

Лрони

Изяснение способа
построению неопределённых
уравнений

1802 года.

С ъ д о з в о л е н і я

Санктпетербургской Ценсуры.

00684

ЕГО СІЯТЕЛЬСТВУ,

ДѢЙСТВИТЕЛЬНОМУ ТАЙНОМУ СОВѢТНИКУ,

СЕНАТОРУ,

ЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА

СОВѢТА ЧЛЕНУ,

КОМЕРЦІИ МИНИСТРУ,

Главному Департамента водяныхъ коммуникацій и

Экспедиціи у строенія дорогъ въ Государствѣ

ДИРЕКТОРУ

и разныхъ орденовъ

КАВАЛЕРУ,

ГРАФУ НИКОЛАЮ ПЕТРОВИЧУ

РУМЯНЦОВУ,

Милостивому Государю.

СІЯТЕЛЬНѢЙШІЙ ГРАФЪ

Милостивый Государь !

Опытъ въ преподаваніи Аналитики удостовѣрилъ меня, что способъ разсматриванія и построенія уравненій втораго порядка , предлагаемый Господиномъ Прони , есть наиудобнѣйшій и наикратчайшій ; сугубая польза сія рѣшила меня сдѣлать оному переводъ , которой осмѣливаюсь посвятить имени Вашему ; щастливъ , еслии благоволите оной принять съ таковымъ же снисхожденіемъ съ каковымъ усердіемъ поощряете науки и дозволите именоваться

*сѣ наиглубочайшимъ высокопочитаніемъ и душевною
признательностію ,*

СІЯТЕЛНѢЙШІЙ ГРАФЪ

Милостивый Государь



В А Ш И М Ъ

покорнѣйшимъ и преданнѣйшимъ слугою

Николай Петряевъ.

ПРЕДЪУВѢДОМЛЕНІЕ СОЧИНТЕЛЯ.

Вещественный предмѣтъ Геометрическаго порядка составляетъ не рѣдко наименьшую часть его пользы: цѣль предложенія онаго клонится должна къ посѣянiю въ умѣ питомца семянъ свѣденія, коего ученіе прочихъ раздѣленій науки было бы однимъ исполкованіемъ. Такимъ то образомъ приобучаѣтъ его, съ первыхъ шаговъ извиваѣтъ понятiя свои однѣ около другихъ, сравниваѣтъ, познаваѣтъ отношенія, и пр: и составляѣтъ изъ различныхъ вѣтвей познаній систему связную и нераздѣльную, столь же споспѣшествующую непосредственному ихъ употребленію въ нашихъ необходимостяхъ сколь приличную къ усовершенствованію искусства разсуждаѣтъ.

Способъ господина Шеци, коего предлагаю здѣсь исполкованіе, кажется удобнымъ доставитъ примѣръ сей сугубой пользы. Онѣ представляетъ средство простое и къ удержанію въ памяти удобное, строитъ кривыя линіи втораго порядка какое бы ни было начало координатъ и распространяетъ въ тоже время наибильнѣйшій лучъ свѣта, какъ на общія свойства сихъ кривыхъ линій, равно и на отношенія связующія ихъ между собою или съ другими Алгебранческими кривыми линіями. Что бы обрести, подѣ сими двумя видами, наибольшую пользу въ семъ издаваемомъ исполкованіи, началъ я съ объясненія вида общаго образца Алгебранческихъ уравненій о двухъ неопредѣленныхъ, что ведетъ естественно къ предложенію о составленіи Аналитическаго приугольника и къ объясненію употребленія его находящъ всѣ члены

Алгебраическаго уравненія о двухъ неопредѣленныхъ. Такъ виденъ союзъ сопрягающій общій видъ второго порядка съ видомъ всѣхъ прочихъ.

Разсматриваю потомъ различные случаи полного неопредѣленнаго уравненія второго порядка, и различныя образованія происходящей изъ него кривой линѣи, не полагая, что имѣютъ какое либо понятіе объ особенныхъ родахъ сихъ кривыхъ линѣи и токмо разсматриваю ихъ какъ различныя измѣненія одной кривой линѣи представленной общимъ уравненіемъ. Образъ сей изслѣдованія тѣмъ удовлетворительнѣе, что *свойственная разность* каждого рода выводится изъ разсматриванія единственнаго и крайнѣ простаго. Въ самомъ дѣлѣ если разрѣшатъ уравненіе относительно къ одному изъ неопредѣленныхъ, реченная теперь *свойственная разность* дана будетъ всегда множителемъ квадрата другаго неопредѣленнаго стоящаго подъ радикаломъ, а количество внѣ онаго опредѣлитъ не посредственно положеніе поперечника.

Настоятъ, когда ишло дѣло о второмъ поперечникѣ Иперболы, дасть почувствовать въ какомъ означеніи былъ онъ невозможенъ и какъ надлежало его разсматривать что бы найти ему подлинную величину.

Вошелъ также въ нѣкоторыя подробности, для объясненія какъ могли существовать Ассентотическія линѣи и какимъ образомъ онѣ производились, по нѣкоторымъ приуголовленіямъ, изъ члена уравненія имѣющаго переменнаго дѣлителя.

Изслѣдовавъ различныя образованія данныя общимъ уравненіемъ, требовала необходимость доказать пожатіе представляемыхъ ими кривыхъ линѣи съ извѣстными уже подъ названіемъ *коническихъ сѣтеній*. Употребилъ для сего

теорему удобную болѣе пояснить умозрѣніе Алгебраическихъ кривыхъ линій всѣхъ порядковъ и копорую можно даже почесъ за сѣмя, коего прозябеніе доспавляетъ всѣ свойства сихъ кривыхъ линій. Доказательство предлагаемое сей теоремъ для втораго порядка, упоиребительно во всѣхъ прочихъ съ крайнею легкостію. Могъ бы удовлетворить тому же предмѣту перемѣщеніемъ о сей, но съ гораздо меньшею пользою для начинающихъ: шествіе сіе представило бы даже видъ правильности или ошупи, ибо полагаетъ что вѣдомъ, или предбузнаваемъ выборъ положенія осей для доспигенія къ предполагаемому предмѣту.

Такова сущность сего малаго опыта и жаль что искусной Инженеръ, коему обязаны въ разсужденіи сего мыслию не имѣлъ времени собрать его. Трудъ сей маловаженъ въ сравненіи съ заключающимъ Геометрическія понятія необходимыя для художниковъ принаровленные къ понятіямъ ихъ ума и къ языку сего послѣдняго. Такого сочиненія должно еще ожидать, и польза его тѣмъ будетъ ошупипельнѣе чѣмъ болѣе спанутъ поощрять художества.

Особенныя обстоятельства доепавили уже мнѣ случай заняться различными предложеніями такого сочиненія: намѣренъ смотря по досугу, собирать сіи отрывки, что бы составилъ изъ нихъ сочиненіе связное и порядочное. Однако, поелику таковой трудъ можетъ быть неоконченъ отъ селъ до нѣкоего времени, издамъ напередъ отдѣленіе разсуждающее о повѣрхностяхъ перваго и втораго порядка. Умозрѣніе повѣрхностей сихъ имѣетъ наивеличайшее сходство съ умозрѣніемъ линій того же порядка, и есть, такъ сказать, одно распространіе способа здѣсь изслѣдываемаго. Увидятъ въ самомъ дѣлѣ, что какъ линіи втораго порядка едино-

образны относительно къ прямымъ опредѣляемымъ нѣкоторымъ образомъ, такъ и поверхности второго порядка единообразны въ разсужденіи плоскостей опредѣляемыхъ сходственнымъ образомъ, и также съ прочими свойствами.

Уповаю, что пожестьво способа въ предложеніяхъ, кои необыкли обозрѣвать тѣмъ же взглядомъ, подспрекаетъ любопытство, и соспѣшествуетъ развертыванію понятій, облегчая сближенія и сравненія.

Реченныя поверхности заключають большую часть употребляемыхъ обыкновенно въ тескѣ камней и вообще въ Архитектурѣ: подробности, въ кои вовлечетъ изслѣдованіе ихъ о начертаніяхъ и о сѣченіи твердыхъ тѣлъ, дополняютъ познанія необходимыя художникамъ для понятія и сочиненія зданій всякаго рода *большихъ тертежей*. Постараюсь предложить сему основанія несомнѣнныя, и чистое понятіе о семъ родѣ нарѣчія, коимъ представляемъ двумя измѣреніями, всѣ виды понимаемые въ пространствѣ, и коимъ въ сѣчѣніи при. Нарѣчіе сіе могло бы наименоваться *Геометрією о трехъ измѣреніяхъ*. Опытъ художествъ призываетъ насъ къ тому непрестанно; и до селѣ, употребленіе онаго было, у многихъ художниковъ, токмо заключеніемъ слабой снуги. Время уже чшобы прилѣпились они наконецъ къ наукамъ приличнымъ вознести ихъ превыше навыка: ибо, послѣку званія, кои могутъ нести на себѣ въ обществѣ, обнажаются предѣловъ, стыдно естли дарованія ихъ тѣснѣе будутъ ограничены нежели должествующія проижеканъ опытихъ выгоды и преимущества.

ИЗЪЯСНЕНІЕ

СПОСОБА

Построенію неопредѣленныхъ уравненій
относящихся къ сѣченіямъ коническимъ.

1. Рѣшеніе Геометрическихъ задачъ ведетъ часто ^{о родѣ коли-}къ уравненіямъ о двухъ неопредѣленныхъ, могущимъ ^{чествъ соста-}представиться ^{в л я ю щ е м ъ}подъ разнообразными видами и за- ^{Алгебраичес-}ключать переменныя количества различныхъ родовъ. ^{кія уравненія.}Во всемъ послѣдующемъ полагаемъ будемъ, что ни одно изъ количествъ сихъ не принадлежитъ къ называемымъ пакъ *вышняго порядка*, то есть къ таковымъ, кои опредѣлены быть могутъ въ окончательныхъ членахъ не иначе, какъ чрезъ выраженія Тригонометрическія, Логариѣмическія, и пр. Постоянныя же количества, могутъ быть всякаго рода и уравненіе будетъ ~~не менѣе для сего имѣть~~ ^{свое}свойство называемыхъ *Алгебраическими*.

2. Въ Алгебраическомъ уравненіи, можетъ быть ^{Уравненіе Алгебраическое,}одинъ или многіе члены имѣющими переменныхъ ^{дѣ-}лителей и переменныя радикалы. ^{можетъ всегда воспріять видъ единомѣрный.}

Можно всегда уничтожить дѣлителей, помножая на каждого всѣ члены онаго не имѣющіе, и также истребить радикалы по извѣстнымъ способамъ.

Общее уравне-
ніе всѣхъ Ал-
гебраическихъ
кривыхъ ли-
ній.

3. Алгебраическое уравненіе безъ дѣлителя и радикаловъ, всегда особенный случай такового:

$$\left. \begin{aligned} & ay + by^2 + cy^3 + \text{и пр.} \dots\dots\dots + ky^n \\ & + a'x + b'x^2 + c'x^3 + \text{и пр.} \dots\dots\dots + k'x^n \\ & + a''yx + b''yx^2 + c''yx^3 + \text{и пр.} \dots\dots\dots + k''yx^n \\ & + a'''y^2x + b'''y^2x^2 + c'''y^2x^3 + \text{и пр.} \dots\dots\dots + k'''y^2x^n \\ & + a''''y^3x + b''''y^3x^2 + c''''y^3x^3 + \text{и пр.} \dots\dots\dots + k''''y^3x^n \\ & + \dots\dots\dots \\ & + Ay^n + By^n x^2 + Cy^n x^3 + \text{и пр.} \dots\dots\dots + k^{(n)}y^n x^n \\ & + G. \end{aligned} \right\} = 0$$

Какъ состав-
лено такое
уравненіе.

Уравненіе сіе хотя и кажется запутаннымъ съ перваго взгляда, однако составленіе онаго весьма просто: первой горизонтальной рядъ, содержитъ всѣ степени переменнаго у, второй, всѣ степени переменнаго х, а слѣдующіе заключаютъ вообще произведенія всѣхъ степеней переменнаго х, на первую, на вторую, на третью, и пр. степень переменнаго у.

4. Легко усмотрѣть, что такое распоряженіе, заключаетъ всѣ возможныя совокупленія произведеній степеней переменныхъ х и у, и такимъ образомъ, когда уравненіе, какъ полагали сіе освободится отъ переменныхъ дѣлителей и отъ переменныхъ радикаловъ не останется въ немъ ни одного изъ членовъ, которой не отнесся бы къ одному изъ таковыхъ предвѣдущаго уравненія.

Объ аналити-
ческомъ три-
угольникѣ.

5. Довольно удобно располагать всѣ члены сего общаго уравненія въ слѣдующемъ видѣ, коему дали наименованіе Аналитическаго триугольника.

A	b						B
	1	x	x ²	x ³	x ⁴	x ⁵	
	y	yx	yx ²	yx ³	yx ⁴	yx ⁵	
	y ²	y ² x	y ² x ²	y ² x ³	yx ⁴		
c	y ³	y ³ x	y ³ x ²	y ³ x ³			
c'	y ⁴	y ⁴ x	y ⁴ x ²				
	y ⁵	y ⁵ x					
C	y ⁶						

Единица, коею начинается первой верьхней горизонтальной рядъ, представляетъ постоянной членъ G уравненія претьяго параграфа: извѣстно что раздѣляя всѣ члены уравненія на сей постоянной, здѣлается онъ равнымъ единицѣ. Выпустили постоянныхъ множителей прочихъ членовъ, коихъ должно всегда полагать существующими.

6. Членами перваго, втораго, претьяго, и пр: Что разумѣютъ чрезъ члены, чравненія и кривыя линіи различнаго порядка

порядка именуютъ тѣ, въ коихъ сума показателей неопредѣленныхъ равна 1, 2, 3, и пр: И такъ ay , bx , члены перваго порядка; ay^2 , bux , cx^2 , втораго; ay^3 , bxy^2 , cx^3 , и пр: претьяго и такъ далѣе. Явствуетъ что порядокъ члена не зависитъ отъ его постоянного множителя. Члены совершенно постоянные могутъ быть названы порядка 0, для того что считаются умноженными на x^0 , или на y^0 .

Называютъ также уравненіемъ неопредѣленнымъ перваго, втораго, претьяго и пр: порядка, таковое, въ коемъ самая большая величина степени порядка членовъ равна 1, 2, 3, и пр.

Кривая линія построенная по таковому уравненію, именуется по сходству кривою линіею перваго, втораго, претьяго, и пр: порядка.

7. Чтобы имѣть всѣ члены полного уравненія всякаго порядка, чрезъ посредство Аналитическаго

Употребленіе Аналитическаго приуголь

ника въ обре-приугольника пятого параграфа, должно провести шеніи всѣхъ членовъ пол-линію соединяющую степени переменнаго x , и переменнаго уравненія y , тогоже порядка; линія сія составитъ сѣ частію таковыхъ АВ и АС приугольникъ, заключающій всѣ искомыя члены.

Употребленіе въ уравненіяхъ третьяго и втораго поряд- Положимъ что желаютъ имѣть всѣ члены общаго уравненія третьяго порядка; соединять какъ упомянуто, степени x^3 и y^3 линією $b's'$; и въ приуголь-никъ $Ab's'$ будущіе члены,

$$1 + y + x + y^2 + x^2 + xy + y^3 + x^3 + yx^2 + y^2x,$$

кои помноженные на постоянныхъ множителей и уравненные нулю, доставятъ очевидно всѣ члены, кои можно составить степенями двухъ неопределенныхъ, ошѣ порядка нуля до третьяго.

8. Члены общаго уравненія втораго порядка найдутся соединяя степени x^2 и y^2 линією; и получатъ въ приугольникъ Abc слѣдующіе члены,

$$1 + y + x + y^2 + x^2 + xy$$

кои помноженные на постоянныхъ множителей и уравненные нулю, дадутъ

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0.$$

9. Уравненіе сіе включаетъ, какъ явствуетъ, всѣ члены порядковъ 0, 1 и 2, кои можно составить цѣлыми степенями двухъ неопределенныхъ x и y . Займемся теперь построеніемъ различныхъ случаевъ, имъ представляемыхъ. Изысканіе сіе включаетъ только крайне малую часть таковыхъ, коимъ могло бы подать поводъ разсмашириваніе уравненій всѣхъ порядковъ; польза его распространяется однако, на множество Геометрическихъ вопросовъ.

10. Естьли изъ уравненія параграфа 8,

$$(A) \dots y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0$$

выручатъ знаменованіе переменнаго y , получатъ,

$$(B) \dots y = -\frac{1}{2}(bx + c) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{4}b^2 - a\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}bc - f\right)x + \frac{1}{4}c^2 - g\right)}.$$

Общее уравне-
ніе второго
порядка, о
двухъ неопре-
дѣленныхъ x ,
 y , общее зна-
менованіе пе-
ременнаго y .

Всѣ постоянныя количества почищаются выражен-
ными въ числахъ, но естьли бы пожелали предста-
вить ими линѣи, надлежало бы обратиться члены въ

однородныя сдѣлавъ въ уравненіи (A), $a = \frac{a'}{q}$; $b = \frac{b'}{q}$
 $g = g'q'$: сокращенія въ числахъ вообще предпочли-
тельны, какъ увидятъ сіе въ употребленіяхъ.

11. Замѣтимъ что количества a, b, c, f, g поло-
жены были, въ уравненіи восьмага параграфа, для
большой общественности, всѣ положительными; но
естьли бы, въ особенномъ случаѣ, нѣкоторые изъ
нихъ были отрицательныя, въ то время должно бы
переменить знаки ихъ въ уравненіи (B) вездѣ гдѣ
небыли бы они возвышены до квадрата. Показавъ
напримѣръ, что имѣютъ уравненіе

Замѣчаніе о
знакахъ мно-
жителей при-
нѣрь.

$$y^2 + (n^2 - p)x^2 + 2pxy - 2my + (q - 2mn)x + m^2 - r = 0;$$

сравнивалъ его почленно съ уравненіемъ (A), имѣютъ

$$\begin{aligned} a &= n^2 - p \\ b &= 2p \\ c &= -2m \\ f &= q - 2mn \\ g &= m^2 - r \end{aligned}$$

и знаменованія сіи поставленныя въ уравненіи (B),
переменяютъ его въ

$$y = m - px \pm \sqrt{(px^2 - qx + r)}.$$

поже должно произойти со всякимъ другимъ примѣ-
ромъ.

Знаменованіе
перемѣннаго у,
состоитъ изъ
двухъ частей:
построеніе
первой.

12. Приступая къ построению уравненія (В) замѣчаю, что знаменованіе перемѣннаго у состоитъ изъ двухъ частей, изъ коихъ одна есть $-\frac{1}{2}(bx+c)$; а другая количество стоящее подъ радикаломъ. Займемся сперва количествомъ, $-\frac{1}{2}(bx+c)$.

Пускай будутъ АХ и АУ (фиг. 1.) оси координатъ х и у; сіи оси могутъ составлять между собою какой нибудь уголъ; а для большей удобности, будемъ здѣсь ихъ полагать подъ прямымъ, направленія АХ и АУ будучи направленіями положительныхъ координатъ. Если опложимъ $AF = \frac{c}{2}$, начершимъ FG паралельную къ АХ и проведемъ FH, составляющую съ FG уголъ коего бы касательная была равною $-\frac{1}{2}b$, и параллельную PH къ AF, получатъ полагая $AP = x$,

$$PH = -\frac{1}{2}(bx+c).$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣютъ въ прямоугольномъ тригольникѣ GFH слѣдующую соразмѣрность, въ коей пріемлютъ полупоперечникъ таблицъ = 1:

$$1 : \text{кас GFH} :: FG : GH = FG \times \text{кас GFH}.$$

но $FG = x$, и $\text{кас GFH} = -\frac{1}{2}b$, по положенію построенія, слѣдственно

$$GH = -\frac{1}{2}bx$$

Построеніе съ другой стороны $PG = AF = -\frac{1}{2}c$, слѣдственно

$$PG + GH = PH = -\frac{1}{2}(bx+c).$$

сіе употреблено
во всѣхъ Геометрическихъ
выраженіяхъ
перваго порядка.

И такъ PH представляетъ первую часть знаменованія перемѣннаго у, въ уравненіи (В), и способъ по коему теперь оную построили, долженъ простираться на всѣ уравненія о двухъ неопредѣленныхъ перваго порядка.

Замѣчаніе и
примѣръ от-
носящіеся къ
знакамъ мно-
жителей.

13. Замѣтимъ что помѣстили точку F подъ точкою А и точкою Н подъ точкою G, для того что количество с, имѣвшее положительной знакъ въ уравненіи (А), воспріяло отрицательной въ построен-

номъ (В), и тоже произошло съ количествомъ b , чего ради $-\frac{1}{2}b$ представляетъ отрицательную касательную соотвѣтствующую отрицательному углу (1), ко-
рой слѣдовательно, долженъ считаться подъ линією FG.

И такъ, въ случаѣ уравненія параграфа 11 го пер-
вая часть знаменованія переменнаго у будучи $m-nx$;
должно, фиг: 2. взявъ $AF = m$, и слѣдовательно опло-
жишь почку F подъ почкою A, потому что знаме-
нованіе AF положительное; но, начертя паралельную
FG къ AX, провести линію FX, составляющую съ FG
уголъ, коего бы касательная была $=-n$, каковая ли-
нія FN пройдетъ подъ линією FG со стороны x по-
ложительныхъ, потому что касательная угла GFN
отрицательная. Очевидно, въ самомъ дѣлѣ, что по-
лагая $AP = x$, получимъ $PN = GP - GN = AF - GN =$
 $m - nx$.

14. Уразумѣвъ надлежащимъ образомъ построение сей Предъидущее
построение до-
ставляетъ по-
перечникъ кри-
вой линіи.
первой части знаменованія переменнаго у, присту-
пимъ теперь къ построению второй сплющей подъ
радикаломъ. Усмаатриваемъ потчасъ, что количество
сіе подъ радикаломъ, имѣя знакъ $\pm$, должно у каждой
почки N, наноситься съ верьху и съ низу линіи FN,
отъ N до M. Слѣдственно кривая линія представлен-
ная уравненіемъ (В) единообразная относительно къ
линіи FN, то есть, что FN разсѣкаетъ на двѣ рав-
ныя части NM (фиг. 3 и слѣ.) всѣ линіи MM имѣю-
щія предѣлами кривую линію и проведенныя парал-
лельно къ AY. Всякая линія имѣющая сіе свойство,
въ какой нибудь кривой линіи, имѣнуется, ея *попе-
речникомъ*; и такъ FN есть *поперечникъ* кривой линіи
представленной уравненіемъ (В).

(1) Известно, что касательная, бываетъ отрицательною, 1 е, въ слу-
чаѣ тупаго угла положительнаго, 2 е, въ случаѣ остраго угла
отрицательнаго.

Определение
точекъ въ ко-
ихъ попере-
никъ сей раз-
сѣкаетъ кри-
вую линію; сіе
опредѣленіе
производится
уравненіемъ ну-
лю вторую
часть знаме-
нованія не-
предѣленнаго
у.

15. Одинъ изъ первѣйшихъ предметовъ изыска-
ній, кои слѣдуетъ произвести надъ линіею FN , со-
стояннѣ въ показаніи, въ какихъ точкахъ пересѣкаетъ
она кривую линію. Очевидно, что въ таковыхъ, зна-
менованія линіи, кои должно оплохить по ту и по
другую сторону линіи FN должны быть ничто, и
слѣдовательно количество подъ радикаломъ доста-
вляющее сіи знаменования, должно уничтожиться.
Слѣдственно должно имѣть.

$$(C) \dots (\frac{1}{4}b^2 - a)x^2 + (\frac{1}{2}bc - f)x + \frac{1}{4}c^2 - g = 0.$$

Взявъ $\frac{\frac{1}{2}bc - f}{\frac{1}{4}b^2 - a} = h$ и $\frac{\frac{1}{4}c^2 - g}{\frac{1}{4}b^2 - a} = k$, предвѣдущее уравненіе
обратиши въ

$$x^2 + hx + k = 0.$$

Откуда находятъ

$$(D) \dots x = -\frac{1}{2}h \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2 - k\right)}.$$

Различныеслу-
чай проослѣ-
дствіе изъ предъ-
идущаго равен-
ства, завися-
щіе отъ раз-
ности между
квадратомъ
множителя
произведенія
ху и учетве-
реннѣмъ мно-
жителемъ ква-
драта x^2 въ
общемъ урав-
неніи; кото-
рая именует-
ся, *свойствен-
ною разностию*.

16. Знаменованіе сіе переменнаго x будетъ, или
подлинное, или невозможное; что покажетъ, что FN
должна или не должна имѣть пресѣченія съ кривою
линіею; но явствуетъ что, во всѣхъ случаяхъ, зна-
менованіе сіе будетъ зависѣть существенно, отъ
знаменованія количества $\frac{1}{4}b^2 - a$, стоящаго въ знаме-
натель дробей h и k . И такъ разсмотримъ уравненіе
(D) въ различныхъ состояніяхъ количества $\frac{1}{4}b^2 - a$,
или количества $b^2 - 4a$, которое можетъ быть ни
чѣмъ, отрицательнымъ или положительнымъ: назо-
вемъ оное *свойственною разностию*.

17. Когда $\frac{1}{4}b^2 - a$ ничто, или когда имѣютъ $\frac{1}{4}b^2 = a$,
случай въ ко-
емъ *свойствен-
ная разность*
ничто.

h , дѣлается безконечнымъ, потому что $h = \frac{\frac{1}{2}bc - f}{\frac{1}{4}b^2 - a}$;
 k , дѣлается также бесконечнымъ, но порядка мень-
шаго нежели hh , и уравненіе (D) переменяется въ

$x = -\frac{1}{2}h \pm \frac{1}{2}h = -\frac{1}{2}\infty \pm \frac{1}{2}\infty$. Случай сей заключаетъ очевидно таковой въ коемъ $b = 0$ и $a = 0$, то есть въ коемъ обоимъ членомъ ax^2 и bxy нѣтъ въ уравненіи (A).

Итакъ представляется здѣсь для x два знаменования, изъ коихъ одно ничто, а другое безпечно; но можетъ случиться, что первое не есть ничто въ самой вещи, но количество окончательное исчезнувшее чрезъ введеніе безконечности въ уравненіе (D), каковое заставило отбросить членъ k при членѣ h^2 : дабы удостовѣриться существуетъ ли въ самомъ дѣлѣ таковое знаменование, должно по положенію, что $\frac{1}{4}b^2 - a = 0$, отбросить въ уравненіи (C) членъ $(\frac{1}{4}b^2 - a)x^2$ и положить уравненіе

$$(\frac{1}{2}bc - f)x + \frac{1}{4}c^2 - g = 0;$$

Откуда вырываютъ $x = -\left(\frac{\frac{1}{4}c^2 - g}{\frac{1}{2}bc - f}\right)$.

И знаменование сіе переменнаго x будетъ соотвѣтствовать точкѣ a , фиг. 3 и 4. кривая линія ^{Направленіе} ^{безконечныхъ} ^{вѣтвей кривой} ^{линіи въ семъ} ^{случаѣ.} простираясь отъ точки сей, будетъ имѣть двѣ безконечныя вѣтви, распространяющіяся, или въ сторону bc , фиг. 3.; или въ сторону $b'c'$ фиг. 4, смотря потому меньшимъ ли знаменованиямъ, или большимъ нежели AB будутъ соотвѣтствовать невозможныя знаменования переменнаго y : очевидно въ самомъ дѣлѣ, что ордината Ba касается къ кривой линіи, потому что пресѣкаетъ ее въ двухъ точкахъ безконечно близкихъ, и въ случаѣ о коемъ разсуждаемъ, гдѣ $\frac{1}{4}b^2 = a$, уравненіе (B) обращается въ

$$y = -\frac{1}{2}(bx + c) \pm \sqrt{(\frac{1}{2}bc - f)x + \frac{1}{4}c^2 - g}.$$

И такъ знаменование переменнаго x удовлетворяющее $(\frac{1}{2}bc - f)x = -(\frac{1}{4}c^2 - g)$, или $x = -\frac{(\frac{1}{4}c^2 - g)}{\frac{1}{2}bc - f}$, по-

казываетъ точку отдѣляющую всѣ невозможныя знаменования перемѣннаго у отъ всѣхъ подлинныхъ сего же у. А посему есѣ какое нибудь знаменование перемѣннаго х большее нежели $\frac{g - \frac{1}{4}c^2}{\frac{1}{2}bc - f}$ невозможно, кривая линѣя относится тогда къ фигурѣ 4, а въ прошивномъ случаѣ, къ фигурѣ 3.

Обстоятельство въ коемъ обращается она въ прямую.

Можетъ случиться, сверхъ условія $\frac{1}{4}b^2 = a$, что имѣютъ еще $\frac{1}{2}bc = f$, и въ случаѣ семъ данное теперь знаменование перемѣннаго х, было бы бесконечнымъ, то есть что точка а отстояла бы бесконечно отъ точки F; но тогда уравненіе (B) перемѣняется въ

$$y = -\frac{1}{2}(bx \mp c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - g},$$

и кривая линѣя выраженная имъ не иное что какъ система двухъ прямыхъ параллельныхъ къ FH.

Уравненіе $\frac{1}{2}bc = f$, существуя, естѣли членовъ $ax^2 \mp bxy$ нѣтъ въ уравненіи (A), то есть когда имѣютъ $a = 0$ и $b = 0$, условіе $\frac{1}{2}bc = f$, доставляющее $c = \frac{2f}{b}$, дѣлаетъ c бесконечнымъ; но видѣли, параг. 12, что $AF = -\frac{c}{2}$: слѣдственно въ случаѣ семъ, не токмо точка а, бесконечно отдалена отъ F, но еще точка F бесконечно отстоитъ отъ A.

13. Крайне должно осерегаться, что все упомянутое въ предѣдущемъ параграфѣ полагаетъ въ особенности, что одинъ изъ обоихъ квадратовъ y^2 и x^2 имѣетъ множителемъ единицу, что не случилось бы естѣли бы не доставало y^2 , или имѣлъ бы множителя равнаго нулю, членъ ху существуя. Увидимъ вскорѣ построеніе сего послѣдняго.

Случай въ коемъ свойственная разность

19. Въ случаѣ когда разность $\frac{1}{4}b^2 - a$ не есть ничто линѣя FH имѣетъ вообще два пресѣченія съ кри-

вою линією, развѣ когда уравненіе (D) невозможно не есть ничто, случай которой вскорѣ разсмотримъ. положеніе почечекъ пресѣченія бывающихъ въ немъ относительно къ посредней.

Замѣтимъ вѣ началѣ, что обѣ точки пресѣченія вѣ равныхъ разстояніяхъ отъ претвѣй посредней, обрѣщаемой откладывая $x = -\frac{1}{2}h$, потому что съ каждой стороны предѣла разстоянія сего $-\frac{1}{2}h$, должно отложить радикальное количество $\pm \sqrt{\frac{1}{4}hh - k}$ для полученія обоихъ искомыхъ почечекъ пресѣченія.

И такъ, положивъ корни уравненія (D) положительными, должно фиг. 5 и 6 взять на оси Ax часть $AC = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{2}bc \right) / \frac{1}{4}b^2 - a$, отложить съ каждой стороны

точки C, равныя части CB и CB' $= \sqrt{\frac{1}{4}hh - k}$, и проводя чрезъ точки B, C, B' параллельныя къ оси AY, встрѣтятъ они FX вѣ точкахъ aa', гдѣ кривая линія переобнаетъ FH, и вѣ точкѣ O помѣщенной вѣ равномъ разстояніи отъ двухъ предвѣдущихъ.

20. Задѣсь мѣсто замѣтить, что еслии прове- Опредѣленіе дущѣ параллельную rt къ aa' и возьмемъ $OO' = q$, второго поперечника кривой получимъ $hM = HM \pm Nh$. Видѣли, параг. 14, что линія проходящая чрезъ $HM = \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - a \right) x^2 \pm \left(\frac{1}{2}bc - f \right) x + \frac{1}{4}c^2 - g}$; а поелику упомянутую посреднюю $Nh = OO' = q$, имѣютъ $hM = \pm q \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a} x \pm \left(\frac{1}{2}bc - f \right) x \pm \frac{1}{4}c^2 - g$. можно посредствомъ выраженія сего, знать точки р соотвѣстствующія точкамъ пресѣченія г и т линіи rt съ кривою линією; ибо hM будучу вообще разстояніемъ линіи сей rt, до кривой линіи, взятымъ параллельно къ AY, получатъ точки пресѣченія г и т взявъ разстояніе $hM = 0$.

И такъ уравнивъ нулю величину разстоянія hM, обретенную выше сего, взявъ $\frac{1}{2}bc - f = h$ и $\frac{1}{4}c^2 - q^2 - g = k'$, $\frac{1}{4}b^2 - a$

находятъ, для опредѣленія Ar, $x = -\frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{4}hh - k}$.

Опложивъ расстояние $AC = -\frac{1}{2}h$ и съ обѣихъ сторонъ точки C расстоянія $Cr = \sqrt{\frac{1}{4}hh - k'}$, получаютъ точки p .

Слѣдственно линія CO раздѣляетъ rt на двѣ равныя части; а поелику количество $OC' = q$, можетъ быть какимъ нибудь, слѣдуетъ изъ сего, что линія CO раздѣляетъ на двѣ равныя части, всѣ параллельныя къ aa' имѣющія съ обѣихъ сторонъ предѣлами кривую линію; слѣдовательно CO также поперечникъ какъ и FN .

21. Чтобы найти точки пресѣченія $a'' a'''$ поперечника сего съ кривою линією, должно въ уравненіи (B), положить $x = AC = -\frac{1}{2}h - \frac{\frac{1}{4}(f - \frac{1}{2}bc)}{\frac{1}{4}b^2 - a}$ и обратиться оно въ

$$y = \frac{1}{4}bh - \frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{2}bc - f)^2}{\frac{1}{4}b^2 - a} \mp \frac{1}{4}c^2 - g},$$

$$\text{или } (D') \dots y = \frac{1}{4}bh - \frac{1}{2}c \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}hh - k)(\frac{1}{4}b^2 - a)}.$$

Случай въ которомъ есть пресѣченія невозможныя.

22. Явствуетъ съ перваго взгляда, что то или другое изъ уравненій (D) и (D') необходимо невозможно, еслили $\frac{1}{4}b^2 - a$ количество положительное: уравненіе (D) подпадаетъ сему случаю когда $\frac{1}{4}hh - k$ отрицательное, а въ противномъ невозможно уравненіе (D').

23. Когда $\frac{1}{4}b^2 - a$ отрицательное, уравненія (D) и (D') оба подлинныя или оба невозможныя.

Средоточіе кривой линіи опредѣленіе онаго.

Точка пресѣченія O обоихъ поперечниковъ имѣется средоточіемъ кривой линіи; и находится на краѣ линіи $CO = \frac{1}{4}bh - \frac{1}{2}c =$ части предшествовающей радикалу въ равеніи (D') на коей должно опложивъ съ обѣихъ сторонъ точки O , равныя части

Oa'' , Oa''' таковыя чтобы имѣли $Oa'' = Oa''' = \sqrt{-(\frac{1}{4}h^2 - k)(\frac{1}{4}b^2 - a)}$ радикальному количеству уравненія (D').

Легко повѣрить, чрезъ иное разсмащиваніе видѣ линѣи CO ; ибо $CO = Cg + gO = Af + gO = Af + Fg \times \text{кас } gFO$; но $Af = -\frac{1}{2}c$ и $\text{кас } gFO = -\frac{1}{2}b$, пар. (12); кѣ помужѣ $Fg = AC = \frac{1}{2}h$, пар. (19); слѣдственно $CO = \frac{1}{4}bh - \frac{1}{2}c$.

24. Можетъ случиться что имѣютъ $Oa'' = BC$; а чтобы узнать случаи, въ коихъ свойство сіе будетъ имѣть мѣсто, должно сравнить радикалы уравненій (D) и (D'), кои какъ извѣстно, суть знаменія кривой линѣи BC и Oa'' . Произойдетъ изъ сравненія сего $a - \frac{1}{4}b^2 = 1$, уравненіе условное чтобы обѣ линѣи BB' и $a'' a'''$ были равны.

25. Вообще имѣютъ $\frac{Oa''}{BC} = \frac{\sqrt{-(\frac{1}{4}h^2 - k)(\frac{1}{4}b^2 - a)}}{\frac{1}{4}h^2 - k} = \sqrt{a - \frac{1}{4}b^2}$.

очевидно, что когда $a = 0$ или члена ax^2 нѣтъ въ уравненіи (A), членъ bxy существуя, содержаніе $\frac{Oa''}{BC}$, то есть одна изъ сихъ линѣи дѣлается невозможною; поже происходитъ естли $a - \frac{1}{4}b^2$, количество отрицательное: вскорѣ изслѣдуемъ два сіи случая.

Когда BC дѣлается безконечною въ разсужденіи Oa'' , кривая линѣя (фиг. 5) обращается въ кривую (фиг. 3).

26. Линѣи Ba и $B'a'$, касательныя въ кривой линѣи; ибо, пар. (14), всѣ параллельныя кѣ AU пересѣкая кривую линѣю въ двухъ точкахъ помѣщенныхъ единообразно въ разсужденіи FN , или равномерно опстоящихъ отъ сей линѣи; тѣ изъ сихъ параллельныхъ, кои встрѣятъ кривую линѣю токмо въ одной точкѣ, будутъ необходимо ея касательными.

Равенство я общее содер-жаніе выраже-ній доставляю-щихъ прѣстѣ-нія кривой ли-нѣи и попереч-никовъ; случай въ коемъ со-держаніе сіе невозможно, случай въ ко-емъ беспре-дѣльно.

Касательныя на краѣ перь-ваго попереч-ника, паралле-льныя ко вто-рому.

Что происхо-
дитъ съ кри-
вою линіею ко-
гда нѣкопю-
рыя количе-
ства бесконеч-
ны.

27. Когда к бесконечно, какъ въ случаѣ параг.
(17), точка С безпредѣльно отстоитъ отъ точки
А, и также точка О въ разсужденіи точки F: слѣ-
ственно кривая линія о коей здѣсь идетъ дѣло, мо-
жетъ тогда быть разсмашириваема какъ встрѣчаю-
щею линію FH (фиг. 4 и 5) въ двухъ точкахъ, изъ
коихъ одна а, опредѣленная въ сказанномъ парагра-
фѣ, а другая безпредѣльно отстоитъ отъ точки F;
что сходствуемъ съ упомянутымъ въ параграфѣ (19).

Положеніе о-
ной относи-
тельно къ зна-
камъ множе-
ствей.

28. Если бы знаменованія линій АВ и АВ'
(фиг. 5) были оба отрицательныя, или одно положи-
тельное а другое отрицательное, обѣ точки В и В'
нашлись бы или обѣ съ лѣвой стороны оси АУ, или
одна съ лѣвой а другая съ правой: два сіи случая не
имѣютъ никакой трудности.

Различные ви-
ды кривой ли-
нѣи смотря по-
тому отрица-
тельная или
положитель-
ная свойствен-
ная разность.

29. Обѣ части кривой линіи простираясь отъ почекъ
а и а' могутъ или прийти встрѣшиться одна съ дру-
гою, какъ въ (фиг. 5), или шествовать въ против-
ныя стороны, какъ въ (фиг. 6): потѣ или дру-
гой изъ случаевъ сихъ зависить отъ знака множе-
жителя $\frac{1}{4}b^2$ —а квадрата x^2 въ уравненіи (В). Если
ли множитель сей отрицательной, поелику въ произ-
веденіи $(\frac{1}{4}b^2 - a) x^2$ знакъ не можетъ переѣниться,
произведение сіе будетъ всегда вычитаемо подъ ра-
дикаломъ: слѣдуетъ отътолѣ, что полагая переѣн-
ныя х положительными, достигнутъ до знаменова-
нія переѣннаго х, такового, что отрицательной
членъ $(\frac{1}{4}b^2 - a) x^2$ превзойдетъ сумму всѣхъ стоя-
щихъ подъ радикаломъ, и превосходство сіе будетъ
существовать до положительной бесконечности; то-
же свойство будетъ со стороны х отрицательныхъ
и распространится до бесконечности отрицатель-
ной. Слѣдственно будутъ съ правой и съ лѣвой сто-
роны точки О бесконечныя длины, въ коихъ у бу-

въ первомъ
случаѣ, кри-
вая линія о-
кружность о-
кончательно
пространства.

дествъ невозможно; слѣдственно будетъ подлиннымъ тождество между точками а и а' опредѣленными уравненіемъ (D) или его единозначущимъ (C), означающимъ что

$$(\frac{1}{4}b^2 - a)x^2 = -((\frac{1}{2}bc - f)x + \frac{1}{4}c^2 - g),$$

то есть показывающимъ, что отрицательное количество $(\frac{1}{4}b^2 - a)$ равно или готово превзойти остальныхъ содержимыхъ подъ радикаломъ, слѣдственно вѣтви кривой линіи не могутъ распространяться по правую сторону точки а' и по лѣвую точки а, но будутъ необходимо заключены между ординатами Ва и В'а' (фиг. 5).

30. Произойдетъ противное когда множитель $\frac{1}{4}b^2 - a$ квадрата x^2 , въ уравненіи В, будетъ положительной; ибо, простираясь отъ точекъ гдѣ уравненіе выше сего

$$(\frac{1}{4}b^2 - a)x^2 = -((\frac{1}{2}bc - f)x + \frac{1}{4}c^2 - g)$$

будетъ имѣть мѣсто, то есть отъ точекъ а и а' (фиг. 6), будутъ находиться безпредѣльные длины съ правой стороны точки а' и съ лѣвой точки а, въ коихъ положительное количество $(\frac{1}{4}b^2 - a)x^2$ превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ членовъ стоящихъ подъ радикаломъ; и превосходство сіе будетъ очевидно существовать, какой бы ни былъ знакъ переменнаго x , пошому что x^2 будучи всегда положительнымъ произведение квадрата сего на множителя $\frac{1}{4}b^2 - a$, полагаемаго положительнымъ, сохранитъ всегда тотже знакъ.

31. Случай въ коемъ количество стоящее подъ радикаломъ въ уравненіи (D) ничто, то есть въ коемъ $\frac{1}{4}b^2 - a = 0$, сокращаетъ уравненіе сіе въ

$$x = -\frac{1}{2}h.$$

И такъ кривая линія разсѣкаетъ поперечникъ тождество въ одной точкѣ.

Во второмъ кривая линія распространяется до безконечности съ обѣихъ сторонъ одного изъ поперечниковъ.



Случай въ коемъ кривая линія преобразуется въ систему двухъ прямыхъ.

Условіе $\frac{1}{4}bh=k$ даетъ поставляя вмѣсто h и k ихъ знаменованія,

$$\frac{(\frac{1}{4}bc-f)^2}{\frac{1}{4}b^2-a}=\frac{1}{4}c^2-g.$$

Сіе условіе можетъ имѣть мѣсто когда $h=0$ и $k=0$, то есть когда $\frac{1}{4}bc-f=0$ и $\frac{1}{4}c^2-g=0$: въ случаѣ семъ уравненіе (B) обращается въ

$$y=-\frac{1}{2}(bx+c) \pm x \sqrt{(\frac{1}{4}b^2-a)}.$$

О поперечныхъ не имѣющихъ, впрочемъ случаевъ семъ никакого пресѣченія съ кривою линіею.

Показывающее, что обѣ вѣтви кривой линіи превращаются въ двѣ прямыя встрѣчающіяся въ точкѣ F, потому что въ ней $x=0$ и $y=-\frac{1}{2}c$.

32. Пространство aa' (фиг. 6), соответствующее невозможнымъ y , будетъ всегда существовать, когда постоянная разность $\frac{1}{4}c^2-g$ будетъ отрицательная; ибо очевидно что когда $\frac{1}{4}c^2-g$ отрицательное, k будетъ таковымъ же, потому что $k=\frac{1}{4}c^2-g$, $\frac{1}{4}b^2-a$

полагая $\frac{1}{4}b^2-a$ положительнымъ; отъкуда слѣдуетъ что уравненіе (D) будетъ подлинное, потому что радикалъ его будетъ $\sqrt{hh-(-k)}=\sqrt{\frac{1}{4}b^2-k}$, и слѣдовательно пресѣченія a и a' будутъ существовать.

Можно еще въ семъ удостовѣриться иначе разсматривая что, когда постоянная часть радикала уравненія (B) будетъ отрицательною, находится окончательное пространство отъ $x=0$ до нѣкотораго извѣстнаго положительнаго или отрицательнаго знаменованія переменнаго x , въ коемъ количество стоящее подъ симъ радикаломъ будетъ отрицательное.

33. Но когда $\frac{1}{4}c^2-g$ будетъ положительное, равно и $\frac{1}{4}b^2-a$, можетъ случиться, что ни одно знаменованіе переменнаго x не дѣлаетъ отрицательною суммы количествъ содержащихся подъ радикаломъ уравненія (B); ибо въ то время можетъ произойти

что, когда количество $\frac{1}{2}(bc-f)x$, могущее одно токъмо обратиться въ отрицательное, готово будетъ превзойти положительное $\frac{1}{4}c^2 - g$, само превышаемо количествомъ всегда положительнымъ $(\frac{1}{4}b^2 - a)x^2$, и такимъ образомъ радикальное выраженіе не можетъ никогда сдѣлаться не возможнымъ.

Что бы знать въ какихъ обстоятельствахъ разсматриваемый случай можетъ имѣть мѣсто, ~~должно замѣтить что, поелику, по положенію~~ членъ $(\frac{1}{2}bc-f)x$, полагаемый отрицательнымъ, никогда не можетъ истребить подъ радикаломъ уравненія (B) суммы прочихъ членовъ, полагаемой положительною, нѣтъ ни какого знаменованія переменнаго x , которое могло бы сдѣлать равною нулю всю сумму членовъ содержимыхъ подъ симъ радикаломъ, но есть что уравненіе (C)

$$-(\frac{1}{4}b^2 - a)x^2 + (\frac{1}{2}bc - f)x + \frac{1}{4}c^2 - g = 0,$$

составленное изъ сихъ членовъ, не можетъ быть уравнено нулю ни въ какомъ положеніи переменнаго x . Слѣдственно въ случаѣ семъ корни уравненія сего невозможны и нѣтъ на линіи FH никакой точки которая пересѣкала бы кривую линію; что лѣгко будетъ распознать когда, въ уравненіи (D), которое тоже что (C), будутъ имѣть $\frac{1}{4}h^2 < k$, или почти же когда $\frac{1}{4}h^2 - k$ будетъ количество отрицательное.

34. Однакоже первая часть знаменованія переменнаго x въ уравненіи (D) всегда имѣетъ мѣсто, и можно всегда откладывать количество $-\frac{1}{2}h$, или равное ему $\frac{\frac{1}{2}(f - \frac{1}{2}bc)}{\frac{1}{4}b^2 - a}$ отъ А къ С; различіе состоитъ

въ томъ что части Оа и Оа' подлинныя въ (фиг. 5 и 6) и откладываются на FH, пресѣченія линіи СО съ кривою линіею будучи невозможны въ (фиг. 6) а въ (фиг. 7), пресѣченія линіи FH съ кривою линіею невозможны, пресѣченія линіи СО будучи подлинными;

все происпекая изъ и словія что $\frac{1}{4}b_2 - a$ количество положишельное; что, какъ видѣли сіе въ параграфѣ (22), дѣлаешъ невозможнымъ одно изъ обѣихъ уравненій (D) и (D')

35. Поелику, въ случаѣ (фигуры 7), FH никогда не пересѣкаешъ кривой линіи какъ токмо, съ другой стороны, количество стоящее подъ радикаломъ уравненія (B) будучи всегда положительнымъ, у, не бываешъ никогда не возможнымъ, и наконецъ линіи HM равныя упомянутому теперь радикальному количеству, никогда не обращаются въ ничто; необходимо что бы кривая линія имѣла двѣ вѣтви са''b, са'''b', простирающіяся до безконечности, какъ со стороны x положительныхъ такъ и со стороны x отрицательныхъ.

Случай въ которомъ произведеніе ху находясь въ общемъ уравненіи, не достаетъ въ х; но если бы квадрата y^2 недоставало въ уравненіи (A), членъ ху сущесвуя тогда получили бы

Е $y = -\frac{ax^2 + fx + g}{bx + c}$;

исполняя дѣленіе показанное впорымъ членомъ предъидущаго уравненія, имѣюмъ

(E') $y = \frac{bcf - ac^2}{bb} - \frac{g}{bx + c} - \frac{ax + ac - f}{b} - \frac{bcf - ac^2 - gbb}{bb(bx + c)}$

$-\frac{a}{b}x + \frac{ac - f}{b^2} - \frac{f}{b}$.

Случай въ которомъ произведеніе ху находясь въ общемъ уравненіи, не достаетъ въ х; но если бы квадрата y^2 недоставало въ уравненіи (A), членъ ху сущесвуя тогда получили бы

37. Прежде построенія уравненія сего, замѣшимъ, что выражаемая имъ кривая линія тогоже свойства, что показанныя (фиг. 6 и 7); ибо если бы не доставало квадрата x^2 , вмѣсто y^2 имѣли бы въ общемъ уравненіи (A), $a = 0$, и количество $\frac{1}{4}b^2 - a$ со-

крапилось бы въ положительное всегда $\frac{x}{b}$. а поелику можно переименовать наименование переменнаго x , въ наименование переменнаго y , и взаимно, кривая линия будетъ тогоже рода, какое бы ни было, недостающихъ квадратовъ y^2 или x^2 .

38. Совсѣмъ тѣмъ, поелику уравненіе (Е') подастъ поводъ къ особеннымъ изслѣдованіямъ, займемся теперь его построениемъ. для этого должно (фиг. 8.) отложить на оси АУ часть $AF = \frac{b^2}{b^2} - \frac{f}{b}$; и проводя потомъ линію FH, составляющую съ FG, уголъ коего касательная была бы $-\frac{a}{b}$, и взявъ $AP = x$, получимъ $PH = GP - GH = AF - GH = \frac{ac}{b^2} - \frac{f}{b} - \frac{a}{b}x$. слѣдственно для полученія оспальной величины переменнаго y , должно будетъ отложить на продолженной PH длину $NM = bcf - ac^2 - gb^2$, получимъ ординату $PM = y = \frac{b(b(bx + c))}{b^2(bx + c)} + \frac{ac}{b^2} - \frac{f}{b} - \frac{a}{b}x$.

39. Когда $x=0$, NM обращается въ $Fa = \frac{bcbf - ac^2 - gb^2}{bbs}$; Определеніе
ея асепто-
шовъ.

когда $x=\infty$, NM дѣлается безконечно малою; итакъ кривая линія ab сливается съ FH въ разстояніи безпредѣльномъ; и слѣдовательно вторая есть асептоса первая.

Разсмотримъ теперь что происходитъ со стороны x отрицательныхъ. Еслии возьмемъ $-bx=c$, или $-x = \frac{c}{b}$, разстояніе NM кривой линіи бас до FH продолжанной въ О, дѣлается безконечнымъ; слѣдственно кривая линія сія имѣетъ другую асептосу, которан есть параллельная LS къ АУ, полагая $AL = \frac{c}{b}$. И такъ будетъ часть кривой линіи заключенная между OS и OH кои будутъ ея асептосами.

Доколѣ количество $-bx$ меньше c , расстояние HM , или знаменованіе его $\frac{bcf - ac^2 - gb^2}{b^2(c - bx)}$ сохраняетъ

тотже знакъ, которой полагаютъ положительнымъ въ (фиг. 8), и должно откладываться съ верху FN ; когда же напротивъ того $-bx$ больше c , расстояние MH дѣлается отрицательнымъ и должно откладываться съ низу FN . И такъ есть въпль кривой линіи съ низу

мои асептопами SO и OH . Сверхъ же того, въ самое то время какъ производится перемѣна въ знакъ, то есть когда $-bx$ дѣлается равнымъ c , количество $\frac{bcf - ac^2 - gb^2}{b^2(bx + c)}$ должно имѣть знакъ $+$, потому что на-

ходится въ положеніи, въ коемъ принадлежитъ равно тому и другому; слѣдственно должно принадлежать къ обѣмъ вѣтвямъ кривой линіи съ верху и съ низу HO ; а поелику въ то время количество сіе дѣлается безконечнымъ съ верху линіи OH и извѣляетъ асептому OS къ вѣтви кривой линіи cab , линія сія SO должна быть также продолженною до безконечности подъ линією HO , и дѣлается асептою OS' къ нижней вѣтви $a'b'$.

х будучи всегда отрицательнымъ, еслии положатъ его безконечнымъ, количество $\frac{bcf - ac^2 - b^2}{b^2(c - bx)}$, или ра-

стояние линіи HO до нижней вѣтви $a'b'$, обращается въ ничто, слѣдственно линія сія и сія кривая линія встрѣчаются въ безконечности со стороны отрицательныхъ, и первая асептопа второй.

И такъ обѣ вѣтви кривой линіи имѣютъ общими асептомами SS' и $S''S'''$. Явствуетъ что асептома SS' должна слиться съ осью AY , когда будутъ имѣть $AL = \frac{c}{b} = 0$, то есть, когда члена c у не будетъ въ уравненіи (A).

40. Если проведем ординаты QR и qr , в Ob введем кривой лини равных расстояний от асептомы SS' , части заключенныя iR и tr будут равны; ибо поелику знаменатель дроби $\frac{bcf - ac^2 - gb^2}{b^2(bx + c)}$ выражающей расстояния сужденія асептомы.

iR , tr , имѣетъ варьаци соразмѣрныя варьациамъ перемѣннаго x , и въ точкѣ L нуль, слѣдственно долженъ имѣть тоже знаменованіе съ той и съ другой стороны, и въ равныхъ расстояніяхъ отъ точки L , знаменованіе сіе имѣя знакъ различной смотря потому щипается ли оно съ правой или съ лѣвой стороны линіи SS' : слѣдственно обѣ кривыя линіи cab , $c'a'b'$ равны и расположены единообразно въ сужденіи ихъ асептомы SS' , $S'S''$.

41. Можетъ статься, что не только нѣтъ квадрата y^2 въ уравненіи (A), но также и квадрата x^2 , членъ xy существуя, что случится когда множитель a будетъ положенъ равнымъ нулю. И такъ взявъ $a=0$ въ уравненіи (E), обращается оно въ
$$F \dots y = -\frac{fx + g}{bx + c} = \frac{cf - gb}{b(bx + c)} - \frac{f}{b}.$$

Что бы построить его, должно (фиг. 9) сплосить линію $AF = -\frac{f}{b}$, и провести чрезъ точку F параллельную $S'S''$ къ AX ; наименовавъ потомъ AP , x , проводя PG параллельно къ AY , и опложивъ отъ G къ M длину $GM = \frac{cf - gb}{b(bx + c)}$, получимъ количество PM

$$= GM - GP = GM - FA = \frac{cf - gb}{b(bx + c)} - \frac{f}{b}.$$

42. Если сдѣлаютъ въ видѣ расстоянія $GM = \frac{cf - gb}{b(bx + c)}$, $x = \infty$ и $bx = -c$, расстояние GM обратится въ ничто въ первомъ случаѣ, и сдѣлается безконечнымъ во второмъ; кривая линія cb будетъ имѣть

двѣ асептопы, изъ коихъ одна линія $S''S'''$ а другая параллельная SS' къ AU проходящая въ разстояніи $OF = c$. Явствуетъ что, когда будемъ имѣть $f = 0$ и b

$c = 0$, то есть когда будемъ недоставать членовъ cy и fx въ уравненіи (A), асептопы SS' и $S''S'''$ сольются съ осями AU и AX .

Не станемъ болѣе входить въ подробности сего свойства, потому что разсужденіе руководствующее къ нему, совершенно то же что и сходившее, сдѣланное въ предвѣдущемъ параграфѣ. Докажемъ сверхъ того, послѣдуя тому же способу въ сказанномъ параграфѣ, что есть вторая въшья $c'b'$ помѣщенная на супротиву cb , имѣя шѣже линіи асептопами, равная сей въшви cb и помѣщенная единообразно въ разсужденіи общихъ асептопъ.

43. Все сказанное отъ пар. (26) неимѣло бы употребленія, если бы членъ xy не существовалъ всегда въ уравненіи; сей то членъ въ самой вещи производитъ переменнаго дѣлителя въ уравненіяхъ (E') и (F); а если бы его не было, кривая линія гдѣшъ вошла бы въ случай (фиг. 3 и слѣд.) или обратилась бы въ прямая.

Случай въ которомъ въмѣсто вырученія знаменованія переменнаго у, то знаменованіе переменнаго х, которое было бы изъ общаго уравненія, выручилъ бы изъ него знаменованіе переменнаго х.

44. Могли бы, въмѣсто вырученія знаменованія переменнаго у, изъ уравненія (A), выручить изъ него знаменованіе переменнаго х, которое было бы

$$G \dots x = -\frac{1}{2} \frac{by + f + 1}{a} \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - a\right)y^2 + (bf - ac)y + \frac{1}{4}f^2 - ag}.$$

45. Можно посредствомъ уравненія сего, опредѣлить положеніе линіи, которая пересѣкала бы на двѣ равныя части всѣ MM параллельныя къ AX (фиг. 10), и имѣющія съ обѣихъ сторонъ предѣлами кривую линію, такимъ же образомъ какъ съ помощью уравненія (B) опредѣлили положеніе пересѣкающей на двѣ равныя части всѣ параллельныя къ AU и

имѣющія съ обѣихъ сторонъ предѣлами кривую линію (смотри параг. 12 и слѣдую). Линія сія, разсѣкающая на двое параллельныя къ АХ, опредѣляется строа количество $-\frac{1}{2}(by+bf)$ такимъ же образомъ а

какъ въ параг. (12). Пускай будетъ RT, сія линія (фиг. 10); получатъ $AR = -\frac{1}{2}f$, и уголъ составленной а

сею RT и параллельною къ АУ будетъ имѣть касательною $-\frac{1}{2a}$.

46. Параллельная VT къ АХ будетъ касаться къ кривой линіи въ точкѣ Т, потому что пересѣчетъ ее въ двухъ, бесконечно близкихъ; и сіе, тоже замѣченное уже свойство въ линіяхъ а В (фиг. 3, 4, 5, и пр.).

47. Если бы члена x^2 не доставало въ уравненіи (А), произведеніе ху существую, уравненіе (G), переимѣнилось бы въ

$$(H) \dots x = -\frac{y^2 + cy + g}{cy + 1},$$

и построилось бы сходственно съ уравненіемъ (Е). Переимѣна каковую должно произвести въ (фиг. 8) для представленія построенія сего, состоишь въ сдѣланіи асептопы SS' параллельную къ оси АХ, вмѣсто проведенія ее параллельную къ АУ, и въ опредѣленіи положенія асептопы S''S''' въ разсужденіи АУ, вмѣсто опредѣленія ее относительно къ АХ.

48. Если бы недоставало вмѣстѣ, обохъ квадратовъ y^2 и x^2 , членъ ху существую, построеніе сократилось бы очевидно въ построеніе (фиг. 9).

49. Съ раченіемъ должно замѣчать, что оба по-Важное замѣчаніе о разлічій положенія
перечника опредѣляемые чрезъ уравненіе (G) не пѣ-

поперечниковъ же что опредѣляютъ чрезъ уравненіе (А), потому, получаемыхъ что въ послѣднемъ случаѣ семъ, одинъ изъ поперечниковъ параллеленъ къ АУ, а въ случаѣ уравненія (G), одинъ изъ поперечниковъ параллеленъ къ АХ, другой составляя въ обоихъ случаяхъ особенной уголъ съ АХ и съ АУ.

Краткое повтореніе различныхъ видовъ кривой линіи достигающей общаго уравненія второго порядка.

50. Явствуетъ изъ всего сказаннаго до селѣ, что кривыя линіи представленныя общимъ уравненіемъ.

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0$$

Подлежатъ премъ видамъ весьма отличнымъ. Первой имѣющей мѣсто, когда $\frac{1}{4}b^2 = a$ представленъ (фиг. 3 и 4), онъ состоитъ изъ двухъ вѣтвей имѣющихъ общее начало въ точкѣ а. и распространяющихся до безпредѣльности въ ту же сторону: второй когда $\frac{1}{4}b^2 < a$ отрицательное, представленъ (фиг. 5); онъ есть замкнутый свалъ имѣющей четыре части взаимно единообразныя; третій, когда $\frac{1}{4}b^2 > a$ положительное, или того или другаго изъ обоихъ квадратовъ y^2 и x^2 или обоихъ вмѣстѣ недостаетъ въ уравненіи (А), представленъ видами 6, 7, 8 и 9; они суть двѣ кривыя линіи единообразныя и равныя, простирающіяся до бесконечности въ противныя стороны.

Коническія сѣченія представляются всѣмъ сн видами: необходимо строго доказывать, что кривыя линіи происходящія изъ общаго уравненія могутъ быть иныя какъ коническія сѣченія.

Три кривыя линіи данныя сѣченіями конуса, именуемая коническими сѣченіями, и коихъ уравненія относимыя къ поперечникамъ суть $y^2 - px = 0$, $y^2 + a'x^2 - b'x = 0$ и $y^2 - a''x^2 - b''x = 0$, послѣднее сіе будучи $xy = a'''$, когда относятъ его къ асептошамъ; при сіи кривыя линіи, повтораемъ, коихъ уравненія очевидно особенныя случаи уравненія (А), представляютъ сверхъ того всѣ виды, о коихъ теперь разсуждали. Слѣдственно можно бы заключить по

сходству, что уравненіе (А) не иное что, какъ изъясненіе распространенное чешырехъ уравненій теперь положенныхъ: со всѣмъ тѣмъ должно его доказать спрожайшимъ образомъ. Легко бы достигли до сего предмѣна способомъ переставленія осей; но онъ недовольно прямой, полагая, что знаятъ напередъ какое переставленіе должно дать уравненіе выше сего. Замѣнимъ его употребленіемъ теоремы представляющей свойство общее всѣмъ кривымъ линіямъ втораго порядка, и показывающей сходственное свойство въ кривыхъ линіяхъ всѣхъ порядковъ: такъ удовлетворимъ сугубому условію обрѣсти искомое доказательство простымъ и прямымъ путемъ и открыть начинающимъ предмѣнъ, весьма удобной разширить и распространить ихъ понятія.

51. Пускай будетъ кривая линія ВСмМ (фиг. 11), Изысканіе теоремы для достиженія къ между собою какой нибудь уголъ, и имѣющая уравненіемъ

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0,$$

которое есть общее уравненіе (А); переменныя x представлены линіями АР, а переменныя y параллельными РМ, Рm, къ АУ.

Предвѣдущее уравненіе расположенное относительно къ y обращается въ

$$y^2 + (bx + c)y + (ax^2 + fx + g) = 0.$$

Множитель $bx + c$ втораго члена равенъ суммѣ РМ + Рm корней, а третій $ax^2 + fx + g$ произведенію ихъ РМ × Рm: слѣдственно имѣютъ

$$ax^2 + fx + g = РМ \times Рm,$$

положимъ что $x = p$ и $x = q$, оба множителя трехчленнаго количества $x^2 + \frac{fx}{a} + \frac{g}{a}$, получимъ

$$x^2 + \frac{fx}{a} + \frac{g}{a} = (x-p)(x-q),$$

или $\frac{1}{a} PM \times Pm = (x-p)(x-q) \dots\dots\dots (K).$

Но когда $y=0$, уравненіе (A) сокращается въ $ax^2 + fx + g = 0$

или $(x-p)(x-q) = 0.$

Слѣдственно знаменованія переменнаго x въ случаѣ семъ, $x=p$ и $x=q$; но явствуетъ въ фигурѣ, что у или $PM=0$, отвѣчаетъ знаменованіямъ АВ и АС переменнаго x или АР; слѣдственно $AB=p$ и $AC=q$; слѣдственно $x-p=AP-AB=PB$ и $x-q=AP-AC=PC$. Знаменованія сіи замѣненные въ уравненіи К, даютъ

$$\frac{1}{a} PM \times Pm = PB \times PC;$$

отъ куда получаемъ $\frac{PM \times Pm}{PB \times PC} = a \dots\dots\dots (H).$

Поелику уравненіе (A), изъ коего произведено сіе послѣднее не стѣснено никакимъ особеннымъ условіемъ, слѣдуетъ изъ него сіе свойство общее всѣмъ кривымъ линіямъ относящимся къ уравненію (A).

Теорема содержащая общее свойство кривой второго порядка.

52. *Если прямая линія встрѣчающая линію второго порядка въ двухъ точкахъ сама пресѣчена многими прямыми параллельными, кои, каждая встрѣчаетъ также линію второго порядка въ двухъ точкахъ, прямоугольникъ части первой прямой линіи заключенной между одною какою нибудь изъ параллельныхъ и вѣтвью кривой линіи, начавъ окончивающуюся тойже точки пресѣченія у другой вѣтви, будетъ всегда въ постоянномъ содержаніи къ прямоугольнику двухъ частей параллели, взятыхъ такимъ же образомъ.*

Теорема сія изъясненная приличнымъ

53. Теорема сія, которая, сказавъ мимоходомъ, особенный случай общественнѣйшей, употребитель-

ной во всѣхъ алгебраическихъ кривыхъ линіяхъ (1), образомъ, можеть проспираться на алгебраическія линіи всѣхъ порядковъ: употребленіе оной для доказательства что кривыя линіи происходятъ изъ общаго уравненія втораго порядка не могутъ быть иныя какъ коническія сѣченія.

Въ (фиг. 3 и 4) поперечникъ FH встрѣчаетъ кривую линію въ точкѣ а и въ другой отъ ней безпредѣльно отдаленной, какъ видѣли параг. (17 и 27); сверхъ того HM, ts, и пр: параллельныя къ AY, равны съ той и съ другой стороны линіи FH; слѣдственно частныя $\frac{PM \times Pm}{PB \times PC}$ уравненія (H) перемѣняющ-

ся здѣсь въ $\frac{HM^2}{Ha \times \infty}$, $\frac{ts^2}{Sa \times \infty}$, и пр: кои всѣ равны между собою, по предвижуему параграфу; что даетъ $\overline{HM}^2 = \frac{ts^2}{as} Na$: и такъ кривыя линіи представленные

въ (фиг. 3 и 4), удовлетворяющія общему уравненію (A) когда $\frac{1}{4}b^2 = a$, параболы.

Въ (фиг. 5), опредѣливъ aa' и $a''a'''$ по параг. (19 и 21) и взявъ $aO = p$ и $Oa'' = q$, получаютъ $\overline{HM}^2 = \frac{\bar{a}''O^2}{Oa \times Oa'} \frac{q^2}{p^2}$. Еслии возьмутъ $aH = v$, $HM = z$, получаютъ $Na' = p - v$ и предвижуее уравненіе дастъ

(1) Весьма легко усмотрѣть, что порядокъ доказательства пар: (35) былъ бы тотже для общаго уравненія шретьяго порядка, какъ и для уравненія втораго; членъ $ax^2 + fx + g$ обратился бы въ $ax^3 + fx^2 + gx + h$, коего множили бы ли бы $(x-p)(x-q)(x-r)$: и такъ различіе, въ разсужденіи случая разсматриваемаго здѣсь, состояло бы только въ томъ, что было бы при пресѣченія вмѣсто двухъ. и постоянное содержаніе, вмѣсто того что бы быть содержаніемъ двухъ произведеній каждое о двухъ измѣреніяхъ, было бы содержаніемъ двухъ произведеній каждое о трехъ измѣреніяхъ, и такъ далѣе въ разсужденіи уравненій вышнихъ порядковъ.

$\frac{zz}{v(p-v)} = \frac{qq}{pp}$, или $zz = \frac{q^2}{p^2}(pv-v^2)$: слѣдственно кривая линія представленная (фиг. 5) удовлетворяющая уравненію (A) когда $\frac{1}{4}b^2$ —а отрицательное, Елипсѣ.

Вѣ (фиг. 6) имѣютъ $\frac{MN^2}{Na \times Na'} = \text{постоянному}$: но мо-

жно всегда полагать, что постоянное сіе равно содержанию квадрата изъ $a'a$ къ поверхности, имѣющей вѣ каждомъ случаѣ, опредѣленную величину, которую назовемъ qq ; возьмемъ $aa' = p$, $a'H = v$, $NM = z$ получимъ $aH = p \mp v$ и уравненіе обратится вѣ $zz = \frac{qq}{v(p \mp v)}$

$\frac{qq}{pp}$ или $zz = \frac{qq}{pp}(pv \mp vv)$, уравненіе Иперболы.

Вѣ (фиг. 7), естли разсмотримъ со вниманіемъ, по доказанному пар. (20), что линія СО разсѣкаетъ на двѣ равныя части всѣ параллельныя rt къ FN , найдутъ между $гО'$, $a''O'$, $a''a'''$ и постоянною q' , тоже уравненіе что выше сего.

И такъ кривыя линіи представленные (фиг. 6 и 7), и перболы, удовлетворяющія уравненію (A) когда $\frac{1}{4}b^2$ —а положительное.

Кривыя линіи представленные (фиг. 8 и 9), того же рода, какъ видѣли вѣ пар. (37), что и представленные (фиг. 6 и 7) можно сверхъ того удовлетво- риться вѣ семъ рассмотримъ уравненія (E') и (F). Вѣ самомъ дѣлѣ, видѣли пар. (38 и 41), что ординаты NM къ асептоу имѣли знаменованіе вида $NM = \frac{A}{bx \mp c}$

A будучи постоянное, назовемъ m содержаніе полу-перечника къ косинусу угла GFH , которое есть и содержаніемъ длины взятой на $S''S'''$, къ соотвѣтствующей взятой на AX , двѣ сіи длины будучи заключенными между двумя параллельными къ $AУ$. Знаменова-

ніе ординаты НМ можетъ перемѣниться въ $\text{HM} = \frac{mA}{b(m(x+c))}$; но $x+c = \frac{LP}{b}$, потому что, параг: (39 и 42), $AL = \frac{c}{b}$; слѣдственно $m(x+c) = \frac{OH}{b}$; слѣдственно уравненіе $\text{HM} = \frac{mA}{b(m(x+c))}$; или $\text{HM} \times m(x+c) = \frac{mA}{b}$, извѣя-
ляеть отношеніе между НМ и ОН; но взявъ $\text{HM} = z$ и $\text{OH} = m(x+c) = v$, имѣють $vz = \frac{mA}{b}$, уравненіе ипер-
болы оппосимой къ ея асептошамъ.

Явствуетъ, что $m=1$, въ случаѣ (фиг. 9).

54. Легко будетъ съ помощію доказаннаго те-
перь, построить кривыя линіи данныя какимъ ни-
будь неопредѣленнымъ уравненіемъ второй степени
 $y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0$.

Построеніе сіе потребуеть въ началѣ дѣйствій
общихъ всѣмъ случаямъ кромѣ (фиг. 8 и 9), именно
іе оплжитъ на оси перемѣнныхъ у длину $AF = \frac{1}{2}c$;
зе провести линію FH, составляющую съ паралель-
ною Fg къ оси перемѣнныхъ x уголъ, коего касатель-
ная была бы равна $-\frac{1}{2}b$ (смотри пар. 12) произведя
сіи дѣйствія должно различать четыре случая, іе:
потѣ, въ коемъ $\frac{1}{4}b^2 - a$ ничто; зе: въ коемъ количе-
ство сіе положительное; зе: въ коемъ оно отрица-
тельное; 4е: въ коемъ одинъ изъ квадратовъ y^2 и x^2 ,
или оба вмѣстѣ недостають въ уравненіи, членъ ху
существуя.

55. *Случай первой*, когда $\frac{1}{4}b^2 - a = 0$; опложи (фиг. *Случай 1й па-*
3 и 4) на оси перемѣнныхъ x, линію $AB = \frac{g - \frac{1}{4}c^2}{\frac{1}{2}bc - f}$, раболо.

параг: (17). Проведи чрезъ точку В паралель къ АУ, встречающую линію FH въ а, точка сія будетъ началомъ параболы, имѣющей FH поперечникомъ и коея ординаты къ сему поперечнику будутъ паралельны къ Ва. Останется для опредѣленія параметра, шокмо вычислить ординату НМ посредствомъ уравненія

$$HM = \sqrt{\left(\frac{1}{4}bc - f\right) \times AP + \frac{1}{4}c^2 - g} \dots \dots \text{параг. (14);}$$

и искомой параметръ будетъ
$$= \frac{HM^2}{aH} = \frac{HM^2 \times \cos. GFH}{BP}$$

Случай вто-
рой. Эллипсъ;
обстоятель-
ство, въ коемъ
обращается
онъ въ кругъ.

56. Второй, когда $\frac{1}{4}b^2 - a$ — а положительное. Возьми $f - \frac{1}{4}bc = h$ и $g - \frac{1}{4}c^2 = k$; опложи (фиг. 5) на оси $\frac{1}{4}b^2 - a$

АХ линію $AC = -\frac{1}{2}h$, и съ каждой стороны точки С равны части $CB = CB' = \sqrt{\frac{1}{4}hh - k}$, параг. (17 и 19), чрезъ точки В, С и В' проводи паралельныя къ АУ, кои встрѣятъ линію FH въ а, О и а'. Опложи потомъ на линіи ОС длину $Oa'' = \sqrt{\left(\frac{1}{4}hh - k\right) \left(\frac{1}{4}b^2 - a\right)}$; на концѣ опиши Эллипсъ, которой имѣлъ бы первымъ поперечникомъ а'а, а вторымъ а''а'', параг: (19 и 21).

Эллипсъ будетъ кругъ, когда линія FH сольется съ FG, что параг: (12), полагаетъ $b = 0$, и сверхъ того параг: (24) получаетъ $Oa'' = 1$, или $a = 1$.

BC

Третій, гипер-
бола, относи-
мая къ ея по-
перечникамъ.

57. Третій, когда $\frac{1}{4}b^2 - a$ отрицательное. Опложи (фиг. 6 и 7) на оси АХ линію $AC = -\frac{1}{2}h$ имѣя тоже знаменованіе что выше сего: сдѣлавъ сіе, естли радикалъ $\sqrt{\frac{1}{4}hh - k}$ подлинной, опложи его знаменование (фиг. 6) въ СВ и СВ' и чрезъ точки В, С и В' проводи паралельныя къ АУ, кои встрѣятъ линію FH въ а, а' и О, и точки сіи будутъ вершинами и средоточіемъ гиперболы, коея найдутъ второй поперечникъ а''а''' слѣдующимъ образомъ.

Проведемъ линію $ka'q$ параллельную къ AX , по-Способъ опре-
ложимъ точку q безконечно отдаленную отъ точки k и проведемъ безконечную ординату $q'qc'$, полагая дѣлить попо-
асептопу SS' начерченную, точки c' и S' сольются, коего
и содержаніе линій $a'q$, qS' будетъ то же что линій Aq' и qS' ; пошому чпо можно пренебречь здѣсь ра-престѣнія стъ
стояніе $a'B'$ и $a'k$. Итакъ сочтемъ $a'q$ за x и $qc' = qS'$ кривою линію
за y , уравненіе (B) въ положеніи x безконечнымъ невозможны:
обращается въ знаменованіе

$$y = \frac{bx}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - a\right)x^2} = \frac{bx}{2} \pm x \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a},$$

линіа $tc' = ts'$ будучи, по упомянутому параб. (14), сдѣланное
равно $x \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a}$. подлиннымъ
перемѣняя
знакъ подъ
радикаломъ.

положимъ начерченную параллельно къ CO линію $a'f$,
оканчивающуюся у асептопы, получимъ подобные
тригольники $Oa'n$, $a'qt$, $Oa'f$, OtS' , кои дадутъ.

$$Oa' : a't :: a'n : a'q,$$

$$Oa' : a't :: a'f : tS';$$

Откуда находятъ $a'q : tS' :: a'n : a'f = \frac{a'n \times tS'}{a'q}$
 $= B'C \times \frac{tS'}{a'q}$; но $B'C = \sqrt{\frac{bn}{4} - k}$, $tS' = x \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a}$, $a'q$ взято
въ мѣсто x и $a'f$, по свойству иперболы, равна вто-
рому полупоперечнику Oa''' ; следовательно

$$Oa''' = \sqrt{\frac{bn}{4} - k} \left(\frac{b^2}{4} - a \right).$$

Явствуетъ что выраженіе втораго полупопере-
чника есть не иное что, какъ невозможное знаме-
нованіе упомянутое въ параб. (22 и 25), въ коемъ
перемѣнили только знакъ количества сшоящаго подъ
радикаломъ.

Нашедъ оба поперечника иперболы, легко по-
строимъ сію кривую линію.

Естьли радикаль $\sqrt{\frac{1}{4}hh - k}$, вмѣсто того, чтобы быть подлиннымъ какъ теперь сіе полагали, невозможно; проводи (фиг. 7) чрезъ точку С параллельную къ АУ; отложи на линіи сей длину $CO = \frac{1}{4}bh - \frac{1}{2}c$, пар. (21), и съ каждой стороны точки О равныя длины Oa'' , $Oa''' = \sqrt{(\frac{hh}{4} - k)(\frac{bb}{4} - a)}$, которой необходимо будетъ подлиннымъ, потому что каждый изъ множителей подъ радикаломъ положенъ отрицательнымъ.

Линія $a''' a''$ будетъ первымъ поперечникомъ иперболы коея О средоточіемъ. Найдуть, слѣдуя тому же корядку, что выше сего, второй поперечникъ $Oa = \sqrt{k - \frac{1}{4}hh}$; посредствомъ чего ипербола легко построится.

Четвертой ипербола отнормальная къ ея асимптотамъ.

58. Четвертый, когда одинъ изъ квадратовъ y^2 и x^2 или оба влѣсть не достаютъ въ уравненіи, членъ ху существующий. Естьли нѣтъ токмо одного y^2 отложи (фиг. 8) на оси АУ длину $AF = \frac{ac}{b^2} - \frac{f}{b}$; проводи FG параллельно къ АХ, и потомъ FH, составляя съ FG уголъ, коего касательная была бы равною $-\frac{a}{b}$; отмѣрай на АХ длину $AL = -\frac{c}{b}$; чрезъ точку L, проводи SLS' параллельную къ АУ, и линіи SOS', S'O S''' будутъ асимптоты иперболы требуемой къ построению.

Чтобы опредѣлить предѣлы a' перваго поперечника, должно искать точку г таковую, чтобы, проводя га' параллельно къ OS, имѣли $Or = ga'$, что по доказанному въ концѣ пар. (53), дасть.

$$Or = \sqrt{\frac{m(bc - ac^2 - gb^2)}{b^3}}$$

Видѣли, въ упомянутомъ параграфѣ, что такое было m; еслии нѣтъ токмо одного x^2 , чтобы сохранить

предвѣдущее построеніе, положатъ, что ось перемѣнныхъ x обратилась въ ось перемѣнныхъ y , и взаимно и перемѣнятъ наименованія перемѣнныхъ какъ наименованія ихъ осей, что совершенно равно.

Когда нѣтъ разомъ обоихъ квадратовъ, подпадающъ случаю (фиг. 9), которой не иное что, какъ случай (фиг. 8), въ коемъ полагающъ $m=1$ и $a=0$, или OH параллельною къ CAH .

59. Всѣ данныя теперъ построенія произведены изъ единственнаго уравненія (А); и довольно одной сей причины, чтобы подать поводъ предвѣдѣвать, что происходящія изъ него кривыя линіи, имѣютъ между собою весьма тѣсныя отношенія: можеть теперъ изслѣдовать ихъ особеннѣе. 4й Случай предвѣдущаго параграфа даетъ ту же кривую линію что третій; итакъ отличительныя свойства различныхъ кривыхъ линій втораго порядка, заключены въ трехъ первыхъ случаяхъ и пребываютъ въ количествѣ $\frac{1}{4}b^2$ — а данномъ множителями втораго и третьяго членовъ уравненія (А). Когда количество сіе положительное; кривая линія Елипсъ, коего первой поперечникъ содержится ко второму какъ $n : \sqrt{a - \frac{1}{4}b^2}$ (параг. 20), n будучи постоянное зависящее отъ угла GFH . Итакъ первой сей поперечникъ протягивается тѣмъ болѣе, чѣмъ ближе $\frac{1}{4}b^2$ подходитъ къ равенству съ a ; и дѣлается онъ безконечнымъ, когда имѣетъ оно мѣсто. Видѣли что въ случаѣ семъ кривая линія парабола. Когда наконецъ $\frac{1}{4}b^2$ превзойдетъ a , первой поперечникъ, изъ безконечнаго каковымъ находился, дѣлается отрицательнымъ, какъ должно сему быть, потому что всякое количество должно проходить чрезъ нуль или чрезъ безконечность, чтобы сдѣлаться изъ положительнаго отрицательнымъ, и кривая линія обращается тогда въ иперболу. Знаменованіе втораго поперечника при-

Общія разсужденія о порядкѣ разсма-
триванія коническихъ сѣченія, какъ различныхъ измѣненія однихъ и той же кривой линіи.

нимаешь видъ невозможной ; но видъ сей показываешь токмо, какъ замѣтили уже сіе, что не лзя опкладывать его съ тойже стороны въ эллипсъ и въ иперболъ ; и тѣ же количества стоящія подъ радикаломъ даютъ, перемѣняя ихъ знакъ, видъ линѣи которую должно опложить съ противной стороны и между обѣими вершинами кривой линѣи, и которая замѣняетъ второй поперечникъ.

Итакъ очевидно, что эллипсъ, парабола и ипербола могутъ, въ нѣкоторомъ видѣ, быть разсматриваемы какъ измѣненія одной и той же кривой линѣи; парабола, которая есть эллипсъ безконечно пропущенной, должна быть сочтена за состояніе перехода, за посреднюю опѣнку между эллипсомъ и иперболою; а поелику эллипсъ, чтобы перемѣниться въ иперболу, прошолъ чрезъ безконечность, нѣкоторыя линѣи, отъ коихъ зависитъ его видъ, должны обратиться изъ положительныхъ въ отрицательныя, такъ, что обѣ вершины помѣщенные у предѣловъ поперечника представляющіе другъ другу ихъ выпуклость въ мѣсто вогнутости, и вѣтви кои, въ эллипсѣ, идущъ соединиться у края малаго поперечника, отдаляются отъ него напрошивъ того часъ отъ часу болѣе въ иперболѣ.

Сочиненіе Паскаля о коническихъ сѣченіяхъ.

60. Утверждаютъ, что Паскаль издалъ сочиненіе о коническихъ сѣченіяхъ, въ коемъ разсматривалъ ихъ какъ измѣненія одной и той же кривой линѣи. Вѣроятно, что способъ его ихъ разсматривать имѣлъ нѣчто подобное предложенному теперь, и имѣющему свое основаніе какъ въ общемъ уравненіи второго порядка, такъ и въ теоремѣ доказанной въ пар. (33), которая, какъ видѣли, производится изъ сего уравненія.

ПОКАЗАНИЕ

СОДЕРЖАНИЯ

Прим: указательныя цыфры показываютъ номера параграфовъ а не страницы.

- 1). О родѣ количествъ составляющемъ Алгебраическія уравненія.
- 2). Уравненіе Алгебраическое можетъ всегда воспріять видъ единомѣрной.
- 3). Общее уравненіе всѣхъ Алгебраическихъ кривыхъ линій.
тотже. Какъ составлено такое уравненіе.
- 5). Объ Аналитическомъ пріугольникѣ.
- 6). Что разумѣютъ чрезъ члены, уравненія и кривыя линіи различныхъ порядковъ.
- 7). Употребленіе Аналитическаго пріугольника въ обрѣшеніи всѣхъ членовъ полного уравненія всякаго порядка.
тотже. Употребленіе въ уравненіяхъ шретьяго и втораго порядка.
тотже. Общее уравненіе втораго порядка о двухъ неопредѣленныхъ x , y ; общее знаменованіе переменнаго y .
- 11). Замѣчаніе о знакахъ множителей: примѣръ.
- 12). Знаменованіе переменнаго y состоитъ изъ двухъ частей: построеніе первой.
тотже. Построеніе сіе употребительно во всѣхъ Геометрическихъ выраженіяхъ перваго порядка.
- 13). Замѣчаніе и примѣръ относящееся къ знакамъ множителей.
- 14). Предвѣдущее построеніе доставляетъ поперечникъ кривой линіи.
- 15). Опредѣленіе точекъ въ коихъ поперечникъ сей разсѣкаетъ кривую линію; сіе опредѣленіе производится уравнивая нулю вторую часть знаменованія неопредѣленного y .

- 16). Различные случаи происходящіе изъ предвѣдущаго равенства, зависящіе отъ разности между квадрапомъ множителя произведенія xu и учетвереннымъ множителемъ квадрата x^2 въ общемъ уравненіи; которая именуется *свойственною разностью*.
- 17). Случай въ коемъ *свойственная разность* ничто.
тотже. Направленіе безконечныхъ вѣтвей кривой линіи въ семъ случаѣ.
- тотже*. Общоятельность въ коемъ обращается она въ прямую.
- 19). Случай въ коемъ *свойственная разность* не есть ничто; положеніе почекъ пресѣченія, кои бывають въ немъ относительно къ посредней.
- 20). Определеніе втораго поперечника кривой линіи проходящаго чрезъ упомянутую посреднюю точку.
- 22). Случай, въ коемъ есть не возможныя пресѣченія.
тотже. Средоточіе кривой линіи, определеніе онаго.
- 24). Равенство и общее содержаніе выраженій доставляющихъ пресѣченія кривой линіи и поперечниковъ; случай, въ коемъ содержаніе сіе невозможно; случай, въ коемъ оно безпредѣльно.
- 26). Касательная у предѣла перваго поперечника параллельная ко второму.
- 27). Что происходитъ съ кривою линіею, когда нѣкоторыя количества безконечны.
- 28). Положеніе ее относительно къ знакамъ множителей.
- 29). Различные виды кривой линіи, смотря пошому отрицательная ли, или положительная *свойственная разность* Въ первомъ случаѣ кривая линія окружность окончательнаго пространства.
- 30). Во второмъ кривая линія распространяется до безконечности съ обѣихъ сторонъ поперечниковъ.
- 31). Случай въ коемъ кривая линія обращается въ систему двухъ прямыхъ.
- 32). О поперечникѣ не имѣющемъ во второмъ случаѣ, никакого пресѣченія съ кривою линіею.

36). Случай, въ коемъ, произведеіе ху находясь въ общемъ уравненіи, не достаеѣ въ немъ квадрата одного изъ неопредѣленныхъ: построеніе кривой линіи въ семъ случаѣ: она того же рода что и получаемая во всѣхъ обстоятельствѣхъ въ коихъ *свойственная разность* положительная.

39). Опредѣленіе ея асептоповъ.

40. Обѣ вѣтви равны и расположены единообразно въ разсужденіи асептоповъ.

41. Случай въ коемъ, произведеіе ху находясь въ общемъ уравненіи, не достаеѣ въ немъ квадратовъ обоихъ неопредѣленныхъ. Случай сей относится къ предъидущему.

44.) Случай, въ коемъ, вмѣсто вырученія знаменованія перемѣннаго у, изъ общаго уравненія, выручили бы изъ него знаменованіе перемѣннаго х.

49). Важное замѣчаніе о различіи положенія поперечниковъ получаемыхъ въ томъ и въ другомъ случаѣ.

50.) Краткое повтореніе различныхъ видовъ кривой линіи доставляющей общее уравненіе втораго порядка.

тоже. Коническія сѣченія представляютъ всѣ сіи виды: необходимость спрого доказать, что кривыя линіи происходящія изъ общаго уравненія, не могутъ быть иныя какъ коническія сѣченія.

51.) Изысканіе теоремы для достиженія къ сему доказательству.

52.) Теорема содержащая общее свойство линіи втораго порядка.

53). Теорема сія изъясненная приличнымъ образомъ, можетъ простираѣться на Алгебраическія линіи всѣхъ порядковъ: употребленіе оной, что бы доказать, что кривыя линіи просходящія изъ общаго уравненія втораго порядка не могутъ быть иныя, какъ коническія сѣченія.

54). Краткое повтореніе, строенія коническихъ сѣченій происходящихъ изъ различныхъ случаевъ общаго уравненія втораго порядка.

- 55). Случай первой, парабола.
- 56). Случай второй, Эллипс, обстоятельство, въ которомъ обрацається онъ въ кругъ.
- 57). Случай претій, Ипербола относимая къ ея поперечникамъ. *тоже*. Способъ опредѣлять поперечникъ, коего пересѣченія съ кривою линією не возможны; знаменованіе сего поперечника есть невозможное выраженіе относительное къ пресѣченіямъ, сдѣланное подлиннымъ, перемѣня знакъ подъ радикаломъ.
- 58). Четвертой случай, ипербола относимая къ ея асимптотамъ.
- 59). Общія разсужденія о порядкѣ размаатривать коническія сѣченія какъ различныя измѣненія одной и тойже кривой линіи.
- 60). Сочиненіе паскала о коническихъ сѣченіяхъ.

Конецъ показанію содержанія.





