ОСНОВАНІЙ АЛГЕБРЫ

ЛЕОНГАРДА ЕЙЛЕРА

ЧАСТИ ПЕРВОЙ

ПЕРВЫЯ ТРИ ОТДѢЛЕНІЯ,

переведенныя съ Французскаго языка на Россійской, со многими присовокупленіями,

ВАСИЛІЕМЪ ВИСКОВАТОВЫМЪ,

Академіи Наукъ Екстраординарнымъ Академикомъ.

ТОМЪ Iй,

содержащій въ себѣ

ОТДѢЛЕНІЕ I и IIе.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ

при Императорской Академіи Наукъ,

1812 года.

Печатано отъ Императорской Академіи Наукъ.

Николай Фуссъ,
Непремѣнный Секретарь.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ

По кончинѣ г. Висковатова переводъ его первыхъ трехъ отдѣленій части первой основаній Алгебры знаменитаго Ейлера, со многими присовокупленіями, былъ почти уже отпечатанъ; а перевода его четвертаго и купно послѣдняго отдѣленія сея части съ подобными присовокупленіями осталось токмо около 4хъ писменныхъ листовъ: почему Академія, находя соединеніе сего перевода съ прежнимъ, который отъ нея двукратно былъ изданъ безъ всякихъ присовокупленій, не сообразнымъ, разсудила оный г. Висковатова переводъ помянутыхъ отдѣленій Ейлеровой Алгебры издать въ свѣтъ особо, не соединяя его съ прежнимъ, который отъ нея изданъ будетъ, какъ онъ есть, третьимъ тисненіемъ.

ОСНОВАНІЙ АЛГЕБРЫ,

ПЕРЬВОЙ ЧАСТИ

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

О различныхъ способахъ изчисленія простыхъ количествъ.

ОСНОВАНІЯ АЛГЕБРЫ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ,

содержащая

Аналитику опредѣленную.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ,

О разныхъ способахъ изчисленія простыхъ количествъ.

ГЛАВА I.

О Маѳематикѣ вообще.

I.

Все то, что увеличиться или уменьшиться можетъ, или къ чему нѣчто прибавить, или отъ чего нѣчто отнять можно, называется *величина* или *количество*.

По сему сумма денегъ есть количество, ибо къ оной прибавить и отъ оной убавить можно.

Равнымъ образомъ вѣсъ и другія сему подобныя вещи суть такъ же величины.

2.

И такъ находятся весьма многія различныхъ родовъ величины, кои всѣ изчислить было бы весьма трудно; и отсюда произходятъ разныя части Маѳематики, изъ коихъ каждая о особливомъ родѣ величины разсуждаетъ; ибо *Маѳематика* вообще есть *Наука о количествахъ*, и въ которой изъискиваются средства къ измѣренію оныхъ.

3.

Но количества опредѣлить или измѣрить нѣтъ инаго средства, какъ взявъ нѣкоторое количество того же рода за извѣстное, изъискать его отношеніе къ оному мѣримому количеству.

И такъ когда величина суммы денегъ опредѣлена быть долженствуетъ, то возми нѣкоторую извѣстную монету, какъ напримѣръ гульденъ, рейхсталеръ, рубль, червонецъ и сему подобное за извѣстное количество, и сыщи сколько таковыхъ монетъ въ упомянутой суммѣ содержится.

Равнымъ образомъ, когда величину какого нибудь груза опредѣлить должно, то возми какой ниесть грузъ, напримѣръ фунтъ, центнеръ, лотъ и сему подобное за извѣстное количество, и сыщи, сколько такихъ грузовъ содержится въ первомъ.

Ежели длину или ширину вымѣрять должно, то обыкновенно употребляется къ тому извѣстная длина, какова есть футъ.

4.

И такъ при опредѣленіи или измѣреніи величинъ всѣхъ родовъ, дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ во первыхъ назначить извѣстную величину одинакаго рода съ мѣримою, которая *мѣрою* или *единицею* называется, и которая слѣдовательно отъ нашего произволенія зависитъ; потомъ опредѣлить, какое отношеніе упомянутая величина къ сей мѣрѣ имѣетъ. Сіе отношеніе всегда числами изображается; почему и *число* не иное что есть, какъ отношеніе одного количества къ другому, которое принято за единицу.

5.

Изъ сего явствуетъ, что всѣ величины изображены быть могутъ чрезъ числа, и посему основаніе всѣхъ Математическихъ наукъ состоять должно въ полномъ изложеніи науки чиселъ, и въ тщательномъ изслѣдованіи различныхъ способовъ изчисленія, какіе токмо случиться могутъ.

Сія основательная часть Маѳематики называется *Аналитика* или *Алгебра* (*).

6.

И такъ въ Аналитикѣ разсматриваются токмо числа, коими количества изображаются, не принимая въ разсужденіе особенные роды количествъ; каковые роды входятъ въ разсужденіе въ другихъ частяхъ Маѳематики.

7.

О числахъ въ особенности разсуждаетъ *Ариѳметика*, которая есть *наука о числахъ собственно такъ называемыхъ*; но оная простирается токмо до извѣстныхъ родовъ изчисленія, которыя чаще въ общежитіи случаются. Напротивъ того Аналитика заключаетъ вообще всѣ случаи, какіе токмо при ученіи о числахъ и изчисленіи оныхъ мѣсто имѣть могутъ.

(*) Многіе Маѳематики различаютъ Аналитику отъ Алгебры: они называютъ *Аналитикою* способъ, коимъ опредѣляются тѣ общія правила, помощію коихъ разумъ облегчается во всѣхъ Маѳематическихъ изслѣдованіяхъ; и именуютъ *Алгеброю* то орудіе, помощію коего въ ономъ способѣ къ сему достигается. Сіе есть то самое опредѣленіе, которое г. *Безу* принимаетъ въ предисловіи къ своей Алгебрѣ.

ГЛАВА II.

Изъясненіе знаковъ + плюсъ *и* — минусъ, *которые по Россійски изобразить можно чрезъ* съ *и* безъ.

8.

Когда къ одному данному числу прибавить или приложить должно другое, то означается сіе помощію знака + (plus), которой въ переди сего другаго числа ставится.

И такъ чрезъ $5+3$ означается то, что число 5 съ 3 сложено быть должно, отъ чего произойдетъ 8; равнымъ образомъ $12+7$ составляютъ 19; $25+16$ даютъ 41; а $25+41$ есть 66, и проч.

9.

Посредствомъ сего же знака + можно соединять и больше чиселъ, какъ напримѣръ: $7+5+9$ значитъ, что число 7 съ 5 и съ 9 сложено быть должно, что составляетъ 21; отсюда можно уразумѣть, что значитъ слѣдующая формула: $8+5+13+11+1+3+10$; а именно сумму всѣхъ сихъ чиселъ, которая составляетъ 51.

10.

Все сіе само собою ясно, а надлежитъ еще примѣтить, что въ Аналитикѣ числа изображаются общимъ образомъ буквами, какъ a, b, c, d, и проч. И такъ когда напишется $a + b$, то сіе означаетъ сумму двухъ чиселъ, которыя буквами a и b означены, сколь бы велики или малы они ни были; равнымъ образомъ $f + m + b + x$ значитъ сумму чиселъ изображенныхъ сими самыми четырмя буквами.

И такъ во всякомъ случаѣ, когда только извѣстно будетъ какія числа какими буквами изображены, можно помощію Ариѳметики сыскать сумму или величину таковыхъ формулъ.

11.

Когда напротивъ того отъ одного числа другое отнято быть должно или вычтено, то сіе дѣйствіе изображается знакомъ $-$ (minus), которой впереди вычитаемаго числа ставится. Какъ напримѣръ $8 - 5$ показываетъ, что отъ числа 8 отнять должно 5; по чему, какъ извѣстно, въ остаткѣ будетъ 3; равнымъ образомъ $12 - 7$ даетъ 5; а $20 - 14$ есть 6, и проч.

12

Можетъ такъ же случиться, что изъ

одного числа вычесть должно многія числа, какъ напримѣръ:

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9,$$

что разумѣть должно слѣдующимъ образомъ: отними сперва 1 отъ 50, останется 49, отъ сего числа отними 3, останется 46, отъ сего отними 5 останется 41, отъ сего отними 7 останется 34, наконецъ отъ 34 отними 9, останется 25, которое есть величина предложенной формулы. Но какъ всѣ числа 1, 3, 5, 7, 9 вообще вычтены быть долженствуютъ, то сїе значитъ то же, что сумму ихъ, то есть 25 вычесть однимъ разомъ изъ 50, ибо тогда останется то же, что и прежде, то есть 25.

13.

Равнымъ образомъ столь же удобно опредѣлить величину такой формулы, въ которой оба знака + и — находятся; какъ напримѣръ:

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ значитъ то же, что 5. Надлежитъ токмо взять особенно сумму тѣхъ чиселъ, которыя имѣютъ предъ собою знакъ +, какъ 12, 2, кои составляютъ 14, и изъ сего числа вычесть сумму всѣхъ чиселъ имѣющихъ предъ собою знакъ —; какъ то 3, 5, 1, коихъ сумма 9; и будешъ въ остаткѣ 5.

14.

Изъ сего видно, что совсемъ не входитъ въ разсужденіе порядокъ, которымъ написаны числа; но что можно оныя переставить по своей волѣ, лишь бы только при каждомъ числѣ сохраненъ былъ сопровождающій оное знакъ; такъ напримѣръ, вмѣсто прежней формулы написать можно слѣдующую: 12+2—5—3—1; или 2—1—3—5+12; или 2+12—3—1—5; или еще иныя.

При чемъ примѣтить должно, что въ первой формулѣ предъ числомъ 12 разумѣть должно знакъ +.

15.

Равнымъ образомъ не будетъ никакого затрудненія въ опредѣленіи знаменованія формулы, когда, для приведенія оныхъ дѣйствій во всеобщность, вмѣсто дѣйствительныхъ чиселъ употреблены будутъ буквы. Напримѣръ, явно,

что $a - b - c + d - e$

показываетъ, что буквами a и d изображенныя числа надлежитъ сложить, и изъ суммы ихъ вычесть буквами b, c, e означенныя и знакомъ — сопровожденныя числа.

16.

И такъ главное дѣло здѣсь состоитъ въ томъ, чтобы знать какой знакъ каждое число предъ собою имѣетъ; чего ради въ Алгебрѣ числа съ ихъ предстоящими знаками обыкновенно, какъ простыя величины разсматриваются: и которыя имѣютъ предъ собою знакъ $+$ называются *избыточныя* или *положительныя;* которыя же сопровождены знакомъ $-$ именуются *недостаточныя*, или *отрицательныя.*

17.

Сїе весьма изрядно изъяснить можно имѣнїемъ какого нибудь человѣка, когда то, что онъ дѣйствительно у себя имѣетъ, означится числами положительными, помощїю знака $+$; а то, что онъ долженъ, числами отрицательными, посредствомъ знака $-$. Такъ, когда кто нибудь имѣетъ у себя 100 рублей, а при томъ долженъ 50 рублей, то имѣнїе его состоять будетъ изъ $100 - 50$, или что все то же изъ $+ 100 - 50$, то есть изъ 50.

18.

Поколику отрицательныя числа почитать можно за долги, когда положительными числами означатся дѣйствительныя имѣнїя, то можно сказать, что отрицательныя числа суть менѣе, нежели ничто; и такъ, когда кто никакого у себя имѣнія не имѣетъ, а при томъ еще 50 рублей долженъ, то онъ на самомъ дѣлѣ имѣетъ 50 руб. менѣе, нежели ничего. По тому что, когда бы кто подарилъ ему 50 руб. чтобъ заплатилъ долгъ свой, то тогда не имѣлъ бы онъ ничего, хотя въ самомъ дѣлѣ и больше бы имѣлъ, нежели прежде.

19.

И такъ когда положительныя числа неоспоримо суть болѣе, нежели ничего, то отрицательныя суть менѣе, нежели ничего: но положительныя числа произходятъ когда къ 0 или къ ничему прибавляться будетъ непрестанно единица; отъ чего произходитъ рядъ такъ называемыхъ *натуральныхъ* или *естественныхъ чиселъ*, а именно:

0, +1. +2, +3, +4 +5, +6, +7, +8, +9, +10, и такъ далѣе до безконечности.

Такимъ же образомъ сей рядъ и въ противную сторону продолжить можно безпрерывнымъ отниманіемъ отъ 0 единицы, что даетъ слѣдующій рядъ чиселъ отрицательныхъ:

0, —1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, —8, —9, —10, и такъ далѣе до безконечности.

20.

Всѣ сїи числа какъ положительныя, такъ и отрицательныя называются извѣстнымъ именемъ *цѣлыхъ чиселъ*; они называются цѣлыми числами, дабы отличить ихъ отъ дробей и многихъ другихъ чиселъ, о которыхъ ниже сего предложено будетъ. Такъ напримѣръ, поелику 50 больше 49 на цѣлую единицу, то легко можно понять, что между 49 и 50 содержаться можетъ безконечное множество промежуточныхъ чиселъ, кои всѣ больше 49, а меньше 50: для сего надлежитъ токмо представить себѣ двѣ линїи, изъ которыхъ одна длиною въ 50 футовъ, а другая въ 49; и тогда удобно понять можно, что возможно провести безчисленное множество другихъ линїй, которыя всѣ длиннѣе 49, а короче 50 футовъ.

21.

Сїе понятїе о отрицательныхъ количествахъ тѣмъ наипаче примѣчанїя достойно, что оное во всей Алгебрѣ есть крайней важности. Здѣсь довольно будетъ замѣтить напередъ, что всѣ сїи формулы, какъ на примѣръ.

$+1-1$, $+2-2$, $+3-3$, $+4-4$ и такъ

далѣе значатъ о или ничего; и что сверхъ того напримѣръ, $+2-5$ не иное что значитъ какъ -3, потому, что когда кто имѣетъ 2 рубли, а 5 рублей долженъ, то онъ не только не имѣетъ ничего, но еще 3 рубля остается долженъ; равнымъ образомъ

$$7-12 \text{ равно } -5,$$
$$\text{а } 25-40 \text{ - - } -15.$$

22.

То же самое наблюдать должно, когда для всеобщности вмѣсто чиселъ возмутся буквы; ибо $+a-a$ всегда столько же составляетъ какъ и о или ничего. Ежели пожелаешь знать, что значитъ на примѣръ $+a-b$, то надлежитъ два случая принять въ разсужденіе.

Первой случай имѣетъ мѣсто, когда a больше b; тогда надлежитъ b вычесть изъ a, и взять остатокъ положительно, то и выдетъ искомая величина.

Второй случай есть тотъ, когда a меньше b; въ семъ случаѣ надлежитъ вычесть a изъ b, и остатокъ отрицательно или со знакомъ $-$ взятый изобразитъ искомую величину.

ГЛАВА III.

О умноженїи простыхъ количествъ.

23.

Когда два или болѣе равныхъ чиселъ сложить должно, тогда сумма изображена быть можетъ кратче, какъ напримѣръ:

$a+a$ равно $2.a$

$a+a+a$ - -- $3.a$

$a+a+a+a$ - -- $4.a$, и такъ далѣе.

И отсюда раждается понятїе о умноженїи; а именно:

$2.a$ значитъ a взятое дважды.

$3.a$ - - - - a взятое трижды

$4.a$ - - - - a взятое четырежды, и такъ далѣе.

24.

И такъ ежели буквою означенное число на другое какое число умножить должно, то число сїе просто пишется передъ буквою, какъ напримѣръ.

a умноженное на 20 даетъ $20\,a$

b умноженное на 30 даетъ $30\,b$, и проч.

Такъ же видно, что c взятое однажды или $1c$ то же значитъ, что c.

25.

Сего рода произведенія можно еще умножать и на другія числа; какъ напримѣръ

2жды $3a$ составляютъ $6a$

3жды $4b$ дѣлаютъ $12b$

5ю $7x$ даютъ $35x$

И сіи произведенія умножать можно еще на другія произвольныя числа.

26.

Когда множащее число, такъ же означено буквою, тогда оное пишется непосредственно передъ другою буквою; какъ напримѣръ, когда b умножить должно на a, то произведеніе означается чрезъ ab; такъ же pq есть произведеніе, которое произходитъ отъ умноженія числа q на p. Когда pq умножится еще на a, то произойдетъ apq.

27.

Надлежитъ примѣтить, что здѣсь не нужно принимать въ разсужденіе порядка въ которомъ буквы написаны; ибо ab то же значитъ, что и ba; ибо b умноженное на a есть то же что и a умноженное на b; а чтобъ сіе понять яснѣе, то можно вмѣсто a и b взять извѣстныя числа, какъ 3 и 4, и тогда само собою видно будетъ, что 3жды 4 есть то же что и 4жды 3.

28.

Когда вмѣсто буквъ, которыя написаны непосредственно одна возлѣ другой, должно будетъ поставить самыя числа; то легко видѣть можно, что сіи числа тогда непосредственно одно возлѣ другаго написать не можно: ибо когда бы вмѣсто 3жды 4 написали 34, то сіе составило бы не двѣнадцать, но тридцать четыре. И такъ когда умноженіе простыхъ чиселъ означить должно, то обыкновенно ставится между оными точка, какъ напримѣръ 3 . 4 значитъ 3жды 4, то есть 12; равнымъ образомъ 1 . 2 есть 2; 1 . 2 . 3 есть 6; 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 дѣлаетъ 1344; 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 составляетъ 3628800, и такъ далѣе.

29.

Изъ сего явствуетъ, что значитъ сія формула 5.7.8 *abcd*, а именно: сперва 5 должно умножить на 7, и произведеніе умножить на 8; потомъ сихъ чиселъ произведеніе умножить на *a*, послѣ на *b*, потомъ на *c*, а напослѣдокъ на *d*. При чемъ примѣтить должно, что вмѣсто 5 . 7 8 можно написать самое произведеніе 280, то есть число, которое произойдетъ, когда произведеніе изъ 5 на 7 или 35 умножишь на 8.

30.

Еще примѣтить должно, что такія формулы, которыя отъ умноженія многихъ чиселъ произходятъ, называются *произведеніями*; а простыя числа или буквы обыкновенно именуются *множителями*.

31.

До сихъ поръ разсуждали мы только о числахъ положительныхъ, и нѣтъ сомнѣнія, чтобы произшедшія отъ того произведенія не были положительныя же; а именно, $+a$ умноженное на $+b$ по необходимости дать должно $+ab$; но что произойдетъ, когда $+a$ умножено будетъ на $-b$, или $-a$ на $-b$, о томъ надлежитъ учинить особенное изслѣдованіе.

32.

Станемъ во первыхъ множить $-a$ на 3, или на $+3$: поелику $-a$ почитать можно за долгъ; то явно, что когда долгъ сей возмется три раза, то оный такъ же сдѣлаться долженъ въ три раза больше; слѣдовательно искомое произведеніе есть $-3a$. Равнымъ образомъ когда требуется умножить $-a$ на b, то есть на $+b$, то выдетъ $-ba$, или что все то же, $-ab$. Изъ сего мы можемъ заключить, что когда положительная величина умножена будетъ на отрицательную, то произведеніе будетъ отрицательное; откуда произходитъ слѣдующее правило; $+$ умноженной на $+$ даетъ $+$; напротивъ того $+$ умноженной на $-$, или $-$ на $+$ даетъ $-$. (1)

33.

Теперь остается разрѣшить еще тотъ случай, когда $-$ умноженъ быть долженъ на $-$, или, напримѣръ $-a$ на $-b$. Вопервыхъ явно, что произведеніе въ разсужденіи буквъ будетъ

---

(1) *Г. Маклоринъ* доказываетъ сію истинну слѣдующимъ образомъ: (см. Traité d'Algebre etc Traduit de M. Maclaurin. 1753; pag. 8) возмемъ выраженіе $a-a$ и станемъ умножать его на b; поелику множимое количество равно нулю, посему и произведеніе такъ же равно нулю быть должен-ствуетъ; но первый членъ онаго есть ab, слѣд. второй будетъ $-ab$ Изъ чего слѣдуетъ, что

$$-a.+b=-ab.$$

Пусть теперь требуется умножить a на $b-b$; поелику множащее количество равно нулю, посему и произведеніе такъ же будетъ нуль; но первый членъ сего произведенія есть ab; посему второй будетъ $-ab$. Изъ чего слѣдуетъ, что

$$+a.-b=-ab.$$

ab; но должно ли оному придать знакъ $+$ или $-$, о томъ сказать еще ничего не можно, а извѣстно только то, что одинъ изъ оныхъ знаковъ, или тотъ, или другой приданъ быть долженъ. Но я говорю, что сей знакъ не можетъ быть $-$, ибо $-a$ умноженное на $+b$ даетъ $-ab$, и $-a$ умноженное на $-b$ не можетъ дать то же, что даетъ $-a$ умноженное на $+b$, но должно дать противное; а именно $+ab$. Изъ сего произходитъ слѣдующее правило: $-$ умноженной на $-$ даетъ $+$, подобно какъ и $+$ умноженной на $+$ (2).

34.

Сіи правила обыкновенно вмѣстѣ соединяются, и кратко сими словами изображаются: два одинакіе знака умноженные между собою даютъ $+$, а два разные даютъ $-$. Такъ напримѣръ, когда умножить должно между собою числа $+a$, $-b$, $-c$, $+d$; то

(2) Сіе правило, по *Меклорину*, докажется такъ: Когда $-a$ умножится на $b-b$, то произведеніе должно быть нуль; но первый членъ онаго (для преддоказаннаго) есть $-ab$; а потому второй по необходимости будетъ $+ab$.
И такъ $-a \cdot -b = +ab$

во первыхъ $+a$ умноженное на $-b$ даетъ $-ab$; сїе умноженное на $-c$ даетъ $+abc$, а сїе наконецъ на $+d$ умноженное даетъ $+abcd$.

35.

Поелику теперь въ разсужденїи знаковъ нѣтъ никакого затрудненїя; то остается намъ только показать, какимъ образомъ два числа, которыя сами суть произведенїя, умножать должно между собою. Когда ab должно умножить на cd, то произведенїе будетъ $abcd$, и оное произходитъ, когда сперва ab умножится на c, и потомъ произведенїе умножится на d. Или, когда напримѣръ 36 умножить должно на 12; то поелику 12 произходитъ отъ умноженїя 3 на 4, надлежитъ только сперва 36 умножить на 3 и найденное произведенїе, то есть 108 умножить на 4, и такимъ образомъ выдетъ 432, которое есть то же, что 12 разъ 36.

36.

Но ежели требуется умножить $5ab$ на $3cd$, то хотя и можно написать $3cd \cdot 5ab$; однако, поелику здѣсь все равно, какимъ порядкомъ ни стоятъ умноженныя между собою числа, то лучше поставить, какъ то дѣлается обыкновенно, числа въ переди буквъ и изобразить произведеніе слѣдующимъ образомъ: $5 \cdot 3\,abcd$, или $15\,abcd$, по тому что 5 умноженное на 3 равно 15.

Равнымъ образомъ когда $12\,pqr$ умножить должно на $7xy$, то произведеніе будетъ $12 \cdot 7pqrxy$, или $84pqrxy$.

ГЛАВА IV.

О свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ множителей.

37.

Мы замѣтили уже, что произведеніе произходитъ отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ между собою, и что сіи числа въ разсужденіи произведенія называются *множителями.*

Напримѣръ, множители произведенія $abcd$ суть числа a, b, c, d.

38.

И такъ естьли станемъ теперь разсматривать всѣ цѣлыя числа, какъ произходящія отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ, то тотчасъ увидимъ, что нѣкоторыя совсемъ не могутъ произходить отъ умноженія, и слѣдовательно никакихъ множителей не имѣютъ; другія же могутъ произойти отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ, и слѣдственно двухъ или болѣе множителей имѣютъ. Напримѣръ 4 равно $2 . 2$; 6 равно $2 . 3$; 8 равно $2 . 2 . 2$; 27 равно $3 . 3 . 3$; 10 равно $2 . 5$, и такъ далѣе.

39.

Напротивъ того слѣдующія числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, и проч. вышепоказаннымъ образомъ во множителяхъ представлены быть не могутъ, развѣ употребить къ тому и единицу, и напримѣръ 2 изобразить чрезъ 1.2; но какъ на 1 умножаемое число не перемѣняется, того ради единица и въ число множителей не включается.

И такъ всѣ сіи числа, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, и проч., коихъ во множителяхъ представить не возможно, называются *простыми* или *первыми числами*. Напротивъ того тѣ, которыя множителей имѣютъ, какъ:
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, и проч. называются *сложными числами*.

40.

По сему *простыя* или *первыя числа* особливаго вниманія достойны, для того что оныя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ не произходятъ. При чемъ особенно примѣчанія достойно то, что когда оныя написаны будутъ по порядку, какъ одно за другимъ слѣдуетъ, а именно: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 (*), и такъ далѣе, што въ оныхъ никакого правильнаго порядка

(*) Всѣ первыя числа отъ 1 до 100000 содержатся въ таблицахъ дѣлителей, о коихъ я скажу въ 720 членѣ четвертаго отдѣленія. Но есть еще особыя таблицы чиселъ первыхъ, простирающїяся отъ 1 до 101000; кои изданы въ Галлѣ г. *Крюгеромъ* въ Нѣмецкомъ сочиненїи пода заглавїемъ: *Мнѣнїя объ Алгебрѣ. Г.* Крюгеръ получилъ ихъ въ рукописи, отъ того кто оныя вычислялъ, и котораго звали *Петръ Егеръ. Г. Ламбертъ* продолживъ сїи таблицы до 102000 помѣстилъ ихъ въ своихъ прибавленїяхъ къ логариѳмическимъ и тригонометрическимъ таблицамъ, напечатанныхъ въ Берлинѣ 1770 года, сочиненїе, которое содержитъ еще многїя другїя таблицы, кои съ великою пользою употреблены быть могутъ въ различныхъ частяхъ Маѳематики, и изъясненїя, о коихъ слишкомъ было бы долго излагать здѣсь.

Парижская Академїя Наука имѣла таблицы первыхъ чиселъ; которыя представлены ей были Отц. *Меркастелемъ*, и Г. *дю Туромъ*, но оныя изданы не были; а упоминается объ нихъ въ V томъ собранїя сочиненїй представленныхъ Академїи посторонними учеными, по случаю одного сочиненїя Г. *Раллье де Урма*, которое находится въ семъ томѣ и въ которомъ авторъ предлагаетъ удобный способъ для найденїя чиселъ первыхъ.

не примѣчается; приращенія ихъ суть то больше, то меньше; и по сихъ поръ еще не могли открыть слѣдуютъ ли сіи приращенія какому нибудь закону или нѣтъ.

41.

Но сложныя числа, которыя во множителяхъ представить можно, всѣ произходятъ

Въ ономъ же томѣ находится другое сочиненіе Г. *Раллье де Урма*, подъ заглавіемъ: *Méthode nouvelle de division, quand le dividende est multiple du diviseur, et se peut par conséquent diviser sans reste, et d'extraction de racines quand la puissance est parfaite.* Сей способъ поистиннѣ, болѣе любопытный, нежели полезный, почти ничего общаго съ обыкновеннымъ способомъ не имѣетъ: онъ весьма удобенъ и тѣмъ примѣчателенъ, что коль скоро извѣстно будетъ столько цыфръ съ правой стороны дѣлимаго или степени, сколько частное или корень оныхъ имѣть долженствуетъ, то предъидущія имъ цыфры можно совсемъ не принимать въ разсужденіе, и опредѣлить такъ же частное. Г. *Раллье де Урмъ* открылъ себѣ сей новый путь помощію нѣкоторыхъ размышленій о числахъ, коими оканчиваются числительныя выраженія произведеній и степеней, родъ чиселъ, кои, какъ я самъ примѣтилъ въ другихъ случаяхъ, не безполезно разсматривать.

изъ вышеупомянутыхъ простыхъ чиселъ, такъ что всѣ множители оныхъ суть простыя числа; ибо ежели который нибудь множитель будетъ не первое, но сложное число, то оный можно опять представить въ двухъ или болѣе множителяхъ, которые будутъ первыя числа. Напримѣръ, когда число 30 изображено будетъ чрезъ 5 . 6, то увидимъ, что 6 не есть первое число, но равно 2 . 3, и слѣдовательно 30 можно изобразить чрезъ 5 . 2 . 3, или 2 . 3 . 5, гдѣ всѣ множители суть первыя числа.

42.

Естьли теперь разсмотримъ какимъ образомъ всѣ сложныя числа разрѣшаются на числа, то первыя увидимъ, въ томъ величайшее различїе; ибо нѣкоторыя имѣютъ только два такихъ множителя, другїя три, а иные и болѣе. Напримѣръ, мы уже видѣли, что

4 равно	2 . 2	6 равно	2 . 3,
8 - - -	2 . 2 . 2	9 - - -	3 . 3,
10 - - -	2 . 5	12 - - -	2 . 3 . 2,
14 - - -	2 . 7	15 - - -	3 . 5,
16 - - -	2 . 2 . 2 . 2	и такъ далѣе.	

43.

Изъ сего явствуетъ, какимъ образомъ

определять должно каждаго числа простые множители.

Пусть предложено напримѣръ число 360; то во первыхъ будетъ оно равно 2.180, но 180 равно 2.90,

90 - - - 2.45;

45 - - - 3.15, и наконецъ

15 - - - 3. 5.

Слѣдовательно число 360 изображено быть можетъ слѣдующими простыми множителями 2.2.2.3.3.5, поелику произведеніе всѣхъ сихъ чиселъ даетъ число 360 (*).

44.

Изъ всего сего явствуетъ, что первыя числа ни на какія другія не дѣлятся на цѣло; и что напротивъ того простые множители сложныхъ чиселъ всего удобнѣе и вѣрнѣе найдутся, когда станешь искать всѣ простыя числа, на которыя сіи сложныя раздѣлиться могутъ. Но къ сему потребно *дѣленіе*, о которомъ въ слѣдующей главѣ изъяснено будетъ.

(*) Въ концѣ Ариѳметики на Нѣмецкомъ языкѣ *Поецїусомъ* въ Лейбцигѣ 1728 года изданной находится таблица, въ которой всѣ числа отъ 1 до 10000 изображены симъ образомъ чрезъ простые свои множители.

ГЛАВА V.

О дѣленіи простыхъ количествъ.

45.

Ежели какое нибудь число раздѣлить должно на двѣ, на три или болѣе равныхъ частей, то сіе совершается помощію *дѣленія*, которое показываетъ, какимъ образомъ опредѣлять величину одной изъ таковыхъ частей. Когда, напримѣръ, число 12 раздѣлить должно на три равныя части, то найдется помощію дѣленія, что каждая изъ сихъ частей есть 4.

Въ семъ дѣйствіи употребляются нѣкоторыя особенныя наименованія; а именно число, которое дѣлить должно, называется *дѣлимымъ числомъ*; число же частей, на кои оное раздѣлить должно именуется *дѣлителемъ* или *дѣлящимъ числомъ*; а величина одной таковой части, которая помощію дѣленія опредѣляется, *частнымъ числомъ* называется. Такъ въ упомянутомъ выше примѣрѣ;

12 есть *дѣлимое число*,
3 - - *дѣлитель*, и
4 - - *частное число*.

46.

И такъ естьли какое нибудь число раздѣлится на 2, или на двѣ равныя части, то одна такая часть, то есть частное число, дважды взятое, должно дать точно предложенное число; равнымъ образомъ, когда какое нибудь число раздѣлить должно на 3, то частное число трижды взятое, должно опять произвести сіе самое число. И вообще надобно, чтобы частное число умноженное на дѣлителя всегда произвело дѣлимое число.

47.

И для сей самой причины въ дѣленіи предписывается слѣдующее правило: ищи для частнаго числа такое число, которое бы умножено будучи на дѣлителя произвело точно дѣлимое число. Напримѣръ, когда требуется 35 раздѣлить на 5, то ищи такое число, которое бы умноженное на 5 дало 35; но сіе число есть 7, по тому, что 5 умноженное на 7, даетъ 35. Сіе дѣйствіе обыкновенно выражается такъ: 5 въ 35 содержится 7 разъ, и 5 разъ 7 даетъ 35.

48.

Въ слѣдствіе сего дѣлимое число почитается за произведеніе, котораго одинъ множитель равенъ дѣлителю, а другой частному числу. И такъ, когда требуется 63 раздѣлить на 7, то я буду искать такое произведенїе, что когда за одинъ его множитель возмется 7, то что бы другой умноженной на самаго сего множителя далъ въ произведенїи 63, таковое произведенїе есть 7 . 9, и потому 9 есть частное число, которое произходитъ отъ раздѣленїя 63 на 7.

49.

Ежели теперь требуется вообще раздѣлить число *ab* на *a*, то явно, что частное будетъ *b*, по тому, что *a* умноженное на *b* производитъ дѣлимое *ab*; изъ чего видно, что когда *ab* раздѣлить должно на *b*, частное число будетъ *a*.

И такъ вообще во всѣхъ примѣрахъ дѣленїя, когда дѣлимое раздѣлится на частное число, то опять выдти долженъ дѣлитель; такъ, когда 24 на 4 раздѣленное даетъ 6, то и обратно 24 на 6 раздѣленное дастъ 4.

50.

Послику все дѣло въ томъ состоитъ, чтобы изобразить дѣлимое число посредствомъ двухъ множителей, изъ коихъ бы одинъ равенъ былъ дѣлителю, а другой частному числу, то не трудно уразумѣть будетъ слѣдующіе примѣры. Во первыхъ abc раздѣленное на a даетъ bc, по тому, что a умноженное на bc составляетъ abc; равнымъ образомъ abc раздѣленное на b даетъ ac, и abc на ac раздѣленное даетъ b. Потомъ $12mn$ раздѣленное на $3m$ даетъ $4n$, по тому, что $3m$ умноженное на $4n$ составляетъ $12mn$; но когда сіе же самое число $12mn$ раздѣлится на 12, то произойдетъ mn.

51.

Поелику всякое число a изобразить можно чрезъ $1a$ или одно a, то явствуетъ, что когда a или $1a$ раздѣлится на 1, то въ частномъ числѣ выдетъ то же самое число a. Напротивъ того, когда то же самое число a или $1a$ раздѣлится на a, то частное число будетъ 1.

52.

Не всегда случается, чтобы дѣлимое число представить можно было, какъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ бы одинъ равенъ былъ дѣлителю, и въ такомъ случаѣ дѣленіе вышеписаннымъ образомъ совершиться не можетъ. Напримѣръ, когда 24 раздѣлить должно на 7, то тотчасъ видѣть можно, что 7 не есть множитель 24, по тому что 7 . 3 составляетъ только 21, и слѣдовательно менѣе настоящаго; напротивъ того 7 . 4 дѣлаетъ 28, что больше 24. Между тѣмъ изъ сего видно, что частное больше 3, а меньше 4 быть должно. И такъ дабы частное сїе опредѣлить точно надлежитъ употребить другой родъ чиселъ, кои *дробями* называются, и о которыхъ предложено будетъ въ одной изъ слѣдующихъ главъ.

53.

Между тѣмъ прежде, нежели изъяснено будетъ употребленїе дробей, обыкновенно довольствуются брать за частное меньшее ближайшее цѣлое число, и принимать при томъ въ разсужденїе остающїйся остатокъ. Такъ, напримѣръ говорится, 7 въ 24 содержится 3 раза съ остаткомъ 3; по тому что 3 раза 7 даетъ только 21 и слѣдовательно 3мя меньше 24. Такимъ же образомъ разумѣть надлежитъ и слѣдующїе примѣры:

6 | 34 | 5	то есть дѣлитель	6
30	дѣлимое	34
4	частное	5
	и остатокъ	4

9 | 41 | 4	здѣсь	дѣлитель	9
| 36 |		дѣлимое	31
5		частное	4
		и остатокъ	5

Въ такихъ примѣрахъ, гдѣ есть остатокъ наблюдать должно слѣдующее правило.

54.

Когда дѣлитель умножится на частное число и къ произведенію прибавится остатокъ, то что бы произошло дѣлимое число, и симъ то самымъ образомъ дѣленіе обыкновенно повѣряется, и познается исправно ли сдѣлано было изчисленіе, или нѣтъ.

Такъ, въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ, когда число 6 умножишь на 5, то получишь 30, и когда къ сему прибавишь остатокъ 4, то выдетъ дѣлимое число 34. Такъ же въ послѣднемъ примѣрѣ, когда дѣлитель 9 умножится на частное 4 и къ произведенію 36 приложится остатокъ 5, то произойдетъ дѣлимое 41.

55.

Напослѣдокъ въ разсужденіи знаковъ + *плюсъ* и — *минусъ* надлежитъ такъ же примѣтить, что когда $+ab$ раздѣлится на $+a$, то частное число будетъ $+b$, что само по себѣ ясно.

Но когда $+ab$ раздѣлится на $-a$ то частное число будетъ $-b$, по тому что $-a$ умноженное на $-b$ даетъ $+ab$.

Когда же дѣлимое число есть $-ab$, и оное раздѣлить должно на дѣлителя $+a$, то частное число будетъ $-b$; по тому что $-b$ умноженное на $+a$ даетъ $-ab$, что есть дѣлимое число.

Ежели наконецъ дѣлимое $-ab$ раздѣлить должно на дѣлителя $-a$, то частное будетъ $+b$, по тому что $-a$ умноженное на $+b$ даетъ $-ab$.

56.

И такъ при дѣленіи въ разсужденіи знаковъ $+$ и $-$ имѣются тѣ же самыя правила, какія выше сего видѣли въ умноженіи, а именно: $+$ раздѣленной на $+$ даетъ $+$; $+$ раздѣленной на $-$ даетъ $-$; $-$ раздѣленной на $+$ даетъ $-$; $-$ раздѣленной на $-$ даетъ $+$; или кратче: одинакіе знаки даютъ *плюсъ*, а разные *минусъ*.

57.

Посему когда $18pq$ раздѣлится на $-3p$, то частное будетъ $-6q$; $-30xy$ раздѣленное на $+ 6y$ даетъ $- 5x$; $- 54abc$ раздѣленное на $- 9b$ даетъ $+ 6ac$; ибо въ семъ послѣднемъ примѣрѣ $- 9b$ умноженное на $+ 6ac$ даетъ $- 6 . 9abc$, или $- 54abc$; и сего довольно для дѣленія простыхъ количествъ. Мы не замедлимъ приступить къ изъясненію дробей, но прежде присовокупимъ еще нѣкоторыя примѣчанія о свойствѣ чиселъ относительно ихъ дѣлителей.

ГЛАВА VI.

О свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ дѣлителей.

58.

Видѣли уже мы, что нѣкоторыя числа дѣлятся на цѣло на извѣстныхъ дѣлителей, а другія не дѣлятся; сего ради, для достиженія къ ближайшему познанію чиселъ надлежитъ сіе различіе замѣтить въ особенности, отличая тѣ числа, которыя на какихъ либо дѣлителей раздѣлить можно, отъ тѣхъ, которыя ни на какой не дѣлятся, и замѣчая остатокъ, которой при дѣленіи сихъ послѣднихъ остается. На сей конецъ разсмотримъ слѣдующіе дѣлители:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, и проч.

59.

Пусть будетъ во первыхъ дѣлитель 2; числа, которыя на онаго дѣлятся на цѣло суть слѣдующія:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 и проч., которыя всѣ, какъ то явно, непрестанно увеличиваются на 2; всѣ сіи числа вообще *четными числами* именуются.

Напротивъ того прочія числа, какъ то:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, и проч.,

которыя на 2 не дѣлятся, но въ остаткѣ 1 оставляютъ, называются *нечетными числами*; и такъ сіи числа всегда суть единицею больше или меньше четныхъ.

Всѣ четныя числа можно заключить въ общей формулѣ $2a$, по тому что когда вмѣсто a поставятся по перемѣнно всѣ цѣлыя числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, и проч., то произойдутъ всѣ четныя числа. Напротивъ того всѣ нечетныя числа заключаются въ формулѣ $2a+1$; по тому что $2a+1$ единицею больше четнаго числа $2a$.

60.

Во вторыхъ, пусть дѣлитель будетъ 3: всѣ числа, которыя на 3 раздѣлиться могутъ, суть слѣдующія:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, и такъ далѣе.

И сіи числа представить можно формулою $3a$; ибо $3a$ раздѣленное на 3 даетъ въ частномъ a безъ остатка. Напротивъ всѣ прочія числа раздѣлены будучи на 3 дадутъ въ остаткѣ или 1 или 2, и слѣдовательно суть двоякаго рода. Тѣ, которыя 1 въ остаткѣ оставляютъ, суть слѣдующія:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, и такъ далѣе,

и заключаются въ формулѣ $3a+1$. А тѣ,

которыя даютъ въ остатке 2, суть:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, и такъ далѣе, и заключаются въ формулѣ $3a+2$; такъ что всѣ числа изображены быть могутъ или чрезъ $3a$, или чрезъ $3a+1$, или чрезъ $3a+2$.

61.

Положимъ, что дѣлитель есть 4: всѣ числа, которыя на онаго раздѣлиться могутъ суть слѣдующїя:

4, 8, 12, 16, 20, 24, и такъ далѣе, кои всегда на 4 увеличиваются и въ формулѣ $4a$ заключаются. Прочїя же числа, то есть которыя на 4 не дѣлятся, оставляютъ въ остаткѣ или 1, и слѣдственно превышаютъ оныя единицею, какъ слѣдующїя:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, и такъ далѣе, и слѣдовательно заключаются въ формулѣ $4a+1$; или оставляютъ въ остаткѣ 2, какъ:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, и такъ далѣе, и изображаются формулою $4a+2$; или наконецъ даютъ въ остаткѣ 3, какъ:

3, 7, 11, 15, 19 23, 27, и такъ далѣе, и въ формулѣ $4a+3$ заключаются.

И такъ всѣ возможныя цѣлыя числа содержатся въ которой нибудь изъ четырехъ слѣдующихъ формулъ:

$$4a,\ 4a+1,\ 4a+2,\ 4a+3.$$

62.

Подобное бываетъ и при дѣлителѣ 5: потому что всѣ числа, на 5 дѣлящіяся, заключаются въ формулѣ $5a$; а тѣ, кои не дѣлятся на 5 содержатся въ которой нибудь изъ слѣдующихъ формулъ:

$$5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3 \text{ и } 5a+4;$$

и такимъ же образомъ можно продолжать далѣе и размапривать бо̀льшихъ дѣлителей.

63.

Здѣсь прилично привести себѣ на память предложенное выше о разрѣшеніи чиселъ на простые ихъ множители; ибо всякое число, между простыми множителями коего содержится или 2, или 3, или 5, или 7, или другое какое нибудь число, дѣлится на сіи числа. Напримѣръ 60 значитъ то же, что и 2 . 2 . 3 . 5; а по тому явно, что 60 дѣлится на 2, на 3 и на 5 (*).

(*) Есть нѣкоторыя числа, о коихъ весьма удобно узнать можно, дѣлится ли на очыя какое нибудь предложенное число или нѣтъ.

Какое ниесть предложенное число дѣлится на 2, ежели послѣдняя его цыфра есть четная;

64.

Сверхъ того, поелику общая формула $abcd$, не только на a, b, c и d, дѣлится, но дѣлится еще и на слѣдующія: ab, ac, ad, bc, bd и cd; такъ же на abc, abd, acd, bcd, и

оно дѣлится на 4, когда двѣ послѣднія его цыфры дѣлятся на 4; дѣлится на 8, когда три послѣднія его цыфры дѣлятся на 8, и вообще оно дѣлится на 2^n, когда n послѣднихъ цыфръ дѣлятся на 2^n.

Число дѣлится на 3, ежели сумма цыфръ его дѣлится на 3, и дѣлится на 6 ежели сверхъ сего послѣдняя его цыфра есть четная; оно дѣлится на 9 когда сумма цыфръ дѣлится на 9.

Всякое число, котораго послѣдняя цыфра 0 или 5, дѣлится на 5.

Число дѣлится на 11, когда сумма первой, третьей, пятой и проч. цыфръ равна суммѣ второй, четвертой, шестой и проч. цыфръ.

Правила сіи удобно доказать можно и распространить оныя къ произведеніямъ изъ тѣхъ дѣлителей, о коихъ мы теперь сказали: можно придумать такъ же правила и для нѣкоторыхъ другихъ чиселъ, но приложеніе оныхъ обыкновенно выходитъ длиннѣе, нежели изпытаніе чрезъ самое дѣленіе.

Напримѣръ, я говорю, что число 53704689213 дѣлится на 7, потому что сумма цыфръ числа 64004243433 дѣлится на 7, ибо сіе друго наконецъ на *abcd*, то есть сама на себя; то слѣдуетъ изъ сего, что число 60 или 2 2.3.5, не токмо дѣлится на сїи простыя числа, но и на сложныя изъ двухъ простыхъ составленныя, какъ 4, 6, 10, 15, такъ же на сложныя изъ трехъ простыхъ множителей составленныя, какъ 12, 20, 30, и наконецъ дѣлится и на самаго себя.

65.

И такъ когда какое нибудь число представлено въ простыхъ своихъ множителяхъ, то весьма удобно показать всѣ числа, на которыя оное раздѣлиться можетъ; ибо надлежитъ только взять сперва каждаго изъ простыхъ множителей особенно, по томъ умножать ихъ между собою, бравъ въ каждое произведенїе по два, по три, по четыре множителя, и такъ далѣе, пока выдетъ самое предложенное число.

число составлено, помощїю довольно простаго правила, изъ остатковъ, кои произходятъ отъ раздѣленія на 7 чиселъ 10, 100, 1000, и проч.; 20, 200, 2000, и проч., и такъ далѣе до 60, 600, 600, и проч.

(3) Все сказанное здѣсь г. *Бернулли*, изъяснено будетъ въ одномъ изъ слѣдующихъ моихъ примѣчанїй.

66.

Прежде всего надлежитъ здѣсь примѣтить, что каждое число дѣлится на 1, такъ же и на самаго себя; такъ что каждое число по меньшей мѣрѣ имѣетъ двухъ дѣлителей, а именно единицу и самаго себя. Такія числа, которыя кромѣ сихъ двухъ дѣлителей никакихъ другихъ не имѣютъ, суть тѣ самыя, которыя мы выше сего назвали *простыми* или *первыми* числами.

Но всѣ сложныя числа, сверхъ 1 и самихъ себя, имѣютъ еще другихъ дѣлителей, что изъ слѣдующей таблицы видѣть можно, въ которой подъ каждымъ числомъ всѣ его дѣлители поставлены (*).

(*) Таковая таблица всѣхъ дѣлителей естественныхъ чиселъ, отъ 1 до 10000, издана въ Лейденѣ 1767 года г. *Генрихомъ Анѣема.* Есть такъ же другая таблица дѣлителей, простирающаяся до 100000, но въ оной показанъ только самой меньшой дѣлитель каждаго числа: оная находится въ Англійскомъ Лексиконѣ *Гарриса*, въ Енциклопедическомъ Лексиконѣ и въ сочиненіи г. *Ламберта*, о которомъ мы сказали въ членѣ 40; оная продолжена даже въ семъ сочиненіи до 102000. (4)

(4) Сіе г. *Ламберта* сочиненіе издано такъ же въ Лиссабонѣ въ 1798 году подъ заглавіемъ: *I. H. Lambert* Supplementa tabularum logarithmicarum et trigonometricarum. Curante *Antonio Felkel.*

ТАБЛИЦА.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 3 6 9 18	1 19	1 2 4 5 10 20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
пе. чис.	пе.	пе.		пе.		пе.				пе.		пе.				пе.		пе.	

67.

Наконецъ надлежитъ замѣтить, что *о* или *нуль*, почитать можно за такое число, которое на всѣ возможныя числа раздѣлиться можетъ; по тому что когда раздѣлишь о на какое бы то ни было число *a*, то частное всегда будетъ о, ибо о разъ *a* или о*a* составляетъ о; и весьма надлежитъ замѣтить, что всякое число умноженное на о ничего не производитъ.

ГЛАВА VII.

О дробяхъ вообще.

68.

Когда говорится, что число, какъ напримѣръ 7, не дѣлится на другое число, напримѣръ на 3, то сїе значитъ токмо то, что частное цѣлымъ числомъ не изображается; и отнюдь не должно думать, что бы не возможно было имѣть о семъ частномъ понятїя.

Представь себѣ только линїю длиною въ 7 футовъ; то никакого сомнѣнїя не будетъ, чтобы не возможно было раздѣлить сїю линїю на 3 равныя части, и имѣть понятїя о длинѣ одной изъ сихъ частей.

69.

И такъ когда мы можемъ имѣть о частномъ числѣ, въ такихъ случаяхъ произшедшемъ, ясное понятїе, хотя оно и не цѣлое число, то сїе ведетъ насъ къ разсматриванїю особаго рода чиселъ, которыя *дробями* или *ломаными числами* называются.

И по сему въ вышеупомянутомъ примѣрѣ, гдѣ 7 на 3 раздѣлено быть должно, имѣемъ ясное понятїе о произходящемъ оттуда частномъ числѣ, которое обыкновенно слѣдующимъ образовъ изображается: $\frac{7}{3}$, гдѣ въ верху поставленное число 7 означаетъ дѣлимое число, а въ низу поставленное 3 дѣлителя.

70.

И такъ, когда вообще какое ниесть число a раздѣлить должно на b, то частное изображается чрезъ $\frac{a}{b}$, каковое знакопредставленіе *дробью* называется. И по сему не можно подать лучшаго понятія о таковой дроби $\frac{a}{b}$, какъ сказавъ, что чрезъ оную означается частное, которое произойдетъ, когда верхнее число раздѣлится на нижнее. При чемъ еще примѣчать должно, что во всѣхъ такихъ дробяхъ верхнее число *числителемъ*, а нижнее *знаменателемъ* именуются.

71.

Посему въ вышеупомянутой дроби $\frac{7}{3}$, которая словами изображается такъ: семь третей, 7 есть числитель, а 3 знаменатель; равнымъ образомъ слѣдующія дроби словами изображаются такъ: $\frac{2}{3}$ двѣ трети, $\frac{3}{4}$ три четверти, $\frac{3}{8}$ три восмыхъ, $\frac{12}{100}$ двѣнадцать сотыхъ; но $\frac{1}{2}$ произносится одна половина, а не одна вторая; для того, что $\frac{1}{2}$ собственно есть частное, которое произойдетъ, когда 1 раздѣлится на двѣ равныя части, но каждая изъ сихъ частей, какъ то извѣстно, половиною называется.

72.

Чтобы достигнуть къ совершеннѣйшему познанїю о свойствѣ дробей, разсмотримъ во первыхъ тотъ случай, когда верхнее число равно нижнему, или числитель равенъ знаменателю, какъ $\frac{a}{a}$: поелику чрезъ сїе означается частное произходящее отъ раздѣленїя a на a, то явно, что сїе частное есть точно 1; слѣдовательно дробь $\frac{a}{a}$ равна 1 или цѣлому; а потому всѣ слѣдующїя дроби:

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, и такъ далѣе, равны между собою, и каждая изъ нихъ равна 1 или цѣлому.

73.

Поелику каждая дробь, коея числитель равенъ знаменателю, равна единицѣ, то всѣ такїя дроби, которыхъ числители меньше знаменателей, суть меньше единицы. Ибо когда меньшее число раздѣлится на большее, то выдетъ дробь меньшая единицы; напримѣръ: когда линїю длиною въ два фута разсѣчемъ на три равныя части; то одна часть безъ сомнѣнїя будетъ меньше одного фута; изъ чего явствуетъ, что $\frac{2}{3}$ меньше 1, и сїе по тому, что числитель 2 меньше знаменателя 3.

74.

Естьли напротивъ того числитель больше знаменателя, то дробь будетъ больше единицы. И по сему $\frac{3}{2}$ больше 1, потому что $\frac{3}{2}$ равны $\frac{2}{2}$ съ $\frac{1}{2}$; и какъ $\frac{2}{2}$ равны 1; по сему $\frac{3}{2}$ равны $1\frac{1}{2}$, то есть цѣлому съ одною половиною. Равнымъ образомъ $\frac{4}{3}$ равны $1\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$ равны $1\frac{2}{3}$, а $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

И вообще въ сихъ случаяхъ надлежитъ только верхнее число раздѣлить на нижнее, и къ частному присоединить дробь, коея числитель равенъ былъ бы остатку, а знаменатель равенъ дѣлителю. Ежели данная дробь есть, напримѣръ $\frac{43}{12}$, то раздѣливъ 43 на 12, получимъ въ частномъ 3, а въ остаткѣ 7; изъ чего заключаю, что $\frac{43}{12}$ равны $3\frac{7}{12}$.

75.

Изъ сего видно, какимъ образомъ дроби, коихъ числители больше знаменателей, разрѣшить можно на двѣ части, изъ коихъ одна есть число цѣлое, а другая дробь, у которой числитель меньше знаменателя. Таковыя дроби, коихъ числитель больше знаменателя, называются *неправильными*, для того, что оныя содержатъ одно или болѣе цѣлыхъ. Напротивъ того *правильными дробями* называются тѣ, у которыхъ числитель меньше знаменателя, и кои слѣдовательно меньше 1 или цѣлаго.

76.

О свойствѣ дробей обыкновенно предлагается еще другое понятїе, которое не мало служить можетъ къ объясненїю сего дѣла. Напримѣръ, естьли примемъ въ разсужденїе дробь $\frac{3}{4}$, то увидимъ, что оная въ три раза больше $\frac{1}{4}$; но знаменованїе дроби $\frac{1}{4}$ состоитъ въ томъ, что когда 1 раздѣлишь на 4 равныя части, то одна такая часть будетъ величина оной; а потому когда возмутся три такїя части, то оныя вмѣстѣ составятъ дробь $\frac{3}{4}$.

Такимъ же образомъ разсматривать можно всякую другую дробь, какъ напримѣръ $\frac{7}{12}$: когда 1 раздѣлишь на 12 равныхъ частей, то 7 такихъ частей составятъ предложенную дробь.

77.

Изъ сего самаго образа представлять дроби и произошли вышеупомянутыя наименованїя *числителя* и *знаменателя*; ибо въ предъидущей дроби $\frac{7}{12}$ нижнее число показываетъ, что единица на 12 равныхъ частей раздѣлена быть долженствуетъ; и слѣдовательно оно означаетъ или знаменуетъ сіи части, почему и прилично наименовать его *знаменателемъ*.

А поелику верхнее число 7 показываетъ, что для полученія величины оной дроби надлежитъ взять или собрать 7 такихъ частей, и что слѣдовательно оно такъ сказать счисляетъ сіи части, по чему и прилично назвать его *числителемъ*.

78.

Поелику удобно понять можно, что значитъ $\frac{3}{4}$, когда мы знаемъ значеніе $\frac{1}{4}$, того ради дроби, коихъ числитель 1, мы почитать можемъ за основаніе всѣхъ прочихъ дробей. Таковыя дроби суть слѣдующія:
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, и такъ далѣе; и надлежитъ замѣтить что сіи дроби непрестанно уменьшаются; ибо чѣмъ на большее число частей единица раздѣлена будетъ, тѣмъ менѣе будутъ сіи части.

И такъ $\frac{1}{100}$ меньше, нежели $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{1000}$ меньше, нежели $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ меньше, нежели $\frac{1}{1000}$.

79.

Изъ сего явствуетъ, что чѣмъ больше увеличится таковыхъ дробей знаменатель, тѣмъ меньше будетъ величина оныхъ. Откуда раждается вопросъ: не можно ли знаменателя сего взять столь великимъ, чтобы дробь совсемъ изчезла и въ ничто обратилась? Я говорю, что сїе не возможно; ибо на сколько бы равныхъ частей единица, напримѣръ длина одного фута, раздѣлена ни была, однако части сїи всегда будутъ имѣть нѣкоторую величину, и слѣдовательно никогда въ ничто не обратятся.

80.

Хотя и правда, что когда длина одного фута раздѣлится, напримѣръ, на 1000 равныхъ частей, то оныя едва глазами видѣть можно будетъ: но однако же когда на оныя смотрѣть будешь въ хорошей микроскопъ, то онѣ покажутся толь велики, что могутъ еще быть раздѣлены на 100 и болѣе частей.

Между тѣмъ здѣсь совсемъ не входитъ въ разсужденїе то, что мы въ состоянїи сдѣлать, или то, что мы на самомъ дѣлѣ дѣйствительно изполнить можемъ, и такъ же то, что еще зрѣнїю нашему подвержено; но паче дѣло идетъ о томъ, что само собою возможно. И такъ нѣтъ никакого сомнѣнїя, что какъ бы великъ знаменатель взятъ ни былъ, однако дробь никогда вовсе изчезнуть, или въ ничто, или въ о обратиться не можетъ.

81.

Поелику дроби совсемъ изчезнуть не могутъ, какъ бы знаменатели ихъ ни увеличились, но сохраняютъ всегда еще нѣкоторую величину, и слѣдовательно рядъ дробей въ членѣ 78 написанныхъ безпредѣльно продолжаться можетъ; сей ради причины говорится, что знаменатель долженъ быть безконеченъ или безконечно великъ, дабы дробь въ о или въ ничто обратилась: ибо слово *безконечность* не иное что здѣсь значитъ, какъ то, что упомянутый рядъ дробей никогда не окончится.

82.

Дабы представить сіе весьма основательное понятіе, употребляется знакъ ∞, которой посему безконечно великое число означаетъ; и для того можно сказать, что дробь $\frac{1}{\infty}$ есть настоящее ничто, по той причинѣ, что дробь до тѣхъ поръ въ ничто обратиться не можетъ, пока знаменатель не увеличится до безконечности.

83.

Сїе понятїе о безконечности, тѣмъ наипаче примѣчанїя достойно, что оное выведено изъ первыхъ началъ нашихъ познанїй, и что оно въ послѣдствїи будетъ для насъ весьма важно. Даже уже и здѣсь можемъ мы вывести изъ него сколь изрядныя, столь же и вниманїя нашего достойныя слѣдствїя. Поелику дробь $\frac{1}{\infty}$ показываетъ частное произходящее отъ дѣленїя 1 на ∞, и мы знаемъ такъ же, что когда дѣлимое 1 на частное число $\frac{1}{\infty}$ или 0, какъ мы прежде видѣли, раздѣлится, то выдетъ дѣлитель ∞; и изъ сего получаемъ мы новое понятїе о безконечности, а именно, что оная произходитъ, отъ раздѣленїя 1 на 0; чего ради по справедливости сказать можно, что 1 раздѣленная на *0* означаетъ безконечно великое число или ∞.

84.

Здѣсь надлежитъ еще опровергнуть довольно обыкновенное заблужденїе: многїе утверждаютъ, что безконечно великое количество увеличено уже быть не можетъ; но сїе мнѣнїе не согласуется съ вышеупомянутыми твердыми основанїями.