и между $a+c$ и $a+c$, или между $a-c$ и $b-c$. Напримѣръ, разность чиселъ 20 и 12 есть 8; и оная останется та же самая, какое бы число къ симъ двумъ числамъ 20 и 12 приложено ни было, или какое бы число изъ оныхъ вычтено ни было.

388.

Доказательство сему очевидно; ибо когда $a-b=d$, то будетъ такъ же и $(a+c)-(b+c)=d$, и $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Когда числа a и b возмутся двукратно, то и разность сдѣлается такъ же въ два раза больше. Такъ, когда $a-b=d$, то будетъ $2a-2b=2d$, и вообще $na-nb=nd$, какое бы число вмѣсто n взято ни было.

ГЛАВА II.

О пропорціяхъ ариѳметическихъ.

390.

Когда два ариѳметическія отношенія равны между собою, то равенство сіе называется *пропорція ариѳметическая.*

И такъ когда $a - b = d$ и $p - q = d$, такъ что разность чиселъ a и b есть та же самая, что и чиселъ p и q, то говорится, что сіи четыре числа находятся въ пропорціи ариѳметической: оная пишется такъ: $a - b = p - q$, каковое выраженіе ясно представляетъ, что разность между a и b равна разности между p и q.

391.

И такъ пропорція ариѳметическая состоитъ изъ четырехъ членовъ, кои должны быть таковы, что когда второе вычтется изъ перваго, а четвертое изъ третьяго, то разносты были бы равныя. Посему слѣдующія четыре числа 12, 7, 9, 4 составляютъ пропорцiю ариөметическую, потому что $12-7=9-4$.

392.

Въ пропорцiи ариөметической, какъ $a-b=p-q$, можно перемѣнить мѣсто втораго и третьяго членовъ, то есть можно написать $a-p=b-q$, и равенство сiе не менѣе того будетъ справедливо. Ибо, поелику $a-b=p-q$, то приложивъ къ обѣимъ частямъ b, получимъ $a=b+p-q$; вычтемъ теперь изъ обѣихъ частей p, будетъ $a-p=b-q$.

И такъ, поелику $12-7=9-4$, то будетъ такъ же $12-9=7-4$.

393.

Равнымъ образомъ во всякой пропорцiи ариөметической поставить можно второй членъ вмѣсто перваго, перемѣнивъ въ то же время подобнымъ образомъ третей и четвертой члены: то есть, что когда $a-b=p-q$, то будетъ такъ же $b-a=q-p$. Ибо $b-a$ равно $a-b$ взятому отрицательно; и такъ же $q-p$ равно $p-q$ взятому отрицательно. Посему, поелику $12-7=9-4$, то такъ же будетъ $7-12=4-9$.

394.

Главнѣйшее свойство всякой пропорціи ариѳметической есть слѣдующее: сумма втораго и третьяго членовъ равна суммѣ перваго и четвертаго членовъ. Свойство сіе, которое весьма замѣтить должно, выражается такъ же слѣдующимъ образомъ: сумма *среднихъ* членовъ равна суммѣ *крайнихъ* членовъ. И такъ поелику $12 - 7 = 9 - 4$, будетъ $7 + 9 = 12 + 4$; и дѣйствительно та и другая сумма равна 16.

395.

Для доказательства сего главнаго свойства, пусть $a - b = p - q$; когда къ обѣимъ частямъ приложимъ $b + q$, то будетъ $a + q = b + p$, то есть сумма перваго и четвертаго членовъ равна суммѣ втораго и третьяго членовъ.

И обратно, естьли четыре числа a, b, p, q суть такого свойства, что сумма втораго и третьяго членовъ равна суммѣ перваго и четвертаго, то есть когда $b + p = a + q$, то сіи числа составятъ пропорцію ариѳметическую; то есть, будетъ $a - b = p - q$. Въ самомъ дѣлѣ, поелику $a + q = b + p$, то когда отъ обѣихъ частей отнимемъ $b + q$, мы получимъ $a - b = p - q$.

И такъ, поелику числа 18, 13, 15, 10 суть таковы, что сумма среднихъ членовъ $13 + 15 = 28$ равна суммѣ крайнихъ членовъ $18 + 10 = 28$, то можемъ безъ всякаго сомнѣнія заключить, что оныя составляютъ такъ же пропорцію ариѳметическую, и что слѣдственно $18 - 13 = 15 - 10$.

396.

Помощію сего свойства, о которомъ мы говоримъ, удобно разрѣшить слѣдующій вопросъ: по даннымъ тремъ первымъ членамъ пропорціи ариѳметической, сыскать четвертый?

Пусть будутъ a, b, p сіи три первые члены, и означимъ чрезъ q четвертый членъ, который опредѣлить надлежитъ. Мы будемъ имѣть $a + q = b + p$; вычтемъ теперь съ той и другой стороны a, получимъ $q = b + p - a$. И такъ четвертый членъ найдется, когда второй и третій вмѣстѣ сложатся и изъ суммы вычтется первый членъ. Положимъ, напримѣръ, что данные три первые членьі суть, 19, 28 и 13: сумма втораго и третьяго $=$ 41; изъ которой вычитая первой членъ 19, получимъ 22 для искомаго четвертаго члена, и ариөметическая пропорція изобразится чрезъ $19 - 28 = 13 - 22$, или чрезъ $28 - 19 = 22 - 13$, или еще чрезъ $28 - 22 = 19 - 13$.

397.

Ежели въ пропорціи ариөметической второй членъ равенъ третьему, то выдутъ только три числа; но свойство оныхъ будетъ таково, что первый членъ безъ втораго равенъ второму безъ третьяго, или, что все то же, разность между первымъ и вторымъ членами равна разности между вторымъ и третьимъ. Таковаго свойства суть числа 19, 15, 11; потому что $19 - 15 = 15 - 11$.

398.

Числа, каковы суть предъидущія, называются числами составляющими непрерывную ариөметическую пропорцію; таковая пропорція означается иногда знакомъ $\div$, такъ что пишется $\div$ 19. 15. 11. Сего рода пропорціи называются такъ же *прогрессіями* *ариѳметическими* (57), а особливо, когда въ оныхъ находится большое число членовъ, слѣдующихъ по тому же закону.

Прогрессія ариѳметическая быть можетъ или *возрастающая* или *убывающая.* Первыя суть тѣ, коихъ члены увеличиваются, то есть когда второй членъ превозходитъ первой, а третей на столько же превозходитъ второй, какъ напримѣръ числа: 4, 7, 10. Убывающая прогрессія есть та, въ которой члены непрестанно на то же количество убываютъ, какъ напримѣръ числа 9, 5, 1.

399.

Положимъ, что числа a, b, c суть въ прогрессіи ариѳметической; должно быть $a - b = b - c$; откуда слѣдуетъ, что по равенству суммы среднихъ и крайнихъ членовъ, $2b = a + c$; и когда съ обѣихъ сторонъ отнимемъ a, то выдетъ $c = 2b - a$.

400.

И такъ, когда два первые члена, a, b, прогрессіи ариѳметической даны, то третей

(57) Новѣйшіе Французскіе писатели называютъ сіи ряды *равнора нствующими* рядами, каковое наименованіе, кажется, весьма прилично.

найдется, отнимая первой изъ дважды взятаго втораго. Пусть 1 и 3 два первые члена прогрессіи ариөметической, третей будетъ $= 2 \cdot 3 - 1 = 5$. И сіи три числа 1, 3, 5 даютъ пропорцію $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

По тому же самому способу идти можно далѣе и продолжить прогрессію столь далече, какъ будешъ угодно: а именно, надлежитъ только искать четвертой членъ посредствомъ втораго и третьяго, такимъ же образомъ какъ нашли третей изъ перваго и втораго, и такъ далѣе. Пусть a первой членъ и b второй; третей будетъ $= 2b - a$, четвертой $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$, пятой $= 6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$, шестой $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$, седьмой $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$.

ГЛАВА III.

О прогрессіяхъ ариѳметическихъ.

402.

Мы сказали уже, что *прогрессіею ариѳметическою* называется рядъ чиселъ, состоящій изъ сколькихъ бы то ни было членовъ, кои непрестанно на то же количество возрастаютъ или убываютъ.

И такъ естественныя числа, по порядку написанныя, какъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, и проч. составляютъ прогрессію ариѳметическую, потому что оныя всегда прибавляются ся на единицу. Рядъ 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, и проч. есть таковая же прогрессія, потому что члены онаго постоянно на 3 убавляются (58).

403.

Число или количество, на которое члены ариѳметической прогрессіи прибавляются или

(58) Или (на языкѣ алгебраическомъ) постоянно на — 3 прибавляются.

убавляются, называется *разность* (59). И такъ когда даны первый членъ и разность, то можно продолжить прогрессію ариөметическую столь далече, какъ будетъ угодно. Пусть, напримѣръ, первой членъ $=2$, и разность $=3$; мы получимъ слѣдующую возрастающую ариөметическую прогрессію: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, и проч., гдѣ каждый членъ найдется, прикладывая разность къ первому. (60).

404.

Числа естественныя 1, 2, 3, 4, 5, и проч. обыкновенно пишутся надъ членами таковой ариөметической прогрессіи, дабы тотчасъ узнать можно было мѣсто, занимаемое какимъ бы тони было членомъ въ прогрессіи. Сіи числа, написанныя надъ членами, назвать можно показателями. И такъ предъидущій примѣръ написать надлежитъ слѣдующимъ образомъ:

---

(59) И такъ въ возрастающемъ равноразнствующемъ ряду, разность положительная, а въ убывающемъ отрицательная.

(60) Пусть, напримѣръ, первый членъ $=100$, а разность $=-5$, то произойдетъ убывающій равноразнствующій рядъ:
100, 95, 90, 85, 80, 75, 70, 65, 60, 55, 50, и пр.

Показатели: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, и пр.
Прог. ариѳм. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, и пр.

405.

Пусть a первой членъ и d разность; члены прогрессїи ариѳметической будутъ идти въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a; & a+d; & a+2d; & a+3d; & a+4d; & a+5d; & a+6d; \text{ и пр.}; \end{array}$$

откуда видно, что удобно найти можно какой бы то ни было членъ прогрессїи, не зная напередъ всѣхъ предъидущихъ членовъ, а единственно помощїю перваго члена a и разности d. Напримѣръ, десятый членъ будетъ $= a + 9d$; сотый членъ $= a + 99d$, и вообще какой бы то ни было членъ, соотвѣтствующїй показателю n, $= a + (n - 1)d$ (61).

(61) Сей какой нибудь членъ называется *общїй*. И такъ общїй членъ равноразнствующаго ряда $\div a . a + d . a + 2d \ldots$ есть $a + (n - 1)d$ и сїе равно справедливо, какъ для возрастающаго, такъ и для убывающаго ряда, съ тою только разностїю, что въ семъ послѣднемъ случаѣ разность d будетъ отрицательная. Сей членъ называется общимъ для того, что когда въ ономъ положимъ $n = 1, 2, 3, 4, 5$, и проч, то получимъ всѣ члены по порядку ряда равноразнствующаго.

406.

Естьли прогрессїю остановимъ на какомъ бы то ни было членѣ, то необходимо нужно принимать въ разсужденїе первый и послѣднїй члены, и показатель послѣдняго означитъ число членовъ. Ежели первой членъ $= a$, разность $= d$ и число членовъ $= n$, то послѣднїй членъ будетъ $a + (n - 1)d$; слѣдовательно, оный найдется, когда разность умножится на число членовъ безъ одного и къ произведенїю приложится первый членъ.

Пусть будетъ, напримѣръ, ариѳметическая прогрессїя состоящая изъ ста членовъ, изъ коихъ первый $= 4$, и пусть разность $= 3$; послѣднїй членъ будетъ $= 99 \cdot 3 + 4 = 301$.

407.

Когда извѣстенъ первый членъ a, послѣднїй z и число членовъ $= n$, то можно найти разность d. Ибо, поелику послѣднїй членъ $z = a + (n - 1)d$, то отнимая съ той и другой стороны a, получимъ $z - a = (n - 1)d$. И такъ, когда первый членъ отнимется отъ послѣдняго, то получится произведенїе изъ разности умноженной на число членовъ безъ одного. Почему надлежитъ только

$z - a$ раздѣлить на $n - 1$, дабы получить искомую величину разности d, которая будетъ $= \frac{z - a}{n - 1}$. Откуда произходитъ слѣдующее правило: вычти первый членъ изъ послѣдняго и остатокъ раздѣли на число членовъ безъ одного, то частное будетъ разность: и сыскавъ сію разность можно написать всю прогрессію (62).

408.

Пусть будетъ, напримѣръ, въ прогрессіи ариѳметической число членовъ $= 9$, первой членъ ея $= 2$ и послѣдній $= 26$; и требуется опредѣлить разность. И такъ надлежитъ вычесть первой членъ 2 изъ послѣдняго 26 и остатокъ 24 раздѣлить на $9 - 1$, то есть

---

(62) Въ семъ вопросѣ заключается вопросъ о найденіи между двумя данными количествами даннаго числа среднихъ ариѳметическихъ или равноразнствующихъ количествъ. Пусть a и b данныя количества, n число среднихъ, и слѣдственно $n + 2$ число всѣхъ членовъ; будетъ разность $= \frac{b - a}{n + 1}$, и слѣдственно произойдетъ слѣдующій равноразнствующій рядъ:

$$\div\ a.\ \frac{na + b}{n+1}.\ \frac{(n-1)a + 2b}{n+1}.\ \frac{(n-2)a + 3b}{n+1}.\ \frac{(n-3)a + 4b}{n+1}$$
$$+\ \frac{(n-4)a + 5b}{n+1}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ b.$$

на 8: частное 3 будетъ равно искомой разности, и цѣлая прогрессія будетъ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

Пусть еще будетъ первый членъ $= 1$, послѣдній $= 2$, число членовъ $= 10$, и требуется найти прогрессію ариѳметическую, соотвѣтствующую симъ предположеніямъ. Мы получимъ тотчасъ разность $= \frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; откуда заключимъ, что прогрессія есть слѣдующая:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Другой примѣръ. Пусть первый членъ $= 2\frac{1}{3}$, послѣдній $= 12\frac{1}{2}$, и число членовъ $= 7$; то будетъ разность $\frac{12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$, и слѣдственно искомая прогрессія есть сія:

1	2	3	4	5	6	7
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{11}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409.

Естьли данныя количества суть первый членъ a, послѣдній членъ z и разность d, то по онымъ найти можно число членовъ n. Ибо, поелику $z - a = (n-1)d$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на d, и получишь $\frac{z-a}{d} = n - 1$. Но какъ n превозходитъ $n - 1$ на 1, то будетъ $n = \frac{z-a}{d} + 1$. Слѣдовательно число членовъ найдется, раздѣляя разность между первымъ и послѣднимъ членами, или $z - a$, на разность прогрессіи и къ частному $\frac{z-a}{d}$ прибавляя 1 (63).

Пусть, напримѣръ, первый членъ $= 4$, послѣдній $= 100$, и разность $= 12$; будетъ число членовъ $= \frac{100-4}{12} + 1 = 9$, и искомые девять членовъ будутъ слѣдующіе:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Когда первый членъ $= 2$, послѣдній $= 6$ и разность $= 1\frac{1}{3}$, то число членовъ будетъ $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, и слѣдственно искомые четыре члена суть:

1	2	3	4
2.	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

---

(63) Или еще, поелику $\frac{z-a}{d} + 1 = \frac{z-a+d}{d}$ то число членовъ найдется, когда къ разности между первымъ и послѣднимъ членомъ приложится разность ряда и сумма раздѣлится на сію же разность.

Пусть еще первый членъ $= 3\frac{1}{3}$, послѣдній $= 7\frac{2}{3}$, и разность $= 1\frac{4}{9}$; будетъ число членовъ $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, каковые четыре члена суть слѣдующіе:

$$\overset{1}{3\tfrac{1}{3}},\ \overset{2}{4\tfrac{7}{9}},\ \overset{3}{6\tfrac{2}{9}},\ \overset{4}{7\tfrac{2}{3}}\ (64).$$

410.

Но надлежитъ замѣтить, что, поелику число членовъ всегда должно быть цѣлое число, то естьли бы въ предъидущихъ примѣрахъ нашлося для n не цѣлое число, то надлежало бы заключить, что вопросы нелѣпы.

И такъ когда для величины $\frac{z-a}{d}$ найдется не цѣлое число, то вопроса разрѣшить будетъ не можно; и слѣдовательно, дабы сего рода вопросы были возможные, надобно, чтобы $z - a$ дѣлилося на d на цѣло.

---

(64) Остается еще разрѣшить слѣдующій вопросъ: даны послѣдній членъ z, разность d и число членовъ n, сыскать первый членъ a. Поелику $z = a + (n-1)d$, то будетъ $a = z - (n-1)d$.

411.

Изъ сказаннаго нами теперь мы можемъ заключить, что во всякой ариѳметической прогрессіи надлежитъ принимать въ разсужденіе слѣдующія четыре количества:

I. Первый членъ a,

II. послѣдній членъ z,

III. разность d,

IV. число членовъ n.

И сіи количества такъ сопряжены между собою, что по данымъ тремъ изъ нихъ всегда опредѣлить можно четвертое. Ибо

I. Когда даны a, d и n; то будетъ $z = a + (n - 1)d$.

II. Естьли даны z, d и n; то будетъ $a = z - (n - 1)d$.

III. Когда извѣстны a, z и n; то будетъ $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

IV. Когда даны a, z и d; то будетъ $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

ГЛАВА VI.

О сысканіи суммы прогрессій ариѳметическихъ.

412.

Такъ же случается часто надобность брать сумму прогрессіи ариѳметической. Сумму сію найти можно, складывая всѣ члены вмѣстѣ; но какъ таковое сложеніе будетъ весьма длинно, когда прогрессія состоитъ изъ большаго числа членовъ, то Маѳематики придумали правило, помощію коего весьма удобно находить можно оную сумму.

413.

Мы во первыхъ разсмотримъ сего рода данную прогрессію, коея первый членъ $= 2$, разность $= 3$, послѣдній членъ $= 29$ и число членовъ $= 10$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Мы видимъ, что въ сей прогрессіи сумма перваго и послѣдняго членовъ $= 31$; сумма втораго и предпослѣдняго $= 31$; сумма третьяго и предшествующаго предпослѣднему $= 31$, и такъ далѣе; откуда заключимъ, что сумма какихъ ниесть двухъ членовъ, изъ коихъ одинъ столько же удаленъ отъ перваго, сколько другой отъ послѣдняго всегда равна суммѣ перваго и послѣдняго члена.

414.

Причина сего явственна. Въ самомъ дѣлѣ, естьли положимъ первый членъ $= a$, послѣднїй $= z$ и разность $= d$; то сумма перваго и послѣдняго членовъ будетъ $a + z$; но какъ второй членъ $= a + d$, а предпослѣднїй $= z - d$, то сумма сихъ двухъ членовъ такъ же $= a + z$. Потомъ третей членъ $= a + 2d$, а предшествующїй предпослѣднему $= z - 2d$; посему сумма сихъ двухъ членовъ опять $= a + z$. И то же самое докажется о всѣхъ прочихъ членахъ (65).

415.

И такъ, дабы опредѣлить сумму предложенной прогрессїи, напиши подъ оною ту же самую прогрессїю, взятую въ обратномъ по-

(65) И вообще пусть p членъ, соотвѣтствующїй показателю m, считая отъ a и q членъ, соотвѣтствующїй тому же показателю m, считая отъ z; будетъ $p = a + (m - 1)d$, $q = z - (m - 1)d$; слѣд. $p + q = a + z$.

рядкѣ и притомъ такъ, чтобы соотвѣтственные члены написаны были одни подъ другими, и потомъ сложи оные вмѣстѣ, какъ присемъ явствуетъ:

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ \underline{29+26+23+20+17+14+11+8+5+2} \\ 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Явно, что сей рядъ равныхъ членовъ въ двое больше суммы предложенной прогрессіи; но число сихъ равныхъ членовъ есть 10, такъ же какъ и число членовъ предложенной прогрессіи; и слѣдовательно сумма ихъ $= 10.31 = 310$. И такъ, поелику сія сумма въ два раза больше суммы предложенной прогрессіи ариѳметической, то сія искомая сумма должна быть $= 155$. (66).

---

(66) И вообще пусть будетъ какой нибудь равноразнствующій рядъ: $a, b, c. \ldots . x, y, z$, сумма онаго $= s$ и число членовъ $= n$. И такъ

$$\begin{array}{l} s = a + b + c. \ldots . + x + y + z \\ \underline{s = z + y + x. \ldots . + c + b + a} \\ 2s = (a+z) + (b+y) + (c+x) .. + (c+x) + (b+y) + (a+z). \end{array}$$

Но $a + z = b + y = c + x =$ и проч.; слѣд. $2s = n(a + z)$, и $s = \frac{n}{2}(a + z)$.

416.

Ежели поступимъ такимъ же образомъ съ какою бы то ни было прогрессіею ариѳметическою, коея первой членъ $= a$, послѣдній $= z$ и число членовъ $= n$; то написавъ подъ данною прогрессіею ту же самую прогрессію, но только на оборотъ, и сложивъ соотвѣтственные члены получимъ рядъ, состоящій изъ n членовъ, изъ коихъ каждый будетъ $= a + z$; слѣдовательно сумма сего ряда будетъ $= n(a + z)$; и какъ оный въ двое больше суммы предложенной прогрессіи ариѳметической, то будетъ сія сумма $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Отсюда произходитъ весьма простое правило для найденія суммы какой бы то ни было прогрессіи ариѳметической; а именно:

Умножь сумму перваго и послѣдняго членовъ на число членовъ, то половина сего произведенія изобразитъ сумму всей прогрессіи.

Сумма какого ниесть не опредѣленнаго числа членовъ предложеннаго ряда, называется *общая сумма* сего ряда.

Или, что все тоже, умножь сумму перваго и послѣдняго членовъ на половину числа членовъ.

Или еще, умножь половину суммы перваго и послѣдняго членовъ на цѣлое число членовъ.

Сіи два различные образа выражать правило, равно даютъ сумму прогрессіи.

418.

Правило сіе нужно пояснить нѣсколькими примѣрами.

Пусть будетъ во первыхъ прогрессія чиселъ естественныхъ, 1, 2, 3, и проч. до 100, и требуется найти ея сумму. По первому правилу будетъ сія сумма $= \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Вопрошается, сколько разъ колоколъ стѣнныхъ часовъ дѣлаетъ ударовъ въ продолженіе двѣнадцати часовъ? Надлежитъ сложить числа 1, 2, 3 до 12; но сія сумма найдется тотчасъ, и именно оная $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Естьли хочешь найти сумму той же прогрессіи, продолженной до 1000, то найдется оная $= 500500$; и сумма сей прогрессіи, продолженной до 10000, равна 50005000.

419.

Другой вопросъ. Нѣкто покупаетъ лошадь съ такимъ условiемъ, чтобы за первый подковный гвоздь заплатить 5 копѣекъ, за второй 8, за третей 11, и такимъ образомъ за каждый слѣдующiй гвоздь всегда 3мя копѣйками больше: лошадь имѣетъ 32 гвоздя, вопрошается сколько она стоитъ покупщику?

Явно, что здѣсь дѣло состоитъ въ сысканiи суммы прогрессiи ариѳметической, коея первый членъ 5, разность $= 3$, и сумма членовъ $= 32$. И такъ во первыхъ надлежитъ сыскать послѣднiй членъ: оный (по правилу член. 406 и. 411) найдется $= 5 + 31 . 3 = 98$.

Теперь удобно найдется и сумма, и именно оная $= \frac{103 . 32}{2} = 103 . 16$; изъ чего заключимъ, что лошадь стоитъ 1648 копѣекъ, или 16 рублей 48 копѣекъ.

420.

Да будетъ вообще первый членъ $= a$, разность $= d$ и число членовъ $= n$, и требуется, помощiю сихъ данныхъ найти сумму цѣлой прогрессiи.

Поелику послѣдній членЪ долженЪ быть $= a + (n - 1)d$, сумма перваго и послѣдняго членовЪ будетЪ $= 2na + \frac{n(n-1)d}{2}$ (67).

Когда сїю формулу приложимЪ кЪ предЪидущему примѣру, гдѣ $a = 5$, $d = 3$ и $n = 32$, то получимЪ $5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 5}{2} = 160 + 1488 = 1648$, та же самая сумма, которую прежде нашли.

421.

Естьли требуется сложить всѣ естественныя числа отЪ 1 до n, то для найденія сей суммы, будемЪ имѣть: первый членЪ $= 1$, послѣдній членЪ $= n$ и число членовЪ $= n$;

---

(67) ОзначимЪ чрезЪ z послѣдній членЪ и чрезЪ s сумму; будетЪ $z = a + (n - 1)d$, $s = (a + z)\frac{n}{2}$. Сїи два уравненїя заключаютЪ вЪ себѣ пять количествЪ, и когда даны будутЪ три изЪ нихЪ, то два остальные всегда найдены быть могутЪ, какЪ то увидимЪ вЪ четвертомЪ отдѣленїи сего сочиненїя. Поелйкуже число различныхЪ соединенїй пяти буквЪ взятыхЪ по двѣ $= \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$; то можно предложить десять различныхЪ вопросовЪ, кои мы и разрѣшимЪ вЪ упомянутомЪ отдѣленїи вЪ Главѣ VI.

слѣдовательно искомая сумма $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ежели положимъ $n = 1766$, то сумма всѣхъ чиселъ отъ 1 до 1766 будетъ $= 883 \cdot 1767 = 1560261$.

422.

Наконецъ пусть предложена будетъ прогрессія ариѳметическая чиселъ нечетныхъ 1, 3, 5, 7, и проч., продолженная до n членовъ, и вопрошается найти ея сумму.

Здѣсь первый членъ $= 1$, разность $= 2$, число членовъ $= n$; а потому послѣдній членъ будетъ $= 1 + (n-1)2 = 2n - 1$, и слѣдовательно искомая сумма $= n^2$.

И такъ все дѣло состоитъ въ умноженіи числа членовъ самаго на себя. Посему какое бы ни было число членовъ сей погрессіи, кои вмѣстѣ складываются, сумма всегда будетъ квадратъ, и именно квадратъ числа членовъ. Мы представимъ сіе слѣдующимъ образомъ:

Показатели:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и пр.
Прогрессія:	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. и пр.
Сумма:	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, и пр.

423.

Пусть теперь первый членъ $= 1$, разность $= 3$ и число членовъ $= n$; будетъ прогрессія 1, 4, 7, 10, и проч., коея послѣдній членъ будетъ $= 1 + (n - 1)3 = 3n - 2$; слѣдовательно сумма перваго и послѣдняго члена $= 3n - 1$, и слѣдовательно сумма сей прогрессіи $= \frac{n(3n - 1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$. Когда положимъ $n = 20$, то сумма будетъ $= 10 . 59 = 590$.

424.

Пусть еще первый членъ $= 1$, разность $= d$, и число членовъ $= n$: послѣдній членъ будетъ $= 1 + (n - 1)d$; къ коему приложа первый членъ, получимъ $2 + (n - 1)d$; и когда сію сумму умножимъ на число членовъ, то выдетъ $2n + n(n - 1)d$; откуда найдется сумма прогрессіи $= n + \frac{n(n - 1)d}{2}$.

Мы приложимъ здѣсь слѣдующую небольшую таблицу:

Когда $d = 1$, то сумма $= n + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

$d = 2$, — — $= n + \frac{2n(n - 1)}{2} = n^2$

$d = 3$ — — $= n + \frac{3n(n - 1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

когда $d = 4$ то сумма $= n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2n^2 - 2n$

$d = 5$ — — $= n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{2}$

$d = 6$ — — $= n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3n^2 - 2n$

$d = 7$ — — $= n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7n^2 - 5n}{2}$

$d = 8$ — — $= n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4n^2 - 3n$

$d = 9$ — — $= n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9n^2 - 7n}{2}$

$d = 10$ — — $= n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5n^2 - 4n$

и проч. и проч.

ГЛАВА V.

О числахъ фигурныхъ или многоугольныхъ.

425.

Взятїе суммы членовъ ариѳметическихъ прогрессїй, начинающихся отъ 1, и которыхъ разность есть или 1, или 2, или 3, или какое нибудь другое цѣлое число, ведетъ насъ къ ученїю о числахъ многоугольныхъ, кои произходятъ отъ сложенія нѣсколькихъ членовъ таковыхъ прогрессїй.

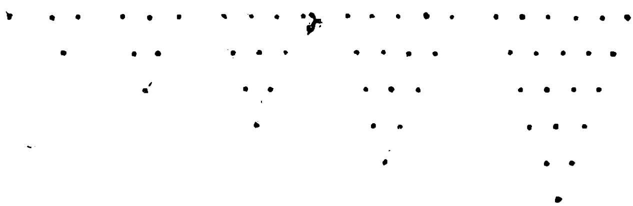
426.

Когда положится разность $= 1$; то, поелику первый членъ всегда долженъ быть 1, произойдетъ слѣдующая ариѳметическая прогрессїя: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, и проч. И ежели въ сей прогрессїи возмется одинъ членъ, потомъ сумма двухъ, трехъ, четырехъ и такъ далѣе членовъ, то составится слѣдующїй рядъ чиселъ:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, и проч.

Ибо $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, и такъ далѣе. Числа сїи называются *числа треугольныя*, по той причинѣ, что сколько оныя содержатъ единицъ, столько точекъ расположить можно въ треугольникѣ, какъ при семъ явствуетъ:

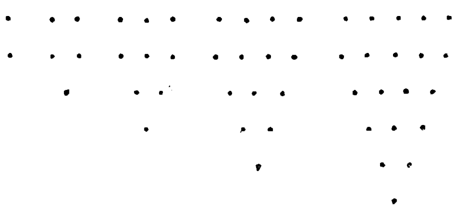
1 3 6 10 15 21



427.

Отсюда видно сколько сторона въ каждомъ изъ сихъ треугольниковъ содержитъ точекъ. Въ первомъ треугольникѣ оная содержитъ только одну точку; во второмъ двѣ; въ третьемъ три; въ четвертомъ четыре, и пр. И такъ числа треугольныя, или число точекъ (которое просто *треугольникомъ* называется), зависитъ отъ числа точекъ въ сторонѣ, которое просто *стороною* именуется. Такъ, напримѣръ, третіе треугольное число, или третей треугольникъ есть тотъ, у коего въ сторонѣ три точки; четвертый тотъ, у коего въ сторонѣ четыре точки, и такъ далѣе. И вотъ какимъ образомъ мы представимъ сіе свойство.

Сторона
Треугольникъ



428.

И такъ здѣсь представляется вопросъ, какъ по данной сторонѣ сыскать треугольникъ; и оный, послѣ изложеннаго нами, удобно разрѣшить можно.

Ибо пусть сторона $= n$, будетъ треугольникъ $1 + 2 + 2 + 4 + \ldots\ldots + n$. Но сумма сей прогрессіи $= \frac{n^2 + n}{2}$; слѣдовательно величина треугольника есть $\frac{n^2 + n}{2}$ (*).

Когда	$n = 1$,	то	треугольникъ	$= 1$,
—	$n = 2$,	—	—	$= 3$,
—	$n = 3$,	—	—	$= 6$,
—	$n = 4$,	—	—	$= 10$,

(*) Г. *Жонкуръ* издалъ въ 1762 году въ Гагѣ таблицу чиселъ треугольныхъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ естественнымъ числамъ отъ 1 до 20000. Сіи таблицы полезны быть могутъ къ облегченію многихъ ариѳметическихъ дѣйствій, какъ то авторъ показалъ въ весьма пространномъ предисловіи.

и такъ далѣе. Когда $n = 100$, то треугольникъ будетъ $= 5050$.

429.

Сія формула $\frac{n^2 + n}{2}$ называется общею формулою чиселъ треугольныхъ; потому что помощію оной опредѣляется треугольное число, или треугольникъ, соотвѣтствующій какой ниесть сторонѣ, означенной буквою n.

Сію формулу можно преобразить на слѣдующую, $\frac{n(n + 1)}{2}$, и сія послѣдняя удобнѣе для изчисленія, потому что всегда одно изъ чиселъ n, или $n + 1$ есть четное и слѣдственно дѣлящееся на 2.

Такъ, когда $n = 12$, то треугольникъ будетъ $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$; а когда $n = 15$, то треугольникъ будетъ $= \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$, и проч.

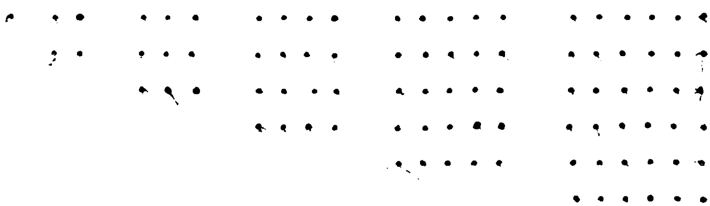
430.

Положимъ теперь разность $= 2$, получимъ слѣдующую ариѳметическую прогрессію: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, и пр.; и когда въ семъ ряду возмемъ одинъ членъ, потомъ сумму двухъ, сумму трехъ, сумму четырехъ членовъ и такъ далѣе, то составится слѣдующïй рядъ:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, и пр

Члены сего ряда называются числами *четыреугольными*, или лучше, *квадратными*; потому что дѣйствительно сей рядъ представляетъ квадраты чиселъ естественныхъ, кои мы нашли выше; и наименованïе сïе тѣмъ болѣе приличествуетъ симъ числамъ, что изъ числа точекъ означенныхъ оными членами всегда можно составить квадратъ, какъ при семъ явствуетъ:

1 4 9 16 25 36



431.

Отсюда видно, что сторона квадрата содержитъ точно столько точекъ, сколько квадратный корень содержитъ единицъ. Напримѣръ въ сторонѣ квадрата 25 находится пять точекъ; въ сторонѣ квадрата 36 содержится шесть точекъ; и слѣдовательно вообще, когда сторона n, то есть когда число членовъ прогрессіи 1, 3, 5, 7, и проч., которая была взята, означено чрезъ n; то видно, что квадратъ, или число четыреугольное будетъ равно суммѣ сихъ членовъ, или $= nn$, такъ какъ мы нашли въ членѣ 422.

Мы не остановимся болѣе на сихъ квадратныхъ числахъ, потому что довольно говорили объ оныхъ выше сего.

432.

Положимъ теперь разность $= 3$, и возмемъ суммы такимъ же образомъ, какъ прежде, мы получимъ числа, кои *пятиугольными* называются, хотя оныхъ точками столь же хорошо представить и не можно. (*) Числа сіи идутъ въ слѣдующемъ порядкѣ.

(*) Сіе несправедливо, чтобы многоугольниковъ, какое бы то ни было число сторонъ имѣющихъ, не можно было такъ же представить точками; но примѣченное мною для сего правило, которое я тотчасъ покажу, кажется, не было замѣчено, сколько мнѣ извѣстно, ни единымъ Алгебраикомъ.

Во первыхъ надлежитъ составить не большой правильной многоугольникъ, который бы имѣлъ то число сторонъ, какое требуется; ка-

Показатели:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	и пр.
Прог. ариѳм.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	и пр.
Пятиугольн.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	и пр.

гдѣ показатели означаютъ сторону каждаго многоугольника.

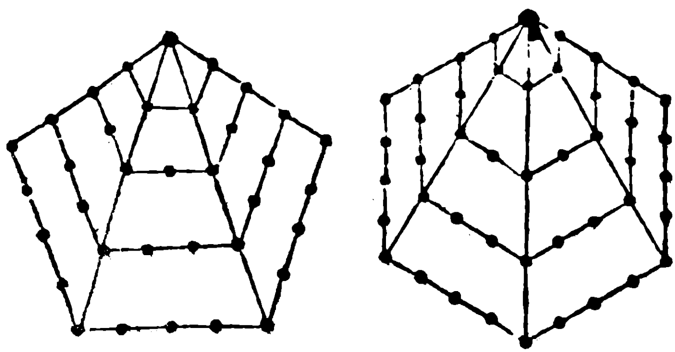
ковое число при одномъ и томъ же ряду чиселъ многоугольныхъ непремѣннымъ пребываетъ, и именно равно числу 2 сложенному съ разностію ариѳметической прогрессіи, отъ которой рядъ оный произходитъ; потомъ изъ вершины котораго нибудь изъ угловъ сего многоугольника надлежитъ протянуть столько діагоналей, сколько можно, и продолжить ихъ не определенно; и такъ же надобно продолжить двѣ стороны, содержащія оный уголъ; послѣ сего какъ стороны сіи, такъ и оныя діагонали надлежитъ взять столько кратъ, сколько будетъ угодно и отъ конца каждой части провести линіи параллельныя сторонамъ перваго многоугольника и раздѣлить ихъ на столько равныхъ частей, сколько оныхъ содержатъ соотвѣтствующія имъ діагонали и двѣ продолженныя стороны, и означить концы сихъ частей точками.

Правило сіе есть общее, начиная отъ треугольника до многоугольника, имѣющаго сколько бы то ни было сторонъ. Два слѣдующіе чертежа достаточны для изъясненія сего правила.

433.

Откуда слѣдуетъ, что когда положится сторона $= n$, то пятиугольное число будетъ $= \frac{3nn - n}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2}$.

Пусть, напримѣръ, $n = 7$, пятиугольникъ будетъ $= 70$. Естьли вопрошается пятиугольникъ, коего сторона 100, то положи $n = 100$, и будешь имѣть 14950 для искомаго числа.



Раздѣленіе сихъ многоугольниковъ на треугольники даетъ поводъ къ разнымъ любопытнымъ изслѣдованіямъ, и къ п еизряднымъ общимъ формуламъ; коими, какъ то явствуетъ изъ сей главы, изображаются числа многоугольныя; но я не считаю за нужное на семъ останавливаться.

434.

Когда положимЪ разность $=4$, то получимЪ числа *шестиугольныя*, какЪ явствуетЪ изЪ слѣдующихЪ прогрессій:

Показатели: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 7, 8, 9, и пр.
Прог. ариѳм. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, и пр.
Шестиуг. 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, и пр.,
гдѣ показатели опять означаютЪ сторону каждаго шестиугольника.

435.

И такЪ когда сторона n, то шестиугольное число будетЪ $2nn - n = n(2n - 1)$; впрочемЪ надлежитЪ примѣтить, что всѣ шестиугольныя числа суть вЪ то же время и треугольныя, потому что когда вЪ сихЪ послѣднихЪ возмешь только первое, третіе, пятое, и проч., то получишь точно рядЪ шестиугольниковЪ. (68).

---

(68) Ибо общее выраженіе какого бы то ни было треугольнаго числа есть $\frac{p(p+1)}{2}$; и сверхЪ того всякое нечетное число представить можно чрезЪ $2n - 1$ (чл. 422), посему, дабы вЪ ряду чиселЪ треугольныхЪ найти выраженіе какого нибудь члена нечетнаго порядка, надлежитЪ

436.

Такимъ же образомъ найдутся числа семиугольныя, восмиугольныя, девятиугольныя, и проч. Мы изложимъ здѣсь еще таблицу общихъ формулъ всѣхъ сихъ чиселъ, подъ общимъ наименованіемъ *чиселъ многоугольныхъ* извѣстныхъ.

Положимъ сторону $= n$; будетъ (69).

треугольникъ $= \frac{nn + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

квадратъ $= \frac{2nn + 0.n}{2} = n^2$,

V угольникъ $= \frac{3nn - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$,

VI угольникъ $= \frac{4nn - 2n}{2} = 2nn - n = n(2n-1)$,

VII угольникъ $= \frac{5nn - 3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$,

VIII угольникъ $= \frac{6nn - 4n}{2} = 3nn - 2n = n(3n-2)$,

IX угольникъ $= \frac{7nn - 5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$,

только поставить $2n - 1$ вмѣсто p; но тогда выдетъ $\frac{(2n-1)2n}{2} = 2n^2 - n$, что есть общая формула чиселъ шестиугольныхъ.

(69) Всѣ слѣдующія формулы получатся, когда въ общей формулѣ $n + \frac{n(n-1)d}{2}$ (чл. 424) вмѣсто d поставится показатель многоугольнаго числа уменьшенный на 2.

X угольникъ $= \frac{8nn - 6n}{2} = 4nn - 3n = n(4n-3)$,

XI угольникъ $= \frac{9nn - 7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$,

XII угольникъ $= \frac{10nn - 8n}{2} = 5nn - 4n = n(5n-4)$,

XX угольникъ $= \frac{18nn - 16n}{2} = 9nn - 8n = n(9n-8)$

XXV угольникъ $= \frac{23nn - 21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$,

m угольникъ $= \frac{(m-2)nn - (m-4)n}{2}$ (70).

---

(70) Изъ примѣчанїя г. *Бернулли* къ члену 432 удобно заключить, что многоугольныя числа могутъ быть представлены еще слѣдующимъ образомъ:

IV угольное число $= (1+2+3+\ldots\ldots+n) + (1+2+3+\ldots+n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$,

V угольное число $= (1+2+3+\ldots\ldots+n) + 2(1+2+3+\ldots+n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(n-1)}{2}$

VI угольное число $= (1+2+3+\ldots\ldots+n) + 3(1+2+3\ldots+n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3n(n-1)}{2}$

VII угольное число $= (1+2+3+\ldots\ldots+n) + 4(1+2+3+\ldots+n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n-1)}{2}$

437.

И такъ когда сторона n, то будетъ вообще m угольное число $= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$; откуда вывести можно всѣ возможныя многоугольныя числа, коихъ сторона n.

VIII угольное число $= (1+2+3+\ldots+n)$
$+5(1+2+3+\ldots+n-1)$
$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{5n(n-1)}{4}$

IX угольное число $= (1+2+3+\ldots+n)$
$+6(1+2+3+\ldots+n-1)$
$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{6n(n-1)}{2}$

X угольное число $= (1+2+3+\ldots+n)$
$+7(1+2+3+\ldots+n-1)$
$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{7n(n-1)}{2}$

XI угольное число $= (1+2+3+\ldots+n)$
$+8(1+2+3+\ldots+n-1)$
$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8n(n-1)}{2}$

. . . .
. . . .

m угольное число $= (1+2+3+\ldots+n)$
$+(m-3)(1+2+3+\ldots+(n-1)$
$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(m-3)n(n-1)}{2}$.

И удобно можно удостовѣриться, что сіи выраженія суть тожественны съ предъидущими.

Напримѣръ, естьли желаешь сыскать числа двуугольныя, то положи $m = 2$, и слѣдственно искомое число будетъ $= n$; то есть, что двуугольныя числа суть самыя естественныя числа 1, 2, 3, и проч.

Когда положимъ $m = 3$, то получимъ число треугольное $= \frac{n^2 + n}{2}$.

Когда сдѣлаемъ $m = 4$, то получимъ число квадратное $= n^2$, и проч.

438.

Для поясненія сего правила примѣрами, положимъ, что ищется XXV угольное число, коего сторона 36. Сыщи сперва изъ нашей таблицы XXV угольное число, коего сторона n; и найдется оное $= \frac{23n^2 - 21n}{2}$. Положивъ потомъ $n = 36$, найдется искомое число $= 14526$.

439.

Вопросъ. Нѣкто купилъ домъ, и когда вопрошенъ былъ, сколько заплатилъ за оный, то отвѣтствовалъ что 365 угольное число, коего сторона 12 равно числу рублей, заплаченныхъ за домъ.

Для найденія сего числа, сдѣлай $m = 465$ и $n = 12$, и поставь сіи величины въ общую формулу; то найдешь что цѣна дома есть 23970 рублей (71).

---

(71) Знаменитый нашъ авторъ, подъ именемъ *фигурныхъ* и *многоугольныхъ* чиселъ, разумѣетъ одно и то же; многіе другіе Алгебраики различаютъ сіи два наименованія: они называютъ *многоугольными числами* тѣ, кои произходятъ отъ сложенія членовъ какого нибудь равноразнствующаго ряда, коего первой членъ 1 и разность число цѣлое, и именуютъ *фигурными числами* тѣ, изъ коихъ рядъ первыхъ произходитъ отъ сложенія чиселъ естественныхъ, а каждой изъ прочихъ произходитъ отъ сложенія членовъ непосредственно предшествующаго ему ряда; еще иные Алгебраики называютъ сіи послѣднія числа, *числами соразположенными* (nombres ordinaux) (смотр. Traité élémentaire de l' analyse mathématique, par I. A. I. *Cousin*, Paris, 1797; page 7; такь же, Du Calcul des probabilités; par C. F. *de Bicquilley*, — Paris, 1805; pag. 15). Мнѣ кажется, что и дѣйствительно весьма прилично послѣдовать г. *Ейлеру* и называть *многоугольными* или *фигурными* числами тѣ, кои онъ подъ тѣмъ и другимъ изъ сихъ наименованій разумѣетъ, и называть *соразположенными* тѣ числа, кои симъ именемъ называютъ г. *Кузенъ* и *Бикилей*, тѣмъ болѣе, что между

сими послѣдними, однѣ токмо, такъ называемыя *треугольныя* и *треугольно-пирамидныя* приемлютъ, такъ сказать образъ геометрической, а прочія онаго совсемъ не приемлютъ, и что напротивъ того, первыя, всѣ безъ изъятія, могутъ быть разположены въ нѣкоторыхъ геометрическихъ фигурахъ. Всѣми сими рядами не мало занимались многіе Геометры, и для того я считаю не за безполезное дѣло подать объ оныхъ здѣсь достаточное понятіе, и тѣмъ болѣе, что многимъ изъ нихъ сдѣлать можно весьма полезныя употребленія.

О числахъ соразположенныхъ.

Возмемъ рядъ единицъ 1, 1, 1, 1, 1, и проч. и станемъ брать въ ономъ сперва одинъ членъ, потомъ сумму двухъ, трехъ, четырехъ и такъ далѣе членовъ, то получимъ слѣдующій рядъ: 1, 2, 3, 4, 5, и проч.; поступивъ съ симъ рядомъ, какъ поступили съ первымъ, мы составимъ рядъ: 1, 3, 6, 10, 15. и проч.; и поступая такимъ образомъ далѣе и далѣе, получимъ другіе ряды, кои, такъ же какъ и три предъидущіе *рядами чиселъ соразположенныхъ* именуются. Таковые ряды суть слѣдующіе:

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	и проч.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	и проч.
1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,	и проч.
1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	220,	и проч.
1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495,	715,	и проч.
1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287,	2002,	и проч.
1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716,	3003,	5005,	и проч.

1, 8, 36, 120 330, 792, 1716, 3432, 6435, 11440, и проч.
1, 45, 165, 495, 1287, 3003, 6435, 13870, 25310 и проч.
1, 10, 55, 220, 715, 2002, 5005, 11440, 25310, 50620 и проч.
1, 11, 66, 286, 1001, 3003, 8008, 19448, 44758, 95378, и проч.

Первый изъ сихъ рядовъ называется *первымъ рядомъ чиселъ соразположенныхъ* или *рядомъ чиселъ постоянныхъ*. Второй называется *вторымъ рядомъ* или *рядомъ чиселъ естественныхъ*. Третiй называется *третьимъ рядомъ* или *рядомъ чиселъ треугольныхъ*. Четвертый именуется *четвертымъ рядомъ* или *рядомъ чиселъ треугольно-пирамидныхъ*. Пятый же, шестый, и проч. ряды называются просто *пятымъ*, *шестымъ рядомъ чиселъ соразположенныхъ*, и пр. Въ каждомъ изъ сихъ рядовъ *показателемъ* называется число, показующее, который есть сей рядъ въ разсужденiи перваго. Напримѣръ показатель шестаго ряда есть 6.

Означимъ чрезъ n число взятыхъ въ какомъ нибудь изъ сихъ рядовъ членовъ: изъ самаго составленiя сихъ чиселъ явствуетъ, что n тый членъ сего ряда равенъ суммѣ n членовъ предшествующаго ему ряда. И такъ, поелику каждый членъ перваго ряда есть 1, то общая сумма онаго будетъ n, и слѣдственно общiй членъ втораго ряда есть такъ же n; и какъ сей рядъ есть равноразнствующiй, то общая сумма онаго будетъ $\frac{n(n+1)}{2}$; изъ чего слѣдуетъ, что общiй членъ третьяго ряда есть $\frac{n(n+1)}{2}$. Сверхъ того говорю, что n той членъ ряда, коего показатель q, такъ относится къ суммѣ сего самаго ряда, какъ q къ $n+q-1$.

Свойство сїе въ двухъ первыхъ рядахъ явственно; ибо въ первомъ ряду: $1:n = 1:n+1-1$; равнымъ образомъ во второмъ: $n:\frac{n(n+1)}{2} = 2:n+1$ $= 2:n+2-1$.

Но для доказательства, что свойство сїе равно имѣетъ мѣсто и во всѣхъ прочихъ рядахъ, мы докажемъ, что когда оно находится въ которомъ нибудь изъ рядовъ, то равно имѣть будетъ мѣсто и въ непосредственно слѣдующемъ ряду.

И на сей конецъ пусть будетъ рядъ:
$a, b, c, d \ldots\ldots m, p, x, r, \ldots\ldots (\alpha)$,
коего показатель $= q$, число членовъ $= n$, и пусть еще по порядку слѣдующїй послѣ его рядъ
$A, B, C, D \ldots M, P, X, R, \ldots\ldots (\beta)$,
коего показатель $= q+1$, число членовъ $= n$.

По свойству рядовъ соразположенныхъ чиселъ будетъ:

$A = a$
$B = a + b$
$C = a + b + c$
$D = a + b + c + d$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$M = a + b + c + d + \ldots\ldots + m$
$P = a + b + c + d + \ldots\ldots + m + p$
$X = a + b + c + d + \ldots\ldots + m + p + x$
$R = a + b + c + d + \ldots\ldots + m + p + x + r$

Откуда происходитъ:
$A + B + C + D + \ldots\ldots + P + X + R =$
$na + (n-1)b + (n-2)c + (n-3)d + \ldots$

$+(n-(n-4))m+(n-(n-3))p+(n-(n-2))x$
$(n-(n-1))r$, или

$$A+B+C+D+\ldots\ldots+P+X+R=$$
$$n(a+b+c+d+\ldots\ldots+m+p+x+r)$$
$$-(b+2c+3d+\ldots\ldots+(n-4)m$$
$$+(n-3)p+(n-2)x+(n-1)r).$$

И такъ естьли положимъ

$$A+B+C+D+\ldots\ldots+P+X+R=S,$$

и замѣтимъ, что

$$a+b+c+d+\ldots\ldots+m+p+x+r=R,$$

то получимъ

$$(\gamma)\ \ldots\ S=nR-(b+2c+3d+\ldots\ldots+(n-4)m$$
$$+(n-3)p+(n-2)x+(n-1)r).$$

Положимъ теперь, что въ ряду (α) имѣетъ мѣсто упомянутое свойство, то есть что послѣдній членъ такъ относится къ суммѣ членовъ, какъ $q:n+q-1$; будетъ:

$b:a+b$ или $B=q:2+q-1=q:q+1$;
$c:a+b+c$ или $C=q:3+q-1=q:q+2$;
$d:D=q:4+q-1=q:q+3$;
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
$m:M=q:n-3+q-1=q:q+n-4$;
$p:P=q:n-2+q-1=q:q+n-3$,
$x:X=q:n-1+q-1=q:q+n-2$;
$r:R=q:n+q-1=q:q+n-1$;

Изъ сихъ пропорцій произходитъ

$$qb + b = qB$$
$$qc + 2c = qC$$
$$qd + 3d = qD$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$qm + (n-4)m = qM$$
$$qp + (n-3)p = qP$$
$$qx + (n-2\ x = qX$$
$$qr + (n-1)r = qR$$

Изъ чего произходитъ:

$$q(b + c + d + \ldots\ldots + m + p + x + r) + (b + 2c + 3d + \ldots + (n-4)m + (n-3)p + (n-2)x + (n-1)r) = q(B + C + D + \ldots + M + P + X + R),$$ или $$b + 2c + 3d + \ldots\ldots + (n-4)m + (n-3)p + (n-2)x + (n-1)r = q(S - A) - q(R - a) = qS - qA - qR + qa = qS - qR,$$ потому что $A = a$.

Поставляя сію величину въ уравненіе (γ) получимъ

$S = nR - qS + qR$, или $S + qS = nR + qR$, или $(q+1)S = (n+q)R$; то есть

$$R : S = q+1 : n+q = q+1 : n+(q+1)-1.$$

Слѣдовательно ежели упомянутое нами свойство имѣетъ мѣсто въ ряду (α), то оно такъ же имѣть будетъ мѣсто и въ не посредственно слѣдующемъ ряду (β); но мы видѣли, что свойство сіе находится въ первомъ ряду; слѣдовательно оно имѣетъ мѣсто и во второмъ, а посему и въ третьемъ, и въ четвертомъ