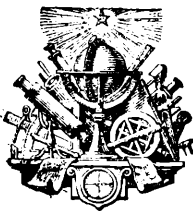


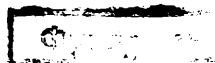
1832

И. Ивановичъ Алехинъ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ
№ 123 и
ВАРИАЦИОННОЕ ИЗЧИСЛЕНИЯ
и
ИЗЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ
ФРАНКЕРА,
переведенныя,
при
УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ БЛАГОРОДНОМЪ
ПАНСІОНЪ,
ИВАНОМЪ ДАВЫДОВЫМЪ.



623.



МОСКВА.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1825.

Печатаиъ дозволяется съ тѣмъ, чинобы по
отпечатаиіи, до выпуска въ продажу, представ-
лены были въ Цензурный Комитетъ : одинъ
экземпляръ сей книги для Цензурнаго Комитета,
другой для ~~Департамента~~ Министерства Про-
свѣщенія, два экземпляра для Императорской
Публичной Библіотеки и одинъ для Импера-
торской Академіи Наукъ. Москва, Іюня 16 дня
1825 года. Адъюнктъ Дмитрій Перовииковъ.



ОТЪ ПЕРЕВОДИВШАГО.

Симъ переводомъ Интегральнаго и Варіаціоннаго Изчисленій и Изчисленія Разностей оканчивается Франкеровъ курсъ Чистой Матемашики. Хотя Сочинитель основалъ Дифференціальное Изчисленіе на Лагранжевой теоріи функцій; однако, при-
совокупивши къ нему *Способъ безконечно малыхъ* съ объясненіемъ его истиннаго смысла, имѣлъ право нѣкоторые вопросы Интегральнаго Изчисленія разрѣшить съ помощію сего способа: но въ переводѣ, для соблюденія единообразія методы, рѣшенія сихъ вопросовъ измѣнены; теорія же безконечно малыхъ количествъ присоединена къ Интегральному Изчисленію по той причинѣ, что въ прикладныхъ частяхъ Матемашики она почти необходима и есть источникъ всѣхъ новѣйшихъ открытій въ Механикѣ, Физикѣ и Астрономіи. Прочія перемѣны противъ подлинника состоятъ токмо въ томъ, что трудныя формулы раскрыты и

важнѣйшіе неразрѣшенные примѣры объяснены. Всѣ ссылки относятся къ Русскому переводу Франкорова курса. Имѣя единственною цѣлю споспѣшествованіе основательному ученію Математики, въ подкрѣпленіе усилій, потребныхъ для преодоленія трудностей оной, долгомъ почишаю при-
совокупить, что съ помощію Франкера можно разумѣть всѣхъ первоклассныхъ Геометровъ; ибо его Философское сочиненіе, излагая науку, научаешь вмѣстѣ мыслить.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНИЕ.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Интегрированіе функцій съ однимъ переменнымъ.

ГЛАВА I.

Основные правила интегрированія.

§ 1. Интегральное изчисленіе имѣетъ предметомъ опъ производныхъ функцій восходить къ первоначальнымъ. Къ сему служатъ извѣстные законы и преобразованія. Дабы показать, что потребно взять интеграль функціи, ставящъ передъ оюю знакъ $\int$; такъ $\int 4x^3$ означаетъ, что должно опредѣлить, какой функціи y выраженіе $4x^3$ есть дифференціаль: очевидно, что $y = \int 4x^3 = \int \frac{dy}{dx} = x^4 + C$, гдѣ постоянное количество могло при дифференцированіи уничтожиться.

§ 2. Ежели u и z суть тождественныя функціи одного переменнаго x , то, придавши къ x приращеніе h , по Тейлоровой формулѣ, получаемъ.

$$U = u + \frac{du}{dx} h + \alpha h,$$

$$Z = z + \frac{dz}{dx} h + \beta h;$$

и какъ $U = Z$, $u = z$, то $\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$; слѣд. тождественныя функціи имѣютъ и дифференціалы тождественные. Но дифференціалы перваго порядка въ отношеніи ко вторымъ дифференціаламъ суть функціи первоначальныя, и ш. д.;

слѣд. вообще тождественныя функціи даютъ тождественныя дифференціалы всѣхъ порядковъ.

Положимъ, что fx и Fx имѣютъ тождественныя дифференціалы перваго порядка: по теоремѣ Тейлоровой выйдемъ

$$f(x+h) = fx + \frac{dfx}{dx} \cdot h + \frac{d^2fx}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3fx}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

$$F(x+h) = Fx + \frac{dFx}{dx} \cdot h + \frac{d^2Fx}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3Fx}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \dots;$$

отсюда по условію и по вышеизложенной теоремѣ находимъ

$$f(x+h) - F(x+h) = fx - Fx;$$

слѣд. разность $fx - Fx$ не зависитъ отъ переменны въ величинѣ x и есть количество постоянное, $fx - Fx = C$ или $fx = Fx + C$. Изъ сего заключаемъ, что ~~тождественныя дифференціалы происходятъ отъ функций, имѣющихъ постоянную разность.~~ Посему всякой интегралъ отъ прибавленія постоянного количества получаетъ видъ общій.

§ 3. Взявъ обратно основныя правила Дифференціальнаго изчисленія, находимъ столько же главныхъ правилъ изчисленія Интегральнаго.

I. Интегралъ многогленнаго количества есть сумма интеграловъ разлитныхъ его гленовъ; каждый гленъ сохраняетъ свой знакъ и коэффициентъ.

II. Чтобы интегрировать $\frac{dy}{dz} = z^n$, должно показателя n увеличить единицею и степень z^{n+1} раздѣлить на показателя $n+1$.

$$\int \frac{dy}{dz} = \int Az^n = \frac{Az^{n+1}}{n+1} + C.$$

Если $\frac{dy}{dx} = (Ax^n + Bx^m - Cx^r - \dots)$, то

$$\int \frac{dy}{dx} = y = \frac{A}{n+1} x^{n+1} + \frac{B}{m+1} x^{m+1} - \frac{C}{r+1} x^{r+1} - \dots + N.$$

Равно выражение Az^{-n} , или $\frac{A}{z^n}$ имѣетъ интеграломъ $\frac{Az^{-n+1}}{-n+1}$, или $y = -\frac{A}{(n-1)z^{n-1}}$,

т. е. когда переменное количество находится въ знаменателѣ, то должно взять дробь съ противнымъ знакомъ, показателя переменнаго количества уменьшить единицею и на сего уменьшеннаго показателя умножить знаменателя.

Сія правила относящяся также къ функціямъ, которыя можно привести въ видъ z^n . Если $\frac{dy}{dx} = ax^{n-1} \cdot (b+cx^n)^m$, то пусть $z=b+cx^n$, и слѣд. $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{ncx^{n-1}}$ (Д. и. § 29). Но когда $y=Fx$, $x=fz$, тогда $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$ (Д. и. § 15); отсюда $\frac{dy}{dz} = \frac{az^m}{nc}$, изъ чего уже находимъ

$$y = \frac{a}{nc(m+1)} z^{m+1} + C = \frac{a}{nc(m+1)} (b+cx^n)^{m+1} + C.$$

Также если $\frac{dy}{dx} = 6x \sqrt{4x^2+3}$, то полагаемъ $z = 4x^2+3$, и $\frac{dy}{dz} = \frac{3}{4} z^{\frac{1}{2}}$; отсюда

$$y = \frac{1}{2} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{8} \sqrt{4x^2+3}^3 + C.$$

А 2

III. Предыдущее правило подвержено исключенію, когда $n = -1$; ибо тогда $\frac{A}{(n-1)x^{n-1}} = \infty$.

Сие происходитъ отъ того, что интеграль принадлежитъ другому роду функціи; поелику $\frac{dy}{dx} = Ax^{-1} = \frac{A}{x}$ есть дифференціалъ логаримической функціи $y = A \cdot \log x + C$. Чтوبъ опкрыть правило для интегрированія сего рода функцій, возьмемъ общее выраженіе $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{a+z}$,

въ которомъ числитель есть дифференціалъ знаменателя. На основаніи Дифференціального исчисленія (Д. и. § 20); находимъ $y = \log(a+z) + C$, или, для болшей удобности, $y = \log(a+z) + \log c = \log c \cdot (a+z)$. ~~И такъ всякая дробь, которой числитель есть дифференціалъ знаменателя, имѣетъ интеграломъ логаримъ знаменателя.~~

Объинтегрируемъ выраженіе $\frac{5x^3}{3x^4+7}$. Очевидно, что числитель, кромѣ постояннаго коэффициента, есть дифференціалъ знаменателя, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^3}{3x^4+7} = \frac{5 \cdot 12x^3}{12 \cdot 3x^4+7}, \text{ и поному}$$

$$y = \frac{5}{12} [\log(3x^4+7) + \log c] = \frac{5}{12} \log c(3x^4+7).$$

IV. Пусть $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Здѣсь числитель есть дифференціалъ количества, находящагося

подъ квадратными корнями въ знаменателѣ : интегралъ сей дроби будетъ дважды взятый корень ; ибо

$$\int \frac{dy}{dz} = \int z^{-\frac{1}{2}} = 2z^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{z} + C.$$

V. Одно изъ важнѣйшихъ основныхъ правилъ интегрированія состоитъ въ интегрированіи по частямъ. Мы знаемъ, что $d(ut) = udt + tdu$, когда u , t суть функціи одного переменнаго x ; обинтегрируемъ, имѣемъ

$$ut = \int udt + \int tdu$$

и $\int udt = ut - \int tdu$, т. е. разложивъ данный дифференціалъ на два произвѣдителя, изъ коихъ бы одинъ прямо интегрировался, интегрируемъ, принимая другаго множителя за постоянное ; потомъ дифференцируемъ сей результатъ въ отношеніи токмо множителя, взятаго за постоянное количество, и интегралъ сего дифференціала вычитаемъ изъ перваго интеграла.

Если надобно интегрировать $\log z \frac{dz}{dx}$, то

$$y = z \log z - \int \frac{z}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = z \log z - z + C.$$

Посредствомъ сего правила искомый интегралъ становится зависящимъ отъ другаго интеграла. Искусство сего изчисленія состоитъ въ разложеніи, отъ котораго преобразованное выраженіе сдѣлалось бы простѣе даннаго.

VI. Правило, открывающее дифференціалы дуги, выраженной синусомъ, косинусомъ и тан-

генсомъ, при положеніи радіуса равнымъ едини-
цѣ, научаемъ, что

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = A. (\sin = y) + C,$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} = A. (\cos = y) + C,$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} = A. (\tan g = y) + C.$$

Сдѣлавъ радіусъ равнымъ r , получимъ тѣже ве-
личины для

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}, \int \frac{-r}{\sqrt{r^2-y^2}}, \int \frac{r^2}{r^2+y^2}.$$

Пусть $\frac{dy}{dz} = \frac{m}{a+bz^2}$. Раздѣливъ числитель и
знаменателя на a , сдѣлаемъ $t^2 = \frac{b}{a} z^2$; изъ сего

найдемъ $\frac{dy}{dz} = \frac{m}{a} \cdot \frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, и $\frac{dy}{dt} = \frac{m}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$;

отсюда $y = \frac{m}{\sqrt{ab}} \cdot A. (\tan g = t) + C =$

$$\frac{m}{\sqrt{ab}} A. (\tan g = z \sqrt{\frac{b}{a}}) + C.$$

Такимъ же образомъ найдемъ $\int \frac{m}{\sqrt{a^2-bz^2}} =$
 $\frac{m}{\sqrt{b}} \cdot A. (\sin = \frac{z}{a} \sqrt{b}) + C.$

Г Л А В А II.

Рациональныя дроби.

§ 4. Изъ Высшей Алгебры (спр. 237) извѣстны общіе способы для разложенія всякой рациональной дроби $\frac{N}{D}$ на другія, коихъ видъ былъ бы одинъ изъ слѣдующихъ :

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

гдѣ $A, B, p, q, n, \dots$ количества постоянныя, а производители знаменателя x^2+px+q мнимые. Требуется открыть правило, чтобы опъ сихъ дробей восходить къ выраженіямъ, коихъ онѣ суть производныя функціи. Замѣтимъ, что, уничтожая членъ px въ двухъ послѣднихъ дробяхъ, по способу преобразованія, въ Высшей Алгебрѣ (спр. 59) изложенному, сдѣлавъ $x = z - \frac{1}{2}p$, x^2+px+q обратится въ $z^2+q - \frac{1}{4}p^2$; изъ чего, если $q - \frac{1}{4}p^2 = \beta^2$, количеству условно положительному, получимъ для знаменателя $z^2+\beta^2$, а для числителя $Az+B'$, гдѣ $B' = B - \frac{1}{2}Ap$, такъ что вмѣсто данныхъ дробей будемъ имѣть

$$\frac{Az+B'}{z^2+\beta^2} \text{ и } \frac{Az+B'}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

И. Случай. Интегралъ опъ $\frac{A}{x-a}$, или

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{A}{x-a} = A \log c. (x-a). \text{ По сей формулѣ мож-}$$

но опредѣляющъ интегралы рациональныхъ дробей, разлагающихся въ частныя, имѣющія видъ $\frac{A}{x-a}$.

Возьмемъ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 - x^2}$. Положивши $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$, найдемъ $A = \frac{1}{2a}$, $B = \frac{1}{2a}$; слѣд.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a(a+x)} + \frac{1}{2a(a-x)}, \text{ и}$$

$$y = \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{a+x} + \int \frac{1}{a-x} \right] = \frac{1}{2a} [\log(a+x) - \log(a-x)] + \log c = \frac{1}{2a} \log \left(c \frac{a+x}{a-x} \right);$$

Также если $\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{x^2-x-2}$; то, разложивъ сію дробь на $\frac{2}{2-x} - \frac{2}{x+1}$, получимъ

$$y = \int \frac{2}{2-x} - \int \frac{2}{x+1} = -2\log(2-x) - 2\log(x+1) + \log c \\ = \log c - \log(x^2-x-2)^2 = \log \frac{c}{(x^2-x-2)^2}.$$

II* Случай. Найдемъ $\int \frac{dy}{dx} = \int \frac{A}{(x-a)^n} =$
 $-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$. Сія формула служитъ для

опредѣленія интеграловъ рациональныхъ дробей, имѣющихъ въ знаменателяхъ равные производители. На прим.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1};$$

опредѣляемъ $A = 2$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{5}{4}$, $D = 1$; $E = -\frac{3}{4}$; слѣд.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1};$$

$$\text{и } y = 2 \log x + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{4} \log (x+1) - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4} \log (x-1) + C;$$

здѣсь 2й и 4й члены интегрированы по правилу

$$\text{II}^{\text{му}}, \text{ т. е. } \int \frac{1}{(x-1)^2} = - \frac{1}{(2-1)(x-1)^{(2-1)}} = - \frac{1}{x-1},$$

IIIй. Случай. Если $\frac{dy}{dz} = \frac{Az+B'}{z^2+\beta^2}$, то интегралы берутся отдѣльно дроби

$$\frac{Az}{z^2+\beta^2} \text{ и } \frac{B'}{z^2+\beta^2};$$

по правилу IIIму интеграль 1й будетъ $\frac{1}{2} A \log(z^2+\beta^2)$; по правилу же VIму интеграль 2й выйдетъ $\frac{B'}{\beta} \Lambda(\text{tang} = \frac{z}{\beta})$. И такъ

$$y = \frac{1}{2} A \log(z^2 + \beta^2) + \frac{B'}{\beta} \Lambda(\text{tang} = \frac{z}{\beta}) + \log c.$$

Такимъ образомъ дробь $\frac{x}{x^3-1}$ разлагается въ

$$\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{(x^2+x+1)};$$

поэтому $y = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x-1)}{(x^2+x+1)}$. Интеграль 1й дроби будетъ $\frac{1}{3} \log(x-1)$. Если же 2ю сравнимъ съ $\frac{Ax+B'}{z^2+\beta^2}$, то найдемъ

$$A = 1, B' = -\frac{5}{2}, z = x + \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ слѣд.}$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)} = \frac{1}{2} \log (x^2+x+1) - \sqrt{3} A \left(\tan g = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \log c.$$

И такъ для искомага интеграла получимъ

$$y = \frac{1}{3} \left[\log c (x-1) - \log \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{3} A \left(\tan g = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{3} \log \frac{c(x-1)}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{3} \sqrt{3} A \left(\tan g = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для другаго примѣра возьмемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}; \text{ слѣд,}$$

$$y = \frac{3}{2} \log (x+1) - \int \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} - \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1},$$

и прямо по правиламъ III и VI выйдетъ

$$y = \frac{3}{2} \log (x+1) - \frac{1}{4} \log (x^2+1) - \frac{1}{2} A (\tan g = x) + \log c = \log \frac{c \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} A (\tan g = x).$$

IVй Случай. Если требуется интегрировать рядъ дробей, имѣющихъ видъ $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, гдѣ

n послѣдовательно = 1, 2, 3. . . , то каждую, по предыдущему, раздѣляють на двѣ новыя

дроби $\frac{Az}{(z^2+\beta^2)^n}$ и $\frac{B'}{(z^2+\beta^2)^n}$. Первая интегри-

руется по прибавленію къ правилу IIму и даетъ

$\frac{A}{2(n-1)(z^2 + \beta^2)^{n-1}}$; если $n = 1$, то выйдетъ $\frac{1}{2}Al(z^2 + \beta^2)$.

§ 5. Что касается до 2й дроби, то интегрирование оной облегчается, если сдѣлаемъ ее зависящею отъ другой простѣйшей. Принимая K и L за неопредѣленные коэффициенты, полагають

$$\int \frac{1}{(z^2 + \beta^2)^n} = \frac{Kz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} + \int \frac{L}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}.$$

Дабы опредѣлить величины K и L , дифференцирующъ все уравненіе, приводятъ къ одному знаменателю $(z^2 + \beta^2)^n$, результатъ располагающъ по степенямъ z , и изъ сравненія коэффициентовъ сихъ степеней получають желаемыя уравненія по K и L . Именно

$$\frac{1}{(z^2 + \beta^2)^n} = \frac{K(z^2 + \beta^2)^{n-1} - 2Kz^2(n-1)(z^2 + \beta^2)^{n-2}}{(z^2 + \beta^2)^{2n-2}} + \frac{L}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}};$$

по приведеніи къ одному знаменателю,

$$1 = K(z^2 + \beta^2) - 2Kz^2(n-1) + L(z^2 + \beta^2);$$

отсюда, по сравненіи членовъ, изъ коихъ одни множатся на z^2 , другіе постоянныя количества, выйдетъ:

$$(K + L)\beta^2 = 1, \quad (K + L) = 2K(n-1),$$

или $K + L = \frac{1}{\beta^2}$ и $K + L = 2K(n-1)$,

потомъ $K = \frac{1}{2(n-1)\beta^2}$, $L = \frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}$.

И такъ

$$\int \frac{1}{(z^2 + \beta^2)^n} = \frac{z}{2\beta^2(n-1)(z^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\beta^2(n-1)} \int \frac{1}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}.$$

Не трудно понять употребленіе сей формулы: ибо изъ нее получается рядъ дробей

$$\frac{1}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}, \frac{1}{(z^2 + \beta^2)^{n-2}}, \dots, \frac{1}{(z^2 + \beta^2)},$$

изъ коихъ интеграль каждой будетъ зависѣть отъ двухъ слѣдующихъ до дроби $\frac{1}{(z^2 + \beta^2)}$, которой интеграль извѣстенъ (пр. VI).

Пусть будетъ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{-2x + 1}{(x^2 + 1)^3} + \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Поскольку каждая изъ первыхъ двухъ дробей раздѣляется на двѣ новыя, то найдемъ

$$y = \int \frac{-2x}{(x^2 + 1)^3} + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} + \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Потомъ по изложеннымъ теоріямъ выводимъ послѣдовательно:

$$\int \frac{-2x}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2(x^2+1)^2}, \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x^2+1)^2}, \text{ полагая } \beta = 1, \\ n = 3; \text{ слѣд.}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7}{4} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \\ \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7}{8} \cdot \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{7}{8} \int \frac{1}{x^2+1}, \text{ гдѣ } \beta = 1, n = 2;$$

наконецъ

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} + \int \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \\ \frac{7}{8} \cdot \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7x}{8(x^2+1)} + \\ \frac{1}{8} A (\text{tang} = x) + C.$$

Собравши всѣ выводы, составимъ :

$$y = \frac{2+x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7x-8}{8(x^2+1)} + \frac{1}{8} A. (\text{tang} = x) + C.$$

Такимъ же образомъ найдемся интеграль $\frac{dy}{dx} =$

$\frac{1}{(1+x)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2}$. Въ сей дроби представля-
ють нѣкоторыя затрудненія токмо слѣдующіе
члены :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Сперва находимъ

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \\ - \frac{x+1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2+1};$$

попомъ

$$\int \frac{1}{4} \cdot \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{8} l(x^2+1) - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2+1}.$$

Наконецъ полный интегралъ данныхъ дробей будетъ

$$c - \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{8} l(x^2+1) - \frac{1}{2} \cdot A(\text{tang} = x).$$

Вотъ еще два примѣра :

$$\int \frac{b^3}{x^6 - a^6} = \frac{b^3}{3a^6} \left[lV \frac{(x-a)(x^2-ax+a^2)}{(x+a)(x^2+ax+a^2)} \dots \dots \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{V3} A(\text{tang} = \frac{2x-a}{aV3}) + 3 A(\text{tang} = \frac{2x+a}{aV3}) + C \right].$$

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{x+1} \right) = l \frac{(x-2)(x+1)}{x-3} + \frac{1}{x+1} + C.$$

Г Л А В А III.

Функции ирраціональныя.

§ 6. По изложеннымъ способамъ интегрируются всѣ функции алгебраическія раціональныя, или которыя можно сдѣлать таковыми посредствомъ преобразованій.

Разсмотримъ радикалы односложные. Пусть

будетъ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+x\sqrt{x+x^2}}}{x+\sqrt{x}}$; очевидно, что по

положеніи $x=z^2$, ирраціональности уничтожатся; ибо $\sqrt{}$ дѣлится на знаменатели 3 и 2 дробныхъ показателей въ данномъ выраженіи; посему опять $y=fx$, $x=\varphi z$, и

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{z^2 + z^9 + z^{12}}{z^5 + z^3} \cdot 6z^5 = 6 \cdot \frac{z^7 + z^{14} + z^{17}}{z^5 + z^3} =$$

$$6z^{11} + 6z - \frac{6z}{z^2 + 1}.$$

Интегралы первых двух членов суть $\frac{1}{2}z^{12}$ и $3z^2$; послѣдняго же члена интеграль должно найти такимъ образомъ:

$$\int \frac{6z}{z^2 + 1} = \int \frac{6z}{(z+1)(z^2 - z + 1)} = \int -\frac{2}{z+1} + \int \frac{2z+2}{z^2 - z + 1} =$$

$$= -l(z+1)^2 + \int \frac{2z+2}{z^2 - z + 1}.$$

Дабы опредѣлить послѣдній интеграль, обратимся къ § 4, III; изъ сравненія получимъ $B=2$, $A=2$, $p=-1$, $q=1$, $B'=3$, $\beta^2=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, и наконецъ

$$\int \frac{2z+2}{z^2 - z + 1} = l(z^2 - z + 1) + \sqrt{12} \cdot A \left(\text{tang} = \frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\text{слѣд. } y = l \frac{c(z^2 - z + 1)}{(z+1)^2} + \sqrt{12} \cdot A \left(\text{tang} = \frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\text{или } y = l \frac{c(Vx - \sqrt{Vx+1})}{(Vx+1)^2} + \sqrt{12} \cdot A \left(\text{tg} = \frac{2Vx-1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для $\frac{dy}{dx} = \frac{Vx}{x-1}$, полагаемъ $x = z^2$; отсюда

$$\text{уже } \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{2z^2}{z^2-1} = 2 + \frac{2}{z^2-1} = 2 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1},$$

$$\text{и } y = 2z + l(z-1) - l(z+1) + lc = 2z + l \frac{c(z-1)}{z+1} =$$

$$2Vx + l \frac{c(Vx-1)}{Vx+1}.$$

§ 7. Функціи, содержащія прехчленное ирраціональное количество $\sqrt{[A+Bx+Cx^2]}$, могутъ

быть двухъ видовъ: $\frac{X}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, $X\sqrt{A+Bx+Cx^2}$;

но какъ второй $= \frac{X(A+Bx+Cx^2)}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{X'}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$,
то должно изслѣдовать интегралы отъ перваго
выраженія.

I Случай. Пусть C будетъ количество по-
ложительное. Поелику $A+Bx+Cx^2=C(x^2+\frac{B}{C}x+\frac{A}{C})$,
то сдѣлавши $C=\gamma^2$, $\frac{B}{C}=\beta$, $\frac{A}{C}=\alpha$, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{X}{\gamma \sqrt{x^2 + \beta x + \alpha}}.$$

Чтобъ уничтожить иррациональность, поло-
жимъ $\sqrt{x^2 + \beta x + \alpha} = x + z$, гдѣ z можетъ быть
и положительнымъ ~~и отрицательнымъ~~ коли-
чествомъ. Изъ сего положенія выводимъ

$$\beta x + \alpha = z^2 + 2zx,$$

$$x = \frac{\alpha - z^2}{2z - \beta},$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-2(z^2 - \beta z + \alpha)}{(2z - \beta)^2},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{-2Z}{\gamma(2z - \beta)} \dots (A).$$

Ежели $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + bx + a}}$, то $C = \gamma^2 = 1$,
 $\beta = b$, $\alpha = a$, $X = 1 = Z$, z количество отрица-
тельное; послѣ сего выйдемъ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-2}{-2z - b} = \frac{2}{2z + b},$$

$$\text{и } y = \int \frac{2}{2z + b} dz + C.$$

Но въ семъ случаѣ имѣемъ $z^2 - 2zx = bx + a$, откуда $z = x + \sqrt{x^2 + bx + a}$; слѣд.

$$y = l [b + 2x + 2\sqrt{x^2 + bx + a}] + C.$$

Положивши $C = l \frac{c}{2}$, получимъ наконецъ

$$y = l c \left[\frac{1}{2} b + x + \sqrt{x^2 + bx + a} \right].$$

Въ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ найдемъ $X = 1 = Z$, $C = y^2 = 1$,

$\beta = 0$, $\alpha = a^2$, и взявши z отрицательно выведемъ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}, \quad z = x + \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$y = lz + C = lc [x + \sqrt{x^2 + a^2}].$$

Когда $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 + x^2}$, тогда $X = a^2 + x^2$,

$C = y^2 = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = a^2$, z отрицательное,

$$x = \frac{z^2 - a^2}{2z}, \quad Z = \frac{z^4 + 2a^2 z^2 + a^4}{4z^2}, \quad z = x + \sqrt{x^2 + a^2},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z^4 + 2a^2 z^2 + a^4}{4z^3} = \frac{1}{4}z + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{4z^3},$$

$$\text{и } y = \frac{1}{8}z^2 + \frac{a^2}{2}lz - \frac{a^4}{8z^2} + C = \frac{1}{8}\left(z^2 - \frac{a^4}{z^2}\right) + \frac{a^2}{2}lz + C,$$

$$\text{или } y = \frac{1}{8}[2x^2 + a^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2}] - \frac{a^4}{2x^2 + a^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2}} +$$

$$\frac{a^2}{2}l[x + \sqrt{x^2 + a^2}] + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} +$$

$$\frac{1}{2}a^2 l[x + \sqrt{x^2 + a^2}] + C.$$

II. Случай. Но ежели C количество отрицательное; то будемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X}{V - C \left(x^2 - \frac{B}{C}x - \frac{A}{C} \right)},$$

а положивши $C = \gamma^2$, $\frac{B}{C} = \beta$, $\frac{A}{C} = \alpha$, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X}{V - \gamma^2(x^2 - \beta x - \alpha)},$$

гдѣ производимель $x^2 - \beta x - \alpha = (x - a)(x - b)$,
когда $a = \frac{1}{2}\beta + V(\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha)$, $b = \frac{1}{2}\beta - V(\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha)$,

и попому $\frac{dy}{dx} = \frac{X}{\gamma V(x - a)(b - x)}$.

Чтобъ уничтожить ирраціональность, дѣлаемъ $V(x - a)(b - x) = \pm (x - a)z$; отсюда

$$b - x = (x - a)z^2, \quad z = \pm V \frac{b - x}{x - a},$$

$$x = \frac{b + az^2}{1 + z^2}, \quad x - a = \frac{b - a}{1 + z^2},$$

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{2z(a - b)}{(1 + z^2)^2}.$$

Послѣ сего получимъ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\mp 2Z}{\gamma(1 + z^2)} \dots \dots (B).$$

Пусть будетъ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{V(1 - x^2)} = \frac{1}{V-(x^2-1)}$.

Сравнивъ сіе съ общимъ выраженіемъ, найдемъ

$$\gamma = 1, \beta = 0, \alpha = 1, a = 1, b = -1, -z = V \frac{x+1}{1-x},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2}{1+z^2}, y = 2A (\text{tang} = -z) + C,$$

или

$$y = 2A. (\text{tang} = V \frac{x+1}{1-x}) + C.$$

Но знаемъ также, что $\int \frac{1}{V(1-x^2)} = A.(\sin = x)$; слѣд.

$$A.(\sin = x) = 2A.(\text{tang} = V \frac{x+1}{1-x}) + C.$$

Принявши $x = 0$, получимъ $0 = \frac{1}{4}\pi + C$, или $C = -\frac{1}{4}\pi$, и потому

$$A.(\sin = x) = 2A.(\text{tang} = V \frac{x+1}{1-x}) - \frac{1}{4}\pi.$$

Въ $\frac{dy}{dx} = V(d^2-x^2) = \frac{d^2-x^2}{V(d^2-x^2)} = \frac{d^2-x^2}{V-(x^2-d^2)}$ будетъ

$$\gamma = 1, \beta = 0, \alpha = d^2, a = d, b = -d, x = \frac{-d+dz^2}{1+z^2},$$

$$Z = \frac{4d^2 z^2}{(1+z^2)^2}, -z = V \frac{x+d}{d-x},$$

$$\text{и } \frac{dy}{dz} = \frac{8d^2 z^2}{(1+z^2)^3} = -\frac{8d^2}{(1+z^2)^3} + \frac{8d^2}{(1+z^2)^2}.$$

Интеграль сей функціи должно найти по § 5 такимъ образомъ :

$$\int \frac{-8d^2}{(1+z^2)^3} = -8d^2 \left[\frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(1+z^2)^2} \right] = -\frac{2d^2 z}{(1+z^2)^2} - 6d^2 \int \frac{1}{(1+z^2)^2};$$

послѣ сего

$$+ 8d^2 \int \frac{1}{(1+z^2)^2} - 6d^2 \int \frac{1}{(1+z^2)^2} = 2d^2 \int \frac{1}{(1+z^2)^2} =$$

$$2d^2 \left[\frac{z}{(1+z^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+z^2} \right], \quad d^2 \int \frac{1}{1+z^2} =$$

$$d^2 A (\text{tang} = -z) + C.$$

И такъ

$$y = -\frac{2d^2 z}{(1+z)^2} + \frac{d^2 z}{1+z^2} + d^2 A. (\text{tang} = -z) + C,$$

или

$$y = \frac{1}{2} x V(d^2 - x^2) + d^2 A. (\text{tang} = \sqrt{\frac{d+x}{d-x}}) + C.$$

§ 8. Какимъ образомъ отъ интеграцій входящихъ мнимыхъ количествъ, можно видѣть изъ слѣдующаго примѣра, который разрѣшимъ по формулѣ (A).

Ежели $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{V(1-x^2)}$, то $X=1=Z$, $C=y^2=-1$, $\alpha=-1$, $\beta=0$, $z^2-2xz=-1$, $z=x+V(x^2-1)$,

и $\frac{dy}{dz} = \frac{-2}{-2zV-1} = \frac{1}{zV-1}.$

Отсюда $y = \frac{1}{V-1} l z + C = \frac{1}{V-1} l [x + V(x^2-1)] + C.$

Но сверхъ сего $y=A(\cos x)$, или $x=\cos y$; слѣд.

$$y = \frac{1}{V-1} l [\cos y + V(\cos^2 y - 1)] + C,$$

$$= \frac{1}{V-1} l [\cos y + V-\sin^2 y] + C;$$

наконецъ

$$y V-1 = l (\cos y + \sin y V-1) + C.$$

Когда $y=0$, тогда $x=\cos y=1$, и $C=0$; слѣд. получаемъ ту же формулу

$$y \sqrt{-1} = l(\cos y + \sin y \sqrt{-1}),$$

которая была найдена въ Высш. Ал. § 130.

§ 9. Удобнѣйшія преобразованія познаются изъ опыта. Если $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(b+b-x)x}}$, то, положивши $b - x = z$, найдемъ

$x = b - z$, $\frac{dx}{dz} = -1$, и данная функція превратится въ $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}}$; отсюда интеграль (по прав. VI) опредѣлится

$$y = C + A \cdot \left(\cos = \frac{b-x}{b} \right).$$

Также въ $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$ дѣлаемъ

$a + x = z$, $x = z - a$, $\frac{dx}{dz} = 1$. Послѣ сего получимъ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{a}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}.$$

Сія функція относится къ теоріи § 7; ибо будемъ $X=a$, $\gamma=1$, $\beta=0$, $\alpha=-a^2$, $u^2 - 2zu = -a^2$,

$u = a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}$, $\frac{dy}{du} = \frac{a}{u}$; наконецъ

$$y = alc.[a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}].$$

Г Л А В А IV.

Дифференціалы деучленные.

§ 10. Объинтегрируемъ выраженіе $\frac{dy}{dx} =$

$Kx^m(a+bx^n)^n$, гдѣ m , n , p какія либо количества, цѣлыя или дробныя, положительныя или отри-

дапельныя. Полагаемъ $a + bx^n = z$; изъ чего $x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; возвысивъ обѣ части уравн. въ степень $m+1$ и одифференціаливъ, выведемъ

$$x^{m+1} = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}},$$

$$(m+1)x^m \frac{dx}{dz} = \frac{(m+1)(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{n \cdot b^{\frac{m+1}{n}}}, \quad \text{и}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}-1}}{nb^{\frac{1}{n}}},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{K(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{nb^{\frac{m+1}{n}}}, \quad z^p.$$

Когда показатель разности $z-a$ цѣлое, интегрированіе функціи извѣстно. Если $\frac{m+1}{n} = 1$, то должно интегрировать z^p ; если $\frac{m+1}{n} - 1$ положительное $= h$, то получится рядъ одночленныхъ количествъ, по разложеніи $(z-a)z^p$; наконецъ если $\frac{m+1}{n} - 1$ отрицательное, то выйдетъ раціональная дробь.

И такъ когда показатель отъ x въ бинома, увеличенный единицею, дѣлится на показателя отъ x въ биномѣ, тогда интегрированіе функціи извѣстно.

§ 11. Сей случай интегрированія не есть единственный; раздѣливъ данный биномъ на x^n и умноживъ количесва вѣ бинорма на x^{np} , получимъ

$$\frac{dy}{dx} = Kx^{m+np} (b + ax^{-n})^p.$$

Приложивъ сюда предыдущую теорему, видимъ, что сіе выраженіе можетъ быть интегрировано, если только

$$\frac{m + np + 1}{-n}, \text{ или лучше } \frac{m + 1}{n} + p = \text{цѣлому.}$$

Изъ сего заключаемъ, ежели вышеупомянутое условіе не удовлетворяется, то прибавивъ должно p къ дробному выведенному результату $\frac{m+1}{n}$, и, когда сумма будетъ цѣлое, то функция можетъ интегрироваться по сему способу.

§ 12. Замѣтимъ, что если p дробное (и сей случай важнѣйшій, ибо иначе останется интегрировать только рядъ одночленныхъ количесвъ), то, предположивъ q знаменателемъ для p , изчисленіе сдѣлаемъ простѣе, приравнявъ $a + bx^n = z^q$.

Пусть пребудетъ обьинтегралить

$$\frac{dy}{dx} = x^{-2} (a + x^3)^{-\frac{5}{2}}. \text{ Здѣсь } \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2},$$

по сравненіи даннаго выраженія съ начальнымъ

$$\frac{dy}{dx} = Kx^m (a + bx^n)^p; \text{ ибо } m = -2, n = 3, p = -\frac{5}{2};$$

потомъ $\frac{m+1}{n} + p = -2$: слѣд. функция можетъ

быть интегрирована. Умноживъ и раздѣливъ

данную функцію на $(x^3)^{-\frac{5}{3}}$, найдемъ

$\frac{dy}{dx} = x^{-7} (1 + ax^{-3})^{-\frac{5}{3}}$. Положивъ $1 + ax^{-3} = \frac{a + x^3}{x^3} = z^3$, получимъ $x = \left(\frac{z^3 - 1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$; но поелику здѣсь $y = Fx$, $x = \varphi z$, то $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$; слѣд. дифференціаливъ уравн. $1 + ax^{-3} = z^3$, опредѣлимъ $\frac{dx}{dz} = -\frac{z^2}{a} \left(\frac{z^3 - 1}{a}\right)^{-\frac{4}{3}}$; отсюда

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{(z^3 - 1)}{a} \cdot \frac{z^{-3}}{a} = -\frac{1 - z^{-3}}{a^2}.$$

Интеграль сего выраженія будетъ

$y = c - \frac{1}{a^2} \left(z + \frac{z^{-2}}{2}\right)$, по вставкѣ величины z и

по приведеніи $y = c - \left\{ \frac{3x + 2a}{2a^2 x \sqrt{(a + x^3)^2}} \right\}$.

Если $\frac{dy}{dx} = x^3 (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, то, сдѣлавъ $a^2 + x^2 = z^2$,

изъ чего $x = (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{dx}{dz} = \frac{3z^2}{2(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$, и

$$\frac{dy}{dz} = \frac{3}{2} z^3 (z^2 - a^2) = \frac{3}{2} (z^5 - a^2 z^3).$$

Изъ сего интеграль $y = \frac{3}{2} \left(\frac{z^6}{6} - \frac{a^2 z^4}{4} \right) + C =$
 $\frac{3}{16} z^6 - \frac{3}{8} a^2 z^4 + C = \frac{2/4 z^6 - 4/2 a^2 z^4}{112} + C =$

$$\frac{3}{56} (4z^3 - 7a^2)z^4 = \frac{3}{56} (4x^2 - 3a^2) \sqrt[3]{(a^2 + x^2)^4} + C.$$

Пусть $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = a(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} =$
 $ax^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{3}{2}}.$

Полагаемъ $1+x^{-2}=z^2$; дифференцируемъ сие выражение и находимъ $\frac{dx}{dz} = -z(z^2-1)^{-\frac{3}{2}}$; слѣд.

$\frac{dy}{dz} = -\frac{a}{z^2}$. Интеграль сего выраженія будетъ

$$y = \frac{a}{z} + C; \text{ по вставкѣ величины } z, y = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

§ 13. Когда въ функціи нѣтъ сихъ условій интегрированія, тогда должно данный интеграль дѣлать зависящимъ отъ другаго простѣйшаго посредствомъ интегрированія по частямъ (пр. V).

Положивъ также $z = a + bx^n$, сначала принимаемъ z за постоянное и интегрируя только другаго

множителя x , получаемъ $\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}$; сие выраженіе

дифференцируемъ, принимая за переменное множителя z , $\frac{px^{m+1}z^{p-1}}{m+1} \cdot \frac{dz}{dx}$; интеграль сего выра-

женія вычитаемъ изъ перваго интеграла, т. е.

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{x^{m+1}z^p}{m+1} - \frac{p}{m+1} \int z^{p-1} x^{m+1} \frac{dz}{dx};$$

отсюда $\int \frac{dy}{dx} = \frac{x^{m+1}z^p}{m+1} - \frac{np}{m+1} \int x^{m+n} z^{p-1} \dots (1),$

послику $\frac{dz}{dx} = nbx^{n-1}.$

Но $z^p = z^{p-1} \cdot z = z^{p-1} (a + bx^n)$; вставивъ $az^{p-1} + bx^n z^{p-1}$ вмѣсто z^p въ данное выраженіе $x^m \cdot z^p$, найдемъ

$$\int \frac{dy}{dx} = a \int x^m z^{p-1} + b \int z^{p-1} x^{m+n} \dots (2);$$

по сравненіи величинъ (1) и (2), найдемся

$$b(m+np+1) \int z^{p-1} x^{m+n} = x^{m+1} z^p - a(m+1) \int z^{p-1} x^m \dots (3).$$

Перемѣнимъ $p-1$ на p и $m+n$ на m , получимъ

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{x^{m-n+1} z^{p+1} - a(m-n+1) \int x^{m-n} z^p}{b(m+np+1)} \dots (A).$$

По вставкѣ вмѣсто послѣдняго члена уравненія (2) величину его, опредѣляемую уравненіемъ (3), выйдемъ

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{z^p x^{m+1} + a n p \int x^m z^{p-1}}{m+np+1} \dots (B);$$

въ сихъ уравненіяхъ $z = a + bx^n$.

§ 14. Слѣдуетъ употребленіе сихъ различныхъ формулъ.

1) Уравненіе (A) приводитъ интегралъ $\int \frac{dy}{dx}$

въ зависимость отъ $\int x^{m-n} z^p$: оно служитъ къ тому, чтобъ уменьшать показателя x въ бинома n единицами. Такимъ образомъ предложенный интегралъ будетъ зависеть отъ $\int x^{m-in} z^p$, гдѣ i число цѣлое положительное.

2) Формула (B) напротивъ служитъ къ уменьшенію показателя p отъ бинома z 1^ю, 2^{мя}, 3^{...} i единицами.

3) Разрѣшивъ уравненія (A) и (B) въ отношеніи къ члену, который должно интегрировать

во 2й части, получаемъ, по переменѣ m — n на m въ (A) и p —1 на p въ (B),

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{x^{m+1} z^{n+1} \cdot b(m+np+n+1) \int x^m z^n}{a(m+1)} \dots (C),$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{-x^{m+1} z^{p+1} + (m+np+n+1) \int x^m z^p}{an(p+1)} \dots (D).$$

Сии формулы служатъ къ увеличенію показателя отъ x въ бинома и показателя отъ бинома, что бываетъ нужно въ томъ случаѣ, когда пошъ или другой отрицательный.

4) И такъ можно напередъ опредѣлить законъ показателей отъ x въ результатѣ предложенной интеграціи. Легко предвидѣть слѣдующее разложеніе функціи:

$$\int \frac{x^5}{V(1-x^2)} = (Ax^4 + Bx^2 + C)V(1-x^2);$$

ибо, сравнивъ данную функцію съ общемо формулою (A), имѣемъ $m=5$, $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, и

$$\int x^5 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^4 V(1-x^2)}{5} + \frac{4}{5} \int \frac{x^3}{V(1-x^2)},$$

$$\int x^3 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^2 V(1-x^2)}{3} + \frac{2}{3} \int \frac{x}{V(1-x^2)},$$

$$\int x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -V(1-x^2) + C;$$

$$\text{изъ сего } \int \frac{x^5}{V(1-x^2)} = -\left\{ \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right\} V(1-x^2) + C.$$

Вмѣсто приложенія къ показаннымъ формуламъ, можно достигнуть тѣхъ же результатовъ по-

средствомъ сравненія дифференціаловъ сихъ количествъ почленно, какъ въ способъ неопределенныхъ коэффициентовъ (§ 5) чѣмъ опредѣляются A, B, C ; именно одифференціаливъ уравненіе

$$\int \frac{x^5}{V(1-x^2)} = (Ax^4 + Bx^2 + C)V(1-x^2), \text{ получимъ,}$$

по приведеніи къ одному знаменателю,

$$x^5 = (4Ax^3 + 2Bx)(1-x^2) - x(Ax^4 + Bx^2 + C) = \\ = -x^5 5A + x^3(4A - 5B) + x(2B - C);$$

отсюда, по сравненіи коэффициентовъ почленно,

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}.$$

§ 15. Предлагаемъ здѣсь способъ интеграціи замѣчательный по своей простотѣ и по приложенію своему ко множеству случаевъ.

Одифференціаливъ функцію $y = x^{n-1}V(1-x^2)$, найдемъ

$$\frac{dy}{dx} = (n-1)x^{n-2}V(1-x^2) - x^n(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ = (n-1)x^{n-2}V(1-x^2) - \frac{x^n}{V(1-x^2)};$$

по приведеніи къ одному знаменателю,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(n-1)x^{n-2}(1-x^2) - x^n}{V(1-x^2)} = \\ = \frac{(n-1)x^{n-2} - (n-1)x^n - x^n}{V(1-x^2)} = \frac{(n-1)x^{n-2} - nx^n}{V(1-x^2)};$$

объинтегрируемъ и перестановимъ, получимъ

$$\int \frac{x^n}{V(1-x^2)} = -\frac{x^{n-1}V(1-x^2)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}}{V(1-x^2)} \dots (E).$$

Примѣнимъ сей способъ изчисленія къ выраже-
нію $x^{n-1}V(x^2 \pm 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = (n-1)x^{n-2}V(x^2 \pm 1) \pm x^n(x^2 \pm 1)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{(n-1)x^{n-2}(x^2 \pm 1) \pm x^n}{V(x^2 \pm 1)}; \text{ отсюда, по разложеніи}$$

и приведеніи по верхнему знаку, выйдемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^n \pm (n-1)x^{n-2}}{V(x^2 \pm 1)};$$

объинтегрируемъ и перестановимъ, находимъ

$$\int \frac{x^n}{V(x^2 \pm 1)} = \frac{x^{n-1}V(x^2 \pm 1)}{n} \mp \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}}{V(x^2 \pm 1)} \dots (F).$$

По симъ формуламъ можно интегрировать
всякую функцію подъ радикаломъ $V(A + Bx + Cx^2)$;

ибо ее можно привести въ видъ $\frac{z^n}{V(a^2 \pm z^2)}$ или

$\frac{z^n}{V(z^2 \pm a^2)}$ (§ 9). Не трудно, раздѣливъ оба чле-

на дроби на a , превратить попомъ радикаль
въ $V(1 \pm x^2)$ или $V(x^2 \pm 1)$. Выраженія (E) и (F)
могутъ служить къ приведенію искомаго ин-
теграла, по окончательному выводу, въ зави-
симость отъ

$$\int \frac{x}{V(x^2 \pm 1)} \text{ или } \int \frac{x}{V(1-x^2)} \dots \text{ если } n \text{ нечетное,}$$

$$\int \frac{1}{V(x^2 \pm 1)} \text{ или } \int \frac{1}{V(1-x^2)} \dots \text{ если } n \text{ четное.}$$

Два 1^е интеграла относятся къ пр. IV, 3^й къ
§ 7, а 4^й есть $A(\sin = x)$.

Слѣдующіе примѣры интегрируются по формулѣ (E).

$$\int \frac{x}{V(1-x^2)} = -V(1-x^2) + C.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{V(1-x^2)} &= -\frac{xV(1-x^2)}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{V(1-x^2)} + C = \\ &= -\frac{x}{2} V(1-x^2) + \frac{1}{2} A(\sin = x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{V(1-x^2)} &= -\frac{x^2 V(1-x^2)}{3} + \frac{2}{3} \int \frac{x}{V(1-x^2)} + C = \\ &= -\frac{x^2}{3} V(1-x^2) - \frac{2}{3} V(1-x^2) + C = \\ &= -\left(\frac{x^2+2}{3}\right) \cdot V(1-x^2) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{V(1-x^2)} &= -\frac{x^3 V(1-x^2)}{4} + \frac{3}{4} \int \frac{x^2}{V(1-x^2)} + C = \\ &= -\frac{x^3}{4} V(1-x^2) - \frac{3x}{8} V(1-x^2) + \frac{3}{8} A(\sin = x) + C = \\ &= -\left(\frac{2x^2+3}{8}\right) \cdot x V(1-x^2) + \frac{3}{8} \cdot A(\sin = x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6}{V(1-x^2)} &= -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{1.5}{4.6} x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) V(1-x^2) + \dots \\ &\quad + \frac{1.3.5}{2.4.6} A(\sin = x) + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^7}{V(1-x^2)} = -\left(\frac{x^6}{7} + \frac{1.6}{5.7} x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7} x^2 + \frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right) V(1-x^2) + C.$$

§ 16. Если бы показашель n былъ отрицательный, то не лзя бы болѣе прилагать формулѣ (E) и (F); но сдѣлавъ $x=z^{-1}$, получимъ слѣдующія:

$$\frac{1}{x^n V(1-x^2)} = - \frac{z^{n-1}}{V(z^2-1)},$$

$$\frac{1}{x^n V(x^2 \pm 1)} = - \frac{z^{n-1}}{V(1 \pm z^2)}.$$

Впрочем и сей случай можно разрешить подобно предыдущему (§ 15); ибо если $y =$

$$x^{-(n-1)} V(1-x^2), \text{ то } \frac{dy}{dx} = \frac{-(n-1)}{x^2 V(1-x^2)} + \frac{n-2}{x^{n-2} V(1-x^2)};$$

отсюда

$$\int \frac{1}{x^n V(1-x^2)} = - \frac{V(1-x^2)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{x^{n-2} V(1-x^2)} \quad (9).$$

Употребление сей формулы не трудно. Сверхъ сего если $n=1$, тогда.

$$\int \frac{1}{x V(1-x^2)} = C - l \left\{ \frac{1+V(1-x^2)}{x} \right\}.$$

Положивъ $1-x^2=z^2$, получаемъ $x=V(1-z^2)$,

$$\frac{dx}{dz} = - \frac{z}{V(1-z^2)} \text{ и } \frac{dy}{dz} = - \frac{1}{1-z^2};$$

$$\begin{aligned} \int - \frac{1}{1-z^2} &= - \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{1}{1+z} + \int \frac{1}{1-z} \right\} \\ &= - \frac{1}{2} \left\{ \log(1+z) - \log(1-z) \right\} + C \\ &= - \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\} + C; \end{aligned}$$

по вставкѣ величины z , выйдетъ $-\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1+V(1-x^2)}{1-V(1-x^2)} \right\}$,

изъ чего, по умноженіи обоихъ членовъ дроби на $1+V(1-x^2)$, находимъ

$$-\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{(1+V(1-x^2))^2}{x^2} \right\} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \left(\frac{1+V(1-x^2)}{x} \right)^2 \right\} \\ = -\log \left\{ \frac{1+V(1-x^2)}{x} \right\};$$

$$\text{слѣд. } \int \frac{1}{xV(1-x^2)} = -\log \left\{ \frac{1+V(1-x^2)}{x} \right\} + C.$$

Также

$$\int \frac{x^m}{V(2ax-x^2)} = -\frac{x^{m-1}}{m} V(2ax-x^2) + \dots \\ \frac{(2m-1)}{m} a \int \frac{x^{m-1}}{V(2ax-x^2)} \dots (H).$$

Г Л А В А V.

Функции трансцендентныя: показательныя, логарифмическія, тригонометрическія.

§ 17. Извѣстно изъ Дифференціального изчисленія, что

$$\frac{d(a^x)}{dx} = ka^x = la \cdot a^x;$$

$$\text{отсюда } a^x = \frac{d(a^x)}{dx} \cdot \frac{1}{la}; \text{ слѣд } \int a^x = \frac{a^x}{la}.$$

По сему способу можно интегрироватьъ два случая функций показательныхъ:

1) Когда $z=f(a^x)$, то функция $\frac{dy}{dx} = za^x$, при положеніи $a^x = u$, превращишся въ $\frac{dy}{du} = \frac{fu}{la}.$

На прим. если $\frac{dy}{dx} = \frac{a^x}{V(1 + a^{nx})}$, то $\frac{dy}{du} = \dots$

$$\frac{1}{la} \cdot \frac{1}{V(1 + u^n)}.$$

2) Одифференціаливъ $y = ze^x$, получаемъ $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{dz}{dx} e^x + e^x z = e^x \left(z + \frac{dz}{dx} \right).$$

Изъ сего заключаемъ, что всякую показательную функцію, въ которой множитель количества e^x составленъ изъ двухъ частей, изъ коихъ одна есть производная функція другой, не трудно интегрировать. На прим.

$$\int \frac{dy}{dx} = \int e^x (3x^2 + x^3 - 1) = e^x (x^3 - 1).$$

Также, сдѣлавъ $1 + x = z$, найдемъ

$$\int \frac{e^x x}{(1+x)^2} = \int \frac{e^{z-1}}{z^2} (z-1) = \int \frac{e^z}{e} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{e^z}{ez};$$

по вставкѣ величины z ,

$$\frac{e^z}{ez} = \frac{e^{x+1}}{e(1+x)} = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

§ 18. Во всякомъ другомъ случаѣ должно употреблять способъ интегрированія по частямъ (пр. V). Дабы получить интегралъ отъ $x^n a^x$, принимаемъ сначала x^n за постоянную величину, изъ чего находимъ

$$\int x^n a^x = \frac{a^x \cdot x^n}{la} - \frac{n}{la} \int a^x x^{n-1};$$

такимъ же образомъ определяемъ

В

$$\int a^x x^{n-1} = \frac{a^x \cdot x^{n-1}}{la} - \frac{(n-1)}{la} \int a^x x^{n-2},$$

$$\int a^x x^{n-2} = \frac{a^x \cdot x^{n-2}}{la} - \frac{(n-2)}{la} \int a^x x^{n-3}, \text{ и т. д.};$$

$$\begin{aligned} \text{слѣд. } \int x^n a^x &= a^x \left\{ \frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{l^2 a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{l^3 a} - \dots \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{l^{n+1} a} \right\} + C. \dots (1) \end{aligned}$$

Очевидно, что по сему же способу можно интегрировать za^x , гдѣ z есть цѣлая, алгебраическая функція x , т. е.

$$\int za^x = \frac{za^x}{la} - \int \frac{a^x}{la} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

§ 19. Если показатель n отрицательный, то изложенный способ должно измѣнить такъ чиня показателъ x^n возрастающъ. Здѣсь при интегрированіи принимаемъ сначала a^x за постоянное, именно (пр. II)

$$\int \frac{a^x}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x}{x^{n-1}};$$

$$\text{потомъ } \int \frac{a^x}{x^{n-1}} = \frac{-a^x}{(n-2)x^{n-2}} + \frac{la}{n-2} \int \frac{a^x}{x^{n-2}},$$

$$\int \frac{a^x}{x^{n-2}} = \frac{-a^x}{(n-3)x^{n-3}} + \frac{la}{n-3} \int \frac{a^x}{x^{n-3}}, \text{ и т. д.};$$

$$\text{слѣд. } \int \frac{a^x}{x^n} = \frac{-a^x}{n-1} \left\{ \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{la}{(n-2)x^{n-2}} + \dots \right.$$

$$\dots \frac{l^2 a}{(n-2)(n-3)x^{n-3}} \dots \frac{l^{n-2} a}{(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x} \Big\} +$$

$$\frac{l^{n-1} a}{(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \int \frac{a^x}{x} \dots (2).$$

Далѣ не лзя продолжать изчисленія; ибо должно прозясть $n = 1$ отъ чего получится безконечное. Интеграль $\int \frac{a^x}{x}$ принимается за трансцендентный особаго рода, независящій отъ дугъ, ни отъ логарифмовъ. Посему употребляются для опредѣленія онаго ряды (Выш. Алг. стр. 262),

$$a^x = 1 + la \cdot x + \frac{l^2 a \cdot x^2}{2} + \frac{l^3 a \cdot x^3}{2 \cdot 3} \dots \frac{l^n a x^n}{2 \cdot 3 \dots n},$$

$$\text{и } \frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + la + \frac{l^2 a x}{2} + \frac{l^3 a x^2}{2 \cdot 3} + \dots$$

объинтегрируемъ каждый членъ, получаемъ (Пр II)

$$\int \frac{a^x}{x} = lx + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2 \cdot 2} + \frac{x^3 l^3 a}{3 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + C.$$

§ 20. Если n дробь, то по вышепоказаннымъ рядамъ можно показателя отъ x привести въ предѣлы между 0 и 1 или—1; разложеніе въ рядъ опредѣлитъ искомый интеграль приближенно. Пусть $n = -\frac{1}{2}$; по (1) формуль

$$\int \frac{a^x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^x}{la \sqrt{x}} \Big\{ 1 + \frac{1}{2xla} + \frac{1 \cdot 3}{4x^2 (la)^2} + \dots$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8x^3 (la)^3} + \dots \Big\} + C;$$

В 2

$$\int \frac{x^m}{l^m x} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1)l^{n-1}x} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m}{l^{n-1}x};$$

равно $\int \frac{x^m}{l^{n-1}x} = - \frac{x^{m+1}}{(n-2)l^{n-2}x} + \frac{m+1}{n-2} \int \frac{x^m}{l^{n-2}x}$, и т. д.;

по соединеніи всѣхъ сихъ выводовъ, будетъ

$$\int \frac{x^m}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{n-1} \left\{ \frac{1}{l^{n-1}x} + \frac{m+1}{n-2} \cdot \frac{1}{l^{n-2}x} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)} \cdot \frac{1}{l^{n-3}x} + \dots \right\} + \frac{(m+1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \int \frac{x^m}{lx} \dots (2)$$

Въ сію формулу отъ $n=1$ входитъ безконечное. Для сего дѣлаемъ $x^{m+1} = z$, $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(m+1)x^m}$,

$lx = \frac{lz}{m+1}$, и $\frac{x^m}{lx}$ превратится въ $\frac{1}{lz}$, или въ $\frac{e^u}{u}$, когда сдѣлаемъ $lz = u$ и перемѣнимъ независимое перемѣнное.

Сія функція, подобная вышеизъясненной (§ 19); интегрируется посредствомъ рядовъ.

§ 23. Когда n дробь положительная или отрицательная, то можно интегрировать по изложеннымъ формуламъ, при чемъ интегралъ приводится въ интегралъ одинакаго вида съ данною функціей, гдѣ и заключается между 1 и -1. Пусть $n = -\frac{1}{2}$, по формулѣ (1),

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{lx}} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ \frac{1}{(lx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{4(m+1)^2(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8(m+1)^3(lx)^{\frac{7}{2}}} + \dots \right\} + C.$$

§ 24. Когда въ функцію входятъ дуги, тогда употребляется интегрированіе по частямъ; ибо дифференціалы сихъ дугъ суть функціи алгебраическія; если примемъ оныя (Прав. V) сначала за постоянныя, то данная функція для интегрированія отъ нихъ освободилась. Такимъ образомъ, ежели z функція x ,

$$\int z. A(\sin = x) = A(\sin = x). \int z - \int \frac{1}{V(1-x^2)} \cdot \int z.$$

Равно

$$\int z. A(\text{tang} = x) = A(\text{tang} = x). \int z - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \int z.$$

§ 25. Но когда функціи содержатъ тригонометрическія линей, то въ семъ случаѣ употребляются различные способы интегрированія. Изложимъ главные.

1^й Способъ. Тѣ функціи, въ коихъ находящіяся линей тригонометрическія, всегда можно привести въ двучленные дифференціалы, положивъ $\sin x$ или $\cos x = z$.

Дѣйствительно пусть

$$\sin x = z, \cos x = V(1-z^2), \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{z}{V(1-z^2)},$$

$$\sin^m x. \cos^n x = z^m. V(1-z^2)^{n-1}.$$

1) Если n нечетное, радикаль уничтожается.

2) Если m нечетное, то будемъ имѣть 1^е условіе интегральности (§ 10), поскольку $\frac{1}{2}(m+1)$ есть цѣлое.

3) Если m и n четные, то удовлетворится 2е условие интегрируемости (§ 11), поскольку $\frac{1}{2}(m+1+n-1)$ есть целое.

Разрѣшимъ примѣры.

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x = \int z^4 (1-z^2) = \int (z^4 - z^6);$$

последнее выраженіе не трудно интегрировать;

$$\int (z^4 - z^6) = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + C.$$

$$\text{слѣд. } \int \sin^4 x \cos^3 x = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.$$

Для интегрированія выраженія $\sin^3 x$ получаемъ по § 15,

$$\int \frac{z^3}{V(1-z^2)} = -\frac{(z^2+2)}{5} \cdot V(1-z^2) + C;$$

$$\text{и } \int \sin^3 x = -\frac{1}{3}(\mathfrak{F} - \cos^2 x) \cos x + C.$$

Пусть требуется интеграль отъ $\sin^4 x$. По сему же способу преобразуемъ данное выраженіе, изъ чего будемъ

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x &= \int \frac{z^4}{V(1-z^2)} = -\left(\frac{1}{4}z^3 + \frac{3}{8}z\right)V(1-z^2) + \frac{3}{8}A(\sin^{-1}z) + C, \\ &= -\left(\frac{1}{4}\sin^3 x + \frac{1}{8}\sin x\right)\cos x + \frac{3}{8}x + C. \end{aligned}$$

§ 26. II способъ. Изъ Дифференціального изчисленія знаемъ, что ежели $y = \sin kx$, то $\frac{dy}{dx} = k \cos kx$; отсюда явствуетъ, что

$$\int \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx + C. \dots (1).$$

$$\int \sin kx = -\frac{1}{k} \cos kx + C. \dots (2).$$

Но въ Высшей Алгебрѣ изложенъ способъ разложенія въ рядъ всякой степени отъ $\sin x$ и $\cos x$ по кривымъ дуги x ; слѣдовательно, по разложеніи, останется интегрировать рядъ членовъ, имѣющихъ выше показанный видъ. Такимъ образомъ (Высш. Алг. стр. 282)

$$\int \cos^5 x = \int \left(\frac{1}{16} \cos 5x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{5}{8} \cos x \right);$$

отсюда по 1^й формулѣ выйдетъ

$$\int \cos^5 x = \frac{1}{80} \sin 5x + \frac{5}{48} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x + C.$$

Сей способъ весьма употребителенъ; ибо легче получить рѣшенія числовыя, когда берутся синусы и косинусы кривыхъ дугъ вмѣсто степеней сихъ линей.

§ 27. III^й Способъ. Формулы (К), выведенныя въ Высшей Алгебрѣ (§ 129) служатъ для обращенія функцій синусовъ и косинусовъ въ функціи показательныя; чрезъ сіе самое интегрированіе функцій тригонометрическихъ обращается въ интегрированіе функцій показательныхъ (§ 17).

§ 28. IV^й Способъ. Онъ состоитъ въ интегрированіи по частямъ; разложимъ произведеніе $\sin^m x \cdot \cos^n x$ на $\sin x \cdot \cos^n x \times \sin^{m-1} x$; интегралъ 1^{го} множителя будетъ $-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$; ибо $\frac{d \cos^n x}{dx} = \dots$
 $-\cos^{n-1} x \sin x$.

И такъ, $\int \sin^m x \cos^n x = \int \sin x \cdot \cos^n x \cdot \sin^{m-1} x =$
 $= -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \cdot \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^{n+2} x;$

но $\cos^{n+2} x = \cos^n x \cdot \cos^2 x = \cos^n x (1 - \sin^2 x)$
вставивъ въ 1^е уравненіе сію величину $\cos^{n+2} x$
найдемъ

$$\begin{aligned} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^{n+2} x &= \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^n x (1 - \sin^2 x) \\ &= \int \sin^{m-2} x (\cos^n x - \cos^n x \cdot \sin^2 x) = \\ &= \int \cos^n x \sin^{m-2} x - \int \cos^n x \cdot \sin^m x; \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^n x &= - \frac{\cos^{n+1} x \cdot \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \times \\ &\times \int (\cos^n x \cdot \sin^{m-2} x - \cos^n x \cdot \sin^m x), \end{aligned}$$

по уничтоженіи знаменателя получимъ сперва

$$\begin{aligned} (n+1) \int \sin^m x \cos^n x &= - \cos^{n+1} x \cdot \sin^{m-1} x + \\ &+ (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^n x - (m-1) \int \sin^m x \cos^n x; \end{aligned}$$

потомъ по соединеніи одинаковыхъ членовъ

$$\begin{aligned} (m+n) \int \sin^m x \cdot \cos^n x &= - \cos^{n+1} x \cdot \sin^{m-1} x + \\ &+ (m-1) \int \cos^n x \sin^{m-2} x; \end{aligned}$$

наконецъ

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^n x &= - \frac{\cos^{n+1} x \cdot \sin^{m-1} x}{m+n} + \\ &+ \frac{m-1}{m+n} \int \cos^n x \cdot \sin^{m-2} x \dots (J). \end{aligned}$$

Такимъ же образомъ въ отношеніи къ косинусу
находимъ :

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x = \int \cos x \cdot \sin^m x \cdot \cos^{n-1} x;$$

и какъ вообще $\frac{d \sin^q x}{dx} = q \sin^{q-1} x \cos x$,

по $\int \cos x \sin^m x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, и

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x = \int \cos x \sin^m x \cdot \cos^{n-1} x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cdot \cos^{n-1} x + \\ \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^{m+2} x.$$

Равно и здѣсь $\sin^{m+2} x = \sin^m x \cdot \sin^2 x = \sin^m x (1 - \cos^2 x)$; по вставкѣ сей величины, найдемъ

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cdot \cos^{n-1} x + \dots$$

$$\frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^m x (1 - \cos^2 x) = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cdot \cos^{n-1} x + \\ \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^m x - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cdot \cos^n x;$$

изъ чего, по приведеніи къ одному знаменателю и по соединеніи одинаковыхъ членовъ, получимъ

$$(m+n) \int \sin^m x \cdot \cos^n x = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^m x$$

$$\text{и} \quad \int \sin^m x \cdot \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+n} + \dots \\ \frac{n-1}{m+n} \int \cos^{n-2} x \sin^m x \dots \dots (K).$$

Сія формулы понижаютъ показателя синуса или косинуса; по соединеніи послѣдователь-

ныхъ результатовъ, находится интеграль коеда m и n суть цѣлыя и положительныя. Найдёмъ интеграль производной функции $\sin^3 x \cos^2 x$. По формулъ (J) будетъ, при чемъ $m=3, n=2$,

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x = -\frac{1}{5} \sin^2 x \cdot \cos^3 x + \frac{2}{5} \int \sin x \cdot \cos^2 x ;$$

интеграль послѣдняго члена во 2й частии уравненія найдется по формулъ (K), при чемъ уже $m=1, n=2$,

$$\int \sin x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{3} \sin^2 x \cdot \cos x + \frac{1}{3} \int \sin x ;$$

но интеграль послѣдняго члена есть $-\frac{1}{3} \cos x + C$; по соединеніи сихъ выводовъ, получимъ

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x &= -\frac{1}{5} \sin^2 x \cos^3 x + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \\ &\quad \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cos x + C \\ &= \cos x \left\{ -\frac{1}{5} \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \frac{2}{15} \sin^2 x - \frac{2}{15} \right\} + C \\ &= -\frac{1}{5} \cos^3 x \left(\sin^2 x + \frac{2}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

§ 29. Ежели m или n отрицательное, то для сихъ формулъ потребно нѣкоторое измѣненіе. Формула 1я, по перемѣнѣ n на $-n$, даетъ

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} = -\frac{\sin^{m-1} x}{(m-n) \cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^n x} \dots (L);$$

гдѣ очевидно, что искомый интеграль будетъ зависѣть отъ $\frac{\sin x}{\cos^n x}$ или $\frac{1}{\cos^n x}$, смотря по по-

му, будетъ ли m нечетное или четное. Интеграль первой производной функции найдемъ, сдѣлавъ $\cos x = z$,

$$\text{откуда } \frac{dz}{dx} = -\sin x, \text{ и}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^n x} = - \int \frac{1}{z^n} = \frac{1}{(n-1)z^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x};$$

интеграль впокой производной функціи опредѣлимъ въ § 30.

Во второй формулѣ сдѣлаемъ n отрицательнымъ, разрѣшимъ въ отношеніи къ последнему члену, послѣ перемѣнимъ n на $n-2$, выйдетъ сперва :

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n)\cos^{n+1} x} - \frac{(n+1)}{(m-n)} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n+2} x}, \text{ или}$$

$$\frac{n+1}{m-n} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n+2} x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n)\cos^{n+1} x} - \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x};$$

потомъ, когда поставимъ $n-2$ вмѣсто n ,

$$\frac{n-1}{m-n+2} \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n+2)\cos^{n-1} x} - \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x};$$

отсюда по уничтоженіи коэффициента въ первой части уравненія выйдетъ

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{(m-n+2)}{(n-1)} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x}. \quad (M).$$

Изъ сего явствуетъ, что искомый интеграль обращается въ интеграль опъ $\sin^m x$, или опъ $\frac{\sin^m x}{\cos x}$, смотря по тому, будетъ ли n четное или

нечетное. Последній теперь опредѣлимъ; первый же опредѣляется формулою (J).

§ 30. Если $n=0$, то формула (J) приметъ видъ

$$\int \sin^n x = -\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x;$$

въ случаѣ $m=0$, формула (K) будетъ

$$\int \cos^n x = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x.$$

Когда въ формулѣ (M) $m=0$,

$$\int \frac{1}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} \dots (1).$$

Если въ формулѣ (7) возьмемъ m отрицательно, новое выраженіе разрышимъ по второму члену второй части, перемѣнимъ m на $m-2$, умножимъ коэффициенты первой части и наконецъ сдѣлаемъ $n=0$, то найдемъ

$$\int \frac{1}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{1}{\sin^{m-2} x}.$$

Дроби $\frac{\cos^m x}{\sin^n x}$ и $\frac{\sin^m x}{\cos^n x}$ можно интегрировать

другимъ образомъ; ибо первая, когда m четное и $=2h$, обращается въ $\frac{(1-\sin^2 x)^h}{\sin^n x}$; по раскрытіи

сего выраженія, получимъ рядъ членовъ, имѣющихъ видъ $\sin^k x$. Когда m нечетное и $=2h+1$,

$\frac{\cos^m x}{\sin^n x} = \frac{\cos^{2h} x \cos x}{\sin^n x}$ и положивши $\sin x = z$, надобно будетъ интегрировать $\frac{(1-z^2)^h}{z^n}$.

§ 31. Когда оба показателя и синуса и косинуса отрицательные, тогда, умноживъ числителя на $\cos^2 x + \sin^2 x$, найдемъ

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^m x \cdot \cos^n x} &= \int \frac{\cos^2 + \sin^2}{\sin^m x \cdot \cos^n x} = \\ &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^m x \cdot \cos^n x} + \int \frac{\sin^2 x}{\sin^m x \cdot \cos^n x} = \\ &= \int \frac{1}{\sin^{m-2} x \cdot \cos^{n-2} x} + \int \frac{1}{\sin^{m-2} x \cdot \cos^n x}. \end{aligned}$$

Здѣсь доходимъ до дробей, освобожденныхъ отъ $\sin x$ или отъ $\cos x$.

Если $m = n$, по поелику $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, данная дробь превратится въ

$$\int \frac{1}{\sin^n x \cos^n x} = \int \frac{2^n}{\sin^n 2x} = \int \frac{2^{n-1}}{\sin^n z} = 2^{n-1} \int \frac{1}{\sin^n z}, \quad \text{при } 2x = z.$$

§ 32. Объинтегрируемъ особенно пять Тригонометрическихъ функцій; онѣ подвержены простѣйшимъ изчисленіямъ и къ симъ формуламъ относятся всѣ прочія.

1) Возьмемъ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}$. Положивши $\cos x = z$, получимъ $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{1-z^2}$, дробь раціональную;

по одифференціаливъ уравненіе

$$\sin^2 x = 1 - z^2, \text{ имѣемъ } 2\sin x \cdot \cos x = -2z \cdot \frac{dz}{dx},$$

$$\text{и } \sin x = -\frac{dz}{dx};$$

отсюда

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{1 - z^2} = -\frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{dz}{dx};$$

$$\begin{aligned} \text{слѣд. } \int \frac{1}{\sin x} &= -\int \frac{1}{1 - z^2} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \log(1+z) + \frac{1}{2} \log(1-z) + C = \dots \\ &\quad -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\} + C, \text{ (смр. 7);} \end{aligned}$$

наконецъ, вставивъ величинѹ z , имѣемъ

$$\int \frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right\} + C = \log \frac{V(1 - \cos x)}{V(1 + \cos x)} + C;$$

сверхъ сего поелику $\tan \frac{1}{2} x = V \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, по

$$\log V \frac{(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)} + C = \log \tan \frac{1}{2} x + C.$$

2) Такимъ же образомъ, положивъ $\sin x = z$,
 $\cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$, находимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{dz}{dx};$$

ибо, по дифференцированіи уравненія $\cos^2 x = 1 - z^2$,
 получаемся

$$-2\cos x \cdot \sin x = -2z \cdot \frac{dz}{dx} \text{ и } \cos x = \frac{dz}{dx};$$

$$\begin{aligned} \text{слѣд. } \int \frac{1}{\cos x} &= \int \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \log(1+z) - \frac{1}{2} \log(1-z) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\} + C = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right\} + C = \\ &= \log V \left\{ \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right\} + C = \log. \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}x \right) + C. \end{aligned}$$

3) Очевидно, что въ $\frac{\cos x}{\sin x}$ числитель есть

дифференціалъ знаменателя; слѣд. (Пр. III)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} = \int \cot x = \int \frac{1}{\tan x} = \log \sin x + C = \log (c \sin x).$$

4) Также

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} = \int \tan x = \int \frac{1}{\cot x} = -\log \cos x + C = \log \frac{c}{\cos x}.$$

5) Сложивъ сіи двѣ формулы, найдемъ

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x},$$

$$\begin{aligned} \text{и } \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} &= \log \sin x - \log \cos x + C = \log \left\{ \frac{\sin x}{\cos x} \right\} + C \\ &= \log \tan x + C = \log (c \tan x). \end{aligned}$$

Г Л А В А VI.

Постоянные произвольныя. Интегрирование помощію рядовъ.

§ 35. Пусть Р интегралъ функціи z , коей дифференціалъ взять по x , или $\frac{dP}{dx} = z$, с по-
стоянное произвольное, которое должно при-

дать, дабы сей интеграль сдѣлать общимъ (§ 2);
изъ сего получаемъ :

$$\int z = P + c.$$

Если имѣемъ въ виду только способъ изчисленія, с остается произвольнымъ; но когда желаемъ приложить сей интеграль къ вопросу опредѣленному, тогда постоянное с перестаетъ быть произвольнымъ и должно удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Ежели напр. требуется опредѣлить площадь ВСРМ $= t$ (черп. 1), заключающуюся между ординатами ВС и РМ, соответствующими абсциссамъ a и b : то, поелику $\frac{dt}{dx} = y$ (Диф. изч. §

88), получимъ $t = \int y = P + c$. Но площадь $P + c$ начинается при величинѣ $x = AC = a$; слѣд. t будетъ нуль, когда сдѣлается $x = a$ въ $P + c$, или $A + c = 0$, гдѣ A величина, какую получаетъ функція x , выраженная чрезъ P , если $x = a$; отсюда $c = -A$, и площадь $t = P - A$. Остается также вставить b вмѣсто x ; тогда площадь заключится въ извѣстныхъ предѣлахъ.

Вообще для опредѣленія постоянного произвольнаго, по условіямъ вопроса, надобно найти, какую величину k получимъ интеграль $t = P + c$, когда $x = a$, именно $k = A + c$,

отсюда

$$c = k - A, \text{ и } t = P + k - A,$$

гдѣ не означается *начало интеграла*, т. е. при какой величинѣ x^a онъ дѣлается нулемъ.

Интеграль, котораго начало неопредѣленно, называется *неопредѣленнымъ*; интеграль

полный шотъ, который заключаетъ постоянное произвольное. Когда предѣлы a и b даны по 1^{му} изъ нихъ $t = P - A$; вставивъ вмѣсто x 2^й предѣлъ b , получимъ $t = B - A$, величина числовая и постоянная $i = \int y$: такой интегралъ называется *опредѣленнымъ* гдѣ A и B суть величины, какія принимаетъ P , когда $x = a$ и b . Дабы опредѣлить $t = \int y$, очевидно, должно положить $x = a$ и $x = b$ въ неопредѣленномъ интегралѣ P и первый результатъ вычесть изъ втораго.

§ 34. Если данная функція не можетъ быть интегрирована въ точности, то интегралъ находится приближенно. Такъ чтобъ найти $\int z$; разлагается z въ рядъ, по степенямъ x восходящимъ или нисходящимъ; попомъ каждый интегрируется. Сдѣлаемъ примѣры.

1) Выраженіе $\int \frac{1}{1+x^2}$ представляетъ $A(\text{tang} = x)$.

Разлагаемъ $(1+x^2)^{-1}$ въ рядъ (Выш. Алг. стр. 21),

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

отсюда $A(\text{tang} = x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = A(\sin = x)$. Разлагаемъ

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 x^4}{2 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 5 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots,$$

отсюда $A(\sin = x) = x + \frac{x^5}{2 \cdot 3} + \frac{5x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$

Здѣсь не прибавлено постоянное; ибо предполагается, что дуга, о которой говорится, есть наименьшая изъ дугъ, коихъ x есть синусъ или тангенсъ, дуга, которая обращается въ нуль, когда синусъ и тангенсъ нули.

Посредствомъ 1^й формулы находится отноше-
ніе окружности къ діаметру (Диф. изч. стр. 79).
Для сего же можно употребить 2^й рядъ; поели-
ку $\sin \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}$, то сдѣлавъ $x = \frac{1}{2}$, найдемъ

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} \dots$$

§ 35. Дабы рядъ можно было употреблять въ числовыхъ приложеніяхъ, необходимо сдѣлать его сходящимся; слѣдуетъ, что нужно имѣть различные способы для интегрированій сего рода. Слѣдующій принадлежитъ Тоа. Бернуллию.

Положимъ въ формулѣ Тейлора $h = -x$; поелику $f(x-x)$ или f_0 есть то, во что обращается y или fx когда $x=0$; то f_0 есть постоянное b ; посему

$$b = y - \frac{dy}{dx} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} x^2 - \dots$$

Когда дана производная функція y^a или $\frac{dy}{dx}$, интегрироваваніе состоитъ въ опредѣленіи y ; пусть $\int z$ искомый интеграль, $z = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{d^2y}{dx^2}$, ..., найдемъ

$$y = \int z = b + zx - \frac{1}{2}z'x^2 + \frac{1}{6}z''x^3 - \dots$$

Изъ Дифференціального изчисленія знаемъ , что можно назначить предѣлы суммы оставляемыхъ членовъ.

$$\text{Возьмемъ } \int \frac{1}{a+x} = \log(a+x).$$

$$\text{Здѣсь } b = la, \quad z = \frac{1}{a+x}, \quad z' = \frac{-1}{(a+x)^2}, \quad z'' = \frac{2}{(a+x)^3} \dots \text{и}$$

$$\log(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} \dots$$

§ 36. Рядъ Тейлоровъ также даетъ

$$f(x+h) - fx = zh + \frac{1}{2}z'h^2 + \frac{1}{6}z''h^3 \dots,$$

отсюда $f(x+b-a) - fx = z(b-a) + \frac{1}{2}z'(b-a)^2 + \dots$, сдѣлавъ $h=b-a$. Попомъ если возьмемъ $x=a$, опъ чего $z, z', z'' \dots$ перемѣнянся въ постоянныя $A, A', A'' \dots$; що выйдуть

$$fb - fa = A(b-a) + \frac{1}{2}A'(b-a)^2 + \frac{1}{6}A''(b-a)^3 \dots;$$

таковъ интеграль $\int z$ между предѣлами $x=a$ и $x=b$, (§ 35). Сей рядъ можетъ имѣть приложеніе, когда Тейлоровъ не подлежитъ исключенію. И такъ должно изслѣдовать ходъ функціи z опъ $x=a$ до $x=b$, дабы видѣть, не дѣлается ли она безконечною при извѣстныхъ посредствующихъ между сими предѣлами величинахъ переменнаго x .

Рядъ сходящимся можно дѣлать по желанію; ибо раздѣливъ промежуткъ $b-a$ на n равныхъ частей i , такъ чтобы $b-a=ni$, возьмемъ сначала интеграль между предѣлами a и $a+i$, т. е. вставимъ $a+i$ вмѣсто b . Такимъ же образомъ

возьмемъ интеграль отъ $a+i$ до $a+2i$; потомъ отъ сего количества до $a+3i$

Найдемъ послѣдовательно

$x = a$, отъ чего z , z' , z'' . . . перемѣняюща на
 Λ , Λ' , Λ''

$x = a + i$ B , B' , B''

$x = a + 2i$ C , C' , C''

и проч.

Отсюда $f(a+i) - fa = \Lambda i + \frac{1}{2}\Lambda' i^2 + \frac{1}{6}\Lambda'' i^3 + \dots$

$f(a+2i) - f(a+i) = B i + \frac{1}{2}B' i + \frac{1}{6}B'' i^3 + \dots$

$f(a+3i) - f(a+2i) = C i + \frac{1}{2}C' i^2 + \frac{1}{6}C'' i^3 + \dots$

и т. д.

$f(a+ni) - f[a+(n-1)i] = M i + \frac{1}{2}M' i^2 + \frac{1}{6}M'' i^3 + \dots$

§ 37. Сумма сихъ уравненій будетъ

$$f(a+ni) - fa = fb - fa = \int z = \\ (A + B + C \dots + M)i + \frac{1}{2}(A' + B' \dots + M')i^2 + \\ \frac{1}{6}(A'' + \dots + M'')i^3 \dots;$$

таковъ интеграль отъ $\frac{dy}{dx} = z$ между предѣлами a и b . Если возьмется i слишкомъ малымъ, чтобы ограничиться имъ членомъ, то

$$\int z = \Lambda i + B i + C i \dots + M i,$$

рядъ, гдѣ члены суть величины, какія получаетъ послѣдовательно функція z , когда x дѣлается равнымъ a , $a+i$, $a+2i$. . . По сей причинѣ въ Анализѣ безконечныхъ интеграль принимается за сумму безконечнаго числа послѣдовательныхъ величинъ, какія беретъ функція, когда переменное проходитъ всѣ посредствующія величины, заключающіяся между ея предѣлами.

§ 38. Интегрированія 2го, 3го... порядковъ функцій съ однимъ переменнымъ, относяся также къ изложеннымъ правиламъ. Въ семь случаевъ получаемъ 2, 3... постоянныхъ произвольныхъ.

Для примѣра возьмемъ $\iint \frac{(a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2)^2}$. Интегрируемъ въ первый разъ: поелику дробь $\frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}$ разлагается (Высш. Алг. стр. 244) въ $\frac{2a^2}{(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{x^2 + a^2}$, то интеграль 1й, по § 5му,

$$\int \frac{2a^2}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{x^2 + a^2} + \int \frac{1}{x^2 + a^2};$$

слѣд.

$$\begin{aligned} \int \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} &= \int \frac{2a^2}{(x^2 + a^2)^2} - \int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{x}{x^2 + a^2} + \\ &\int \frac{1}{x^2 + a^2} - \int \frac{1}{x^2 + a^2} + c = \frac{x}{x^2 + a^2} + c; \end{aligned}$$

остается снова интегрировать

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 + a^2} + c, \text{ п. е.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + a^2} + c &= \frac{1}{2} \log (x^2 + a^2) + cx + c' \\ &= \log V(x^2 + a^2) + cx + c', \end{aligned}$$

$$\text{и } \iint \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} = \log V(x^2 + a^2) + cx + c'.$$

Г Л А В А VII.

О квадратурахъ и выпрямленіяхъ.

§ 59. Площадь t (Диф. изч. § 88) какойнибудь плоской кривой линіи есть $\int \frac{dt}{dx} = \int y$; пребуется интегрировать сіе выраженіе между извѣстными предѣлами; посему изложенныя дѣйствія и изчисленія, посредствомъ которыхъ опредѣляются интегралы функцій съ однимъ переменнымъ, называющіеся *способомъ квадратуръ*. Займемся приложеніемъ сего способа къ различнымъ примѣрамъ.

I. Для параболы АМ (черп. 2) $y^2 = 2px$ и $y = (2px)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$; слѣд.

$$t = \int \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x \sqrt{2px} + c;$$

по вставкѣ величины x , выйдемъ

$$t = \frac{2}{3} yx + c.$$

Когда площадь начинается отъ вершины А, то отъ $x=0$, $t=0$, равно нулю и c ; посему площадь МАМ' сегмента параболы есть двѣ трети прямоугольника описаннаго М'N'NM.

Если площадь заключается между ВС и РМ, то сдѣлавъ $AB=a$, $BC=b=\sqrt{2pa}$, t будетъ нуль при $x=a$, отъ чего $c=-\frac{2}{3}ab$, и $t=\frac{2}{3}(xy-ab)$. Площадь С'СММ' есть двѣ трети разности прямоугольниковъ N'M и D'C.

Для параболъ всѣхъ степеней $y^m = ax^n$ и $y = \frac{1}{n} x^{\frac{n}{m}}$; отсюда

$$t = \int y = \frac{ma^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{m+n}{m}}}{m+n} = \frac{ma^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{n}{m}} \cdot x}{m+n} = \frac{m\gamma x}{m+n};$$

по вставкѣ γ .

Во всѣхъ сихъ кривыхъ находишься конечное алгебраическое выраженіе для поверхности сегмента, содержащагося между ихъ дугами, и осями абсциссъ и ординатъ; посему онѣ называются *квадратомъ измѣряемая*.

II. Для гиперболы равносторонней MN (черт. 3), отнесенной къ ассимптозамъ Ax, Ay, имѣемъ $xy = m^2$ (Анал. Геом. § 418); отсюда

$$t = \int y = m^2 \int \frac{1}{x} = m^2 \ln x + c;$$

площадь t не можетъ начинаться отъ оси Ay; ибо при $x=0$ вышло бы $t=0$, а $C = -m^2 \ln 0 = \infty$. Но ежели площадь начинается отъ ординаты BC, проходящей чрезъ вершину C, то, поелику $AB=m$, $c = -m^2 \ln m$, изъ чего

$$t = m^2 \ln x - m^2 \ln m = m^2 (\ln x - \ln m) = m^2 \ln \left(\frac{x}{m} \right).$$

Очевидно, если $m=1$, $t = \ln x$: слѣдовательно всякая площадь, начинающаяся отъ BC, есть *Неперовъ логарифмъ абсциссы*.

Когда уголъ ассимптотъ α , то (Диф. изч. § 88) площадь $t = \int y \cdot \sin \alpha = \int \frac{\sin \alpha}{x}$, если $m=1$; слѣд. $t = \log x$, принимая за систему лог. ту, коюрой модуль есть $M = \sin \alpha$.

Когда уголъ ассимптотъ α прямой, тогда $M=1$; здѣсь встрѣчаемъ 1^й случай и получаемъ

Неперовы логариѣмы. Явствуесть, что, измѣняя уголь α ассимптошь, можно получить всевозможныя системы. Когда основаніе 10, шо $M = 0,4342944819$; уголь $\alpha = 25^\circ 44' 25''$, 47, при радиусъ $= 1$; таковъ уголь сосставляемый ассимптошами гиперболы, копорой степень есть единица, и каждая площадь табличный логариѣмъ ея абсциссы. Очевидно, что названіе Неперовыхъ логариѣмовъ *гиперболическими* несвойственно; ибо воѣ системы логариѣмовъ могушь бышь изображены площадями различныхъ гиперболь.

III. Для круга, копорого начало въ центрѣ С (черп. 4) $y^2 = a^2 - x^2$, изъ чего

$$t = \int y = \int \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Умноживъ и раздѣливъ на $\sqrt{a^2 - x^2}$, имѣемъ

$$\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Послѣднее выраженіе интегрируемъ по частямъ:

$$\text{ибо } \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

но если $z = - (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, то $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, слѣд.

$$\begin{aligned} \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= -x\sqrt{a^2 - x^2} + t. \end{aligned}$$

Потомъ изъ уравненія круга $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, вставивъ въ найденный результатъ сію величину y и t вмѣсто $\int \sqrt{a^2 - x^2}$, получимъ

$$t = \int y = \int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}a \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Сверхъ сего изъ уравненія круга

$$y' = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

поэтому дифференціалъ дуги (Диф. изч. § 87),

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

по вставкѣ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2},$$

и $\frac{ds}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}};$ отсюда

$$\int \frac{ds}{ds} = s = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \text{ слѣд.}$$

$$t = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}as + c.$$

Пусть $CA = b$, $AB = k$. Если $x = a$, то $y = 0$, $s = 90^\circ$, $t = CYBO = \frac{1}{2}a \cdot 90^\circ + c$; когда же $x = b$, тогда $s = BY$, $y = k$, $t = CAYU = \frac{1}{2}bk + \frac{1}{2}a \cdot BY + c$. Разность сихъ двухъ величинъ t или *опредѣленный интегралъ* (§. 33) будетъ $ABO = -\frac{1}{2}bk + \frac{1}{2}a(90^\circ - BY) = \frac{1}{2}a \cdot BO - \frac{1}{2}bk$. Отсюда цѣлый отрѣзокъ $BB'O = \frac{1}{2}a$. $BOB' = BCB'$. Придавши съ обѣихъ сторонъ пр. BCB' , получимъ вырѣзокъ $BCB'O = \frac{1}{2}a \cdot BOB'$.

IV. Для эллипсиса (черт. 5.) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$

изъ чего

$$t = \int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

или, означивъ чрезъ $z = \int V(a^2 - x^2)$ часть площади круга, описаннаго на большой оси еллипсиса, площади, заключающейся между ординатами, ограничивающими $\int V(a^2 - x^2)$, получимъ

$$t = \frac{b}{a} \cdot z.$$

Явствуешь, что площади t и z имѣють постоянное отношеніе $\frac{b}{a}$. И такъ площадь круга къ

площади еллипсиса, или площадь сегмента круга къ площади сегмента еллипсиса вписаннаго, заключающагося между однѣми и тѣми же ординатами, относится такъ, какъ большая ось къ малой; и поелику площадь описаннаго круга есть πa^2 , то площадь еллипсиса будетъ

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi a^2}{x}, \text{ и } x = \frac{\pi a^2 b}{a} = \pi a b.$$

V. Для циклоиды FMA (черп. 6) возьмемъ начало въ F и пусть $FS = x$, $SM = y$. Знаемъ (Диф. изч. § 84, VII), что

$$\frac{dy}{dx} = V\left(\frac{y}{2a - y}\right) = \frac{y}{V(2ay - y^2)}; \text{ отсюда}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{V(2ay - y^2)}{y}, \quad \frac{dt}{dx} = y;$$

$$\text{слѣд. } \frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = V(2ay - y^2);$$

$$\text{и } t = MFS = \int V(2ay - y^2);$$

но сія величина есть вырѣзокъ FKN; ибо здѣсь абсциссы считаются не отъ центра круга, но отъ конца діаметра. Очевидно изъ сего, что $yFA = FKEF = \frac{1}{2}a\pi^2$. Но $YE = yA$, $AE = 2a$, $\pi a = 2\pi a^2$; слѣд.

$$FAE = YE - yAF = 2\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$$

и $AFN = 3\pi a^2$, п. е.

площадь цѣлой циклоиды втрое болѣе площади образующаго круга.

§ 40. Ежели площадь t (черт. 7) заключается между вѣтвями BM , DK одной и той же кривой, или между двумя различными данными кривыми, то, назвавъ чрезъ $Y = Fx$, $y = fx$ ординаты PM , PE , находимъ

$$BCPM = \int Y, \quad DCPE = \int y, \quad \text{откуда}$$

$$BDEM = \int (Y - y).$$

§ 41. Дабы приложить формулу (Диф. изч. § 88), выражающую дифференціалъ площади τ , заключающейся между двумя радіусами векторами,

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{dy}{dx} - y \right),$$

найдемъ площадь СМО въ эллипсисѣ ОДО'. (черт. 5). Изъ уравненія сей кривой $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}; \quad \text{по вставкѣ сей величины въ}$$

формулу дифференціала $\frac{d\tau}{dx}$,

получимъ

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{b^2x^2}{a^2y} + y \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2y} = -\frac{b^2}{2y}$$

вставивъ здѣсь $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, имѣемъ

$$\frac{d\tau}{dx} = - \frac{ab}{2V(a^2 - x^2)}.$$

Поселику площадь τ считается отъ неподвижнаго радіуса, каковъ СО, до радіуса СМ, то знакъ— происходитъ отъ того, что x уменьшается, тогда какъ τ возрастаетъ (Диф. изч. § 55, II).

Формула выпрямленій (Диф. изч. § 87), приложенная къ кругу, котораго радіусъ a , даетъ для длины дуги его s

$$\frac{ds}{dx} = - \frac{a}{V(a^2 - x^2)}; \text{ отсюда}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = - \frac{ab}{2V(a^2 - x^2)} \times - \frac{V(a^2 - x^2)}{a} = \frac{1}{2}b,$$

$$\text{и } \tau = \text{МСО} = \frac{1}{2}bs,$$

гдѣ дуга берется между тѣми же предѣлами; между коими и τ , $x = \text{СО}$ и $x = \text{СА}$.

Когда $b = a$, тогда $\tau = \frac{1}{2}as$; посему секторы круга $\text{ВСО} = \frac{1}{2}\text{СО} \times \text{ВО}$.

Сравнивши МСО съ ВСО , найдемъ сек. елл.

$$\text{МСО} = \frac{b}{a} \times \text{ОСВ}.$$

Для гиперболы MN (чер. 5) имѣемъ $xy = m^2$,

$$\text{отсюда } y = \frac{m^2}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{m^2}{x^2}, \quad \frac{d\tau}{dx} = - \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{m^2}{x^2} + \frac{m^2}{x} \right) =$$

$$- \frac{m^2}{x} = -y, \quad \text{и } \tau = -m^2 \lg x + c; \quad \text{посему всякой}$$

гиперболическій вырѣзокъ $\text{САМ} = \text{СВРМ}$.

§ 42. Когда координаты полярныя, тогда

$$(\text{Диф. из. § 90}) \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{d\theta} x - \frac{dx}{d\theta} y \right) = \frac{1}{2} r^2.$$

Такъ въ спирали Архимедовой (черт. 8), гдѣ $2\pi r = a\theta$,

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{2\pi}{a}, \quad \frac{d\tau}{dr} = \frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi r^2}{a}; \text{ слѣд.}$$

$$\int \frac{d\tau}{dr} = \tau = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{r^3}{3} + c. \text{ Для опредѣленія площади АОІ,}$$

образуемой полнымъ оборотомъ радіуса вектора АМ, должно взять интеграль отъ $r=0$ до $r=a$, т. е. если $r=0$, то $\tau=0$, $c=0$; когда $r=a$, то $\text{АОІ} = \frac{1}{3} \pi a^2 =$ трети круга, коего радіусъ есть АІ.

Дабы найти интеграль свыше $\theta = 360^\circ$, то, поелику чрезъ нѣкоторое число k обращеній уравненіе

$$r = \frac{a\theta}{2\pi}$$

справочится $r = ak + \frac{a\theta}{2\pi}$, и $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{2\pi}$, а и слѣдующія площади заключаютъ площадь АОІ.

§ 43. Разрѣшимъ нѣсколько примѣровъ по формуль выпрямленій $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

І. Уравненіе параболы $y^2 = 2px$ даетъ $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$;

$$\text{отсюда } \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 + p^2}}{y} = \frac{\sqrt{y^2 + p^2}}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Но по § 7, Сл. I, въ $\sqrt{y^2 + p^2} = x - y$,

$C = y^2 = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = p^2$; слѣд. $y = \frac{x^2 - p^2}{2x}$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + p^2}{2x^2}$; изъ сего

по вставкѣ величины корня, y^2 и дифференціала, выйдемъ сначала

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{p} (x-y) \frac{(x^2 + p^2)}{2x^2}, \text{ потомъ}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{(x^2 + p^2)^2}{4px^3} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{4}x + \frac{p^2}{2x} + \frac{p^4}{4x^3} \right\};$$

изъ сего получаемъ

$$s = \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{8}x^2 - \frac{p^4}{8x^2} \right\} + \frac{1}{2}plx + c;$$

вспавивъ величины x^2 , находимъ

$$s = \frac{1}{8p} \left\{ (y + \sqrt{y^2 + p^2})^2 - \frac{p^4}{(y + \sqrt{y^2 + p^2})^2} \right\} + \frac{1}{2}pl(y + \sqrt{y^2 + p^2}) + c;$$

наконецъ, совершивъ показанное дѣйствіе, по приведеніи, согласно съ вышеупомянутымъ §, получаемъ искомый интеграль

$$s = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{1}{2}pl \left\{ y + \sqrt{y^2 + p^2} \right\} + c.$$

Если дуга s начинается въ А, то при $y = 0$ и $s = 0$; отсюда $c = -\frac{1}{2}plp$; слѣд.

$$\begin{aligned} \text{(черт. 2)} \quad AM &= \frac{yV(p^2 + y^2)}{2p} + \frac{1}{2}p \left\{ l(y + V(p^2 + y^2)) - lp \right\} \\ &= \frac{yV(p^2 + y^2)}{2p} + \frac{1}{2}pl \left\{ \frac{y + V(p^2 + y^2)}{p} \right\}. \end{aligned}$$

II. Уравнение второй кубической параболы

есть $y^3 = ax^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{3y^2}$; отсюда

$$\frac{ds}{dx} = V\left(1 + \frac{4a^2x^2}{9y^4}\right); \text{ по вставкѣ изъ уравне-}$$

нiя величины x^2 и по переменѣ независимаго переменнаго получимъ

$$\frac{ds}{dy} = V\left(1 + \frac{9y}{4a}\right).$$

Положивъ $\left(\frac{9y}{4a} + 1\right) = z$ или $4a + 9y = 4az$ найдемъ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{4a}{9}; \text{ слѣд.}$$

$$\frac{ds}{dz} = \frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dz} = \frac{4az^{\frac{1}{2}}}{9}; \text{ отсюда уже}$$

$$s = \frac{4a}{9} \int z^{\frac{1}{2}} = \frac{8a}{27} z^{\frac{3}{2}} + c;$$

вставивъ величину z^a , получаемъ

$$s = \frac{8a}{27} \left(\frac{9y}{4a} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Дабы опредѣлить постоянное c , по очевидно, что при началѣ $y = 0$, посему будетъ $s = 0$,

$$\text{и } c = -\frac{8a}{27}.$$

Вообще уравненіе $y = ax^n$ представляетъ всѣ параболы или гиперболы, смотря по тому, будетъ ли n дробь положительная или отрицательная; отсюда

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}, \quad \frac{ds}{dx} = V(1 + n^2 a^2 x^{2n-2})$$

$$\text{и } s = \int V(1 + n^2 a^2 x^{2n-2}).$$

Если $2n^2 - 2$ содержится въ единицѣ ровно нѣсколько разъ, или $\frac{1}{2n-2} = r$ цѣлому числу, то для s получимъ конечное выраженіе: ибо тогда $2n-2 = \frac{1}{r}$, что удовлетворяетъ условіямъ § 10.

III. Уравненія для круга, смотря по тому, будетъ ли начало въ центрѣ, или на концѣ діаметра, суть

$$y^2 = r^2 - x^2, \quad \text{или } y^2 = 2rx - x^2.$$

Возьмемъ изъ перваго $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; отсюда

$$\frac{ds}{dx} = \frac{V(y^2 + x^2)}{y} = \frac{r}{y}, \quad \text{и}$$

$$s = \int \frac{r}{y} = \int \frac{r}{V(r^2 - x^2)} = A(\sin = x).$$

Очевидно, что интегрированіе возможно только посредствомъ рядовъ, ибо посредствомъ дугъ обращается опять къ вопросу.

IV. Уравненіе эллипсиса $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$

даешъ $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$; отсюда

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}}; \text{ но какъ } a^4y^2 = \dots$$

$$a^2b^2(a^2 - x^2), \text{ то } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2 - x^2}} =$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - a^2x^2}{a^2 - x^2}}$$

сдѣлавъ же $e^2 = \frac{a^2}{a^2}$, получимъ

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

e означаетъ отношеніе эксцентрициитета къ половинѣ большой оси. Интеграль будетъ

$$s = \int \frac{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Сіе выраженіе интегрируется посредствомъ ряда; должно только, чтобы оный былъ сходящійся. Такъ можно $\sqrt{a^2 - e^2x^2}$ раскрыть по Ньютоновой формулѣ (Высш. Алг. § 11, II).

Также можно дугу ОВ (черт. 5) сдѣлать $= \theta$, изъ чего $CA = x = a \cdot \cos \theta$;

отсюда $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta$,

$$\text{и } \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}} =$$

$$-a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}; \text{ изъ сего}$$

$$s = -a \int \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}.$$

Здѣсь должно интегрировать рядъ членовъ, имѣющихъ видъ $A \cos^{2n} \theta$ (§ 30); отъ сего дуга ОМ, помощію ряда, будетъ зависѣть отъ соответственной дуги ОВ описаннаго круга.

Подобнымъ изчисленіемъ выводятся выпрямленіе гиперболы.

V. Въ циклоидѣ (черт. 6), когда начало въ F,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2r-y}}; \text{ отсюда}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{y}{2r-y}} = \sqrt{\frac{2r}{2r-y}} \text{ и } \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \\ \sqrt{\frac{2r}{2r-y}} \cdot \sqrt{\frac{2r-y}{y}} = \sqrt{\frac{2r}{y}};$$

слѣд. $s = (2r)^{\frac{1}{2}} \int y^{-\frac{1}{2}} = 2(2r)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ry}$. Здѣсь С не прибавляется; ибо дуга s начинается въ F. Но $KF^2 = 2ry$, или $KF = \sqrt{2ry}$; посему дуга циклоиды FM = двойной хордѣ KF, и дуга AF = 2FE.

§ 44. Въ случаѣ полярныхъ координатъ,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}. \text{ Возьмемъ спираль Архиме-}$$

дову, для которой $r = \frac{a\theta}{2\pi}$ и $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{2\pi}$, будетъ $\frac{ds}{d\theta} =$

$$\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \text{ и } \frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \times \frac{2\pi}{a};$$

отсюда

$$s = \int \frac{2\pi}{a} \cdot V(r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}).$$

Если r равняется ординатѣ параболы и $\frac{a}{2\pi}$ параметру, то, вставивъ сіи величины въ выраженіе дуги параболы, им. е.

$$s = \frac{1}{p} \int V(y^2 + p^2),$$

найдемъ, что длины дугъ сихъ кривыхъ равны.

Въ логарифмической спирали (Диф. изч. стр. 140) $r = a^{\theta}$, $\theta = lr$ и $\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}$; отсюда найдемъ

$$\frac{ds}{d\theta} = V(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2) = rV_2,$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = V_2; \text{ слѣд.}$$

$$s = rV_2 + c.$$

Если дуга начинается отъ полюса, то $c=0$, и $s=rV_2$. И такъ не смотря на то, что кривая придетъ въ полюсъ послѣ безконечнаго числа оборотовъ, дуга s есть опредѣленная и равняется діагонали квадрата, построеннаго на радіусѣ векторѣ, ее ограничивающемъ.

Къ кривымъ двойкой кривизны относится сказанное въ Диф. Изч. § 120.

ГЛАВА VIII.

О поверхностяхъ и толщинахъ тѣлъ.

§ 45. Толщина v и поверхность u пѣла вращенія вокругъ оси x нѣ получающся (Диф. изч. §§ 118, 119) интегрированіемъ выраженій:

$$v = \int \pi y^2, \quad u = \int 2\pi y \frac{ds}{dx} = \int 2\pi y V(1 + (\frac{dy}{dx})^2).$$

Слѣдуютъ нѣкоторыя приложенія сихъ формулъ.

I. Для эллипсиса, взявъ величину $\frac{ds}{dx}$ (§ 43. IV), найдемъ

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2), \quad u = \frac{2\pi b e}{a} \int V(\frac{a^2}{e^2} - x^2).$$

Уравненіе 1^е даетъ $v = \pi b^2(x - \frac{x^3}{3a^2} + c)$; если вершина есть одинъ изъ предѣловъ, то $c = -\frac{2}{3}a$. Пусть z будетъ высота сегмента эллипсоида, или $x = a - z$, то $v = \frac{\pi b^2 z^2}{3a^2} (3a - z)$. Для цѣлаго эллипсоида $z = 2a$, изъ чего получается $\frac{4}{3} \pi b^2 a$. Изъ сего слѣдуетъ, что, сдѣлавъ $b = a$, 1) толщина шара $= \frac{4}{3} \pi a^3$; 2) эллипсоидъ вращенія къ шару описанному $= b^2 : a^2$; 3) каждое изъ сихъ тѣлъ есть $\frac{2}{3}$ цилиндра описаннаго; 4) наконецъ сегментъ сферическій $= \pi z^2(a - \frac{1}{3}z)$.

Интеграль, входящій въ величину u , очевидно есть поверхность части круга концентрическаго съ эллипсисомъ, заключающимся между одними и тѣми же предѣлами съ дугою, и котораго радіусъ есть $\frac{a}{e}$. Если сія поверхность

будетъ z , то выйдетъ $u = \frac{2\pi b e z}{a}$.

Для шара (§ 43, III), $\frac{ds}{dx} = \frac{r}{y}$; отсюда $u = \int 2\pi r$.

Не трудно найти поверхность пояса, котораго высота z ; она будетъ $2\pi rz$; поверхность всего шара $= 4\pi r^2$.

II. Для параболы $y^2 = 2ax$,

$$v = \int 2\pi ax = \pi ax^2 + c,$$

$$u = \int \frac{2\pi}{a} \cdot y V(y^2 + a^2) = \frac{2\pi}{5a} V(y^2 + a^2)^{\frac{5}{2}} + C,$$

если начало въ вершинѣ, то $c=0$, $C=-a^{\frac{5}{2}}$. Такимъ образомъ опредѣляется площадь и поверхность сегмента параболоида вращенія.

III. Изъ уравненія $y^m = ax^n$ получается

$$v = \int \pi V a^{\frac{m}{n}} V x^{2n} = \frac{\pi x}{m + 2n} V (ax^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{\pi x y^2}{m + 2n}.$$

Сие изчисленіе принадлежитъ параболамъ и гиперболамъ смотря по тому, будетъ ли n положительнымъ, или отрицательнымъ.

§ 46. Тѣло V и поверхность U (Диф. изч. § 128)

$$V = \iint \frac{dV}{dx dy} = \iint z, U = \iint \frac{dU}{dx dy} = \iint V \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right\}.$$

Сіи двойные интегралы должно понимать слѣдующимъ образомъ: внеся вмѣсто z , $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ величины, выведенныя изъ уравненія данной поверхности (Диф. изч. § 109), должно выше равнять, принимая x или y постояннымъ, смотря по тому, которое изъ сихъ переменныхъ доставитъ простѣйшіе выводы. Послѣ необходимо обратить вниманіе на предѣлы, назначаемые вопросомъ.

Возьмемъ уравненіе шара (черт. 10)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ;$$

изъ сего $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$

и слѣд. $\frac{d^2U}{dx dy} = \frac{r}{Vr^2 - x^2 - y^2}, \frac{dV}{dx dy} = V(r^2 - x^2 - y^2).$

Интегрируемъ первое выраженіе; принявши y за количество постоянное и сдѣлавши $A^2 = r^2 - y^2$, получимъ

$$\frac{d^2U}{dx dy} = \frac{d\left(\frac{dU}{dy}\right)}{dx} = \frac{r}{V(A^2 - x^2)} ;$$

интеграль сего выраженія будетъ

$$\frac{dU}{dy} = r \cdot A \left(\sin = \frac{x}{A} \right).$$

Но плоскость xu разсѣкаетъ шаръ по кругу CyD , коего уравненіе есть $r^2 = x^2 + y^2$ или $x = \pm V(r^2 - y^2) = \pm A$; слѣд когда ограничимъ интеграль нашъ предѣлами $x = +A$ и $x = -A$, тогда опредѣлимъ величину поверхности шара, лежащей надъ плоскостью xu и простирающуюся вправо и влѣво до абсциссъ AF, AF' , измѣняющихся вмѣстѣ съ y ; находимъ

$$\frac{dU}{dy} = r\pi.$$

Интеграль сего выраженія будетъ уже $U = r\pi y$; онъ ограничивается чрезъ $y = +r = Ay$ и $y = -r = AH$. Сей опредѣленный интеграль есть $2\pi r^2$, и явно, что онъ выражаетъ величину поверхности полушарія, находящагося надъ xu .

Такимъ же образомъ опредѣлится V.

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{2}x\sqrt{A^2 - x^2} + \frac{1}{2}A^2 \cdot \text{Arc}(\sin = \frac{x}{A}).$$

Возьмемъ предѣлы — A и + A, какъ и выше сего; 1^й членъ уничтожится и выйдетъ $\frac{1}{2}\pi A^2$. Остаются вновь интегрировать $\frac{1}{2}\pi(r^2 - y^2)$. Найдется $\frac{1}{2}\pi(r^2y - \frac{1}{3}y^3)$, и $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, между предѣлами — r и +r. Это толщина полушарія.

Опредѣлимъ толщину прямого конуса. Примемъ ось его за ось y, и вершину за начало: уравн. онаго есть (Ан. Геом. 5^е изм. § 59) $l^2y^2 = z^2 + x^2$, гдѣ l есть тангенсъ угла, составляемаго осью и образующею линейей.

$$\text{Въ семъ случаѣ } \frac{d(\frac{dV}{dy})}{dx} = \sqrt{A^2 - x^2}, \quad l^2y^2 = A^2, \text{ и}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{2}x\sqrt{l^2y^2 - x^2} + l^2x^2 \cdot A \left(\text{tg} = \sqrt{\frac{ly+x}{ly-x}} \right) + c.$$

Сдѣлавши $z = 0$, получимъ $x = \pm ly$; сіе уравненіе выражаетъ линей AN, AI (чер. 11), въ которыхъ поверхность конуса пересѣкается плоскостью yx, и которыя суть его предѣлы по сторонамъ оси Ay. Вставивши $\pm ly$ вмѣсто x и нашедши разности результатовъ, получимъ величину перваго интеграла въ оныхъ предѣлахъ:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{24} l^2 y^2.$$

Интеграль сего выраженія $\frac{\pi}{6} l^2 y^3$ ограничивается предѣлами $y = 0$ и $y = h = AC$ и выходитъ

$$V = \frac{\pi}{6} l^2 h^3,$$

чно выражаетъ часть конуса, лежащую надъ плоскостью xu ; удвоивъ ее получимъ весь конусъ $\frac{\pi}{3} l^2 h^3$.

Если предѣлы поверхности ограничиваются кривою FMNG, (чер. 12) проведенною на поверхности, то должно искать проложенія оной кривою fg на плоскости xu (Ан. Геом. 3^х изм. § 74), чѣмъ опредѣлится прямой цилиндръ, о которомъ должно разсуждать подобнымъ образомъ. Тогда надобно интегрировать $\frac{d^2U}{dxdy}$ между выше упомянутыми предѣлами.

Слѣдуетъ примѣръ.

Возьмемъ на плоскости xu двѣ равныя и проптивуположныя параболы FAE, F'AE' (черп. 13) выражаемыя уравненіями $y^2=nx$, $y^2=-nx$; проведемъ FF', параллельную съ осью x , при чемъ $AC=b$. Сверхъ сего представимъ прямой конусъ, имѣющій въ основаніи кругъ, вершину въ началѣ A и осью ось $z^{овъ}$; уравн. онаго будетъ $z=k\sqrt{x^2+y^2}$. Требуется найти поверхность конуса, заключающуюся въ прямомъ цилиндрѣ, построенномъ на AMFF'M'. Уравн. конуса даетъ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 1 + k^2; \quad \text{слѣд.} \quad \frac{d^2U}{dxdy} = \sqrt{1+k^2}.$$

Интегралъ въ разсужденіи x будетъ $\sqrt{1+k^2}x$, который должно брать отъ M' до M.

Но изъ уравненій параболъ выводимъ для абсциссъ точекъ M' и M, предѣловъ интеграла,

$$x = -\frac{y^2}{n}, \quad x = +\frac{y^2}{n}; \quad \text{отсюда} \quad \frac{dU}{dy} = \frac{2y^2}{n} \cdot \sqrt{1+k^2}.$$

Произведя такое же дѣйствіе вразсужденіи y съ симъ 1^{мъ} интеграломъ, найдемъ $\frac{2y^3}{3n} \cdot V(1+k^2)$; сей интеграль должно взять отъ A до C , ш. е. отъ $y=0$ до $y=b$. Искомая поверхность будетъ $\frac{2b^3}{3n} \cdot V(1+k^2)$.

Приложеніе сихъ началъ особенно важно для изслѣдованія центровъ тяжести и моментовъ косности. (См. Франкерову Механику §§ 64 и 242.)

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ.

Интегрированіе уравненій въ два переменными.

ГЛАВА IX.

Отдѣленіе переменныхъ и уравненія однородныя.

§ 47. До сихъ поръ мы разсматривали дифференціальныя выраженія, имѣющія видъ $\frac{dy}{dx} = \varphi x$.

Но если бы встрѣшили мы дифференціальное уравненіе 1^{го} порядка между двумя переменными количествами (Диф. изч. стр. 34):

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

или $N + M \frac{dy}{dx} = 0,$

то, по приведеніи онаго въ такой видъ, въ которомъ каждый членъ содержалъ бы одно пере-

мѣнное, интеграль уравненія равнялся бы суммѣ интеграловъ, кои можно бы опредѣлить по предыдущимъ правиламъ, п. е.

$$\int N + \int M \cdot \frac{dy}{dx} = C.$$

Изъ сего слѣдуетъ заключить о потребности *отдѣлять* въ уравненіяхъ переменныя. Простѣйшій случай отдѣленія представляется тогда, когда $M=X$ есть функція x^a , а $N=Y$ функція y^a ; ибо раздѣливъ уравненіе на XY , получаемъ

$$\frac{1}{X} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{Y} = 0.$$

Первый членъ сего уравненія есть $\frac{du}{dx}$; во второмъ же должно брать интеграль только отъ $\frac{1}{Y}$ по y : ибо $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{Y} = \frac{dz}{dx}$ и $\frac{1}{Y} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}$. Сіе замѣчаніе есть общее.

Такимъ образомъ въ уравненіи

$$V(1+y^2) - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

имѣемъ $\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{V(1+y^2)}$, отсюда (§ 7)

$$lx + C = l(y + V(1+y^2));$$

или, положивъ $C = lc$, находимъ

$$lcx = l(y + V(1+y^2))$$

$$\text{и } cx = y + V(1+y^2).$$

§ 48. Если $M=XY$, $N=X'Y'$, гдѣ X и X' функція x^a , Y и Y' функція y^a , то

$$XY \frac{dy}{dx} + X'Y' = 0,$$

изъ чего, по раздѣленіи на XY' , получится

$$\frac{Y}{Y'} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{X'}{X} = 0.$$

§ 49. Отдѣленіе переменныхъ возможно также въ уравненіяхъ *однородныхъ* въ отношеніи x^a и y^a . Пусть m будетъ степень каждаго члена $Ay^k x^h$, гдѣ $m=k+h$; раздѣлимъ на x^m , членъ $Ay^k x^h$ обратится въ

$$A \left(\frac{y}{x} \right)^k = Az^k,$$

положивъ $y = xz$. Явствуетъ, что M и N будутъ функціями одного z , и, по раздѣленіи на M уравненія $N + M \cdot \frac{dy}{dx} = 0$,

выйдетъ $\frac{dy}{dx} + Z = 0$. Но изъ уравн.

$$y = xz, \quad \frac{dy}{dx} = z + x \cdot \frac{dz}{dx}; \quad \text{слѣд.}$$

$$(z+Z) + x \cdot \frac{dz}{dx} = 0;$$

по раздѣленіи всего уравненія на $(z+Z)x$, найдемъ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z+Z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

и
$$lx + \int \frac{1}{z+Z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

I. Возьмемъ для примѣра диф. уравненіе

$$(ax + by) \frac{dy}{dx} + (fx + gy) = 0.$$

Дѣлимъ оное на $ax + by$, получимъ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{fx + gy}{ax + by} = \frac{dy}{dx} + \frac{f + g \frac{y}{x}}{a + b \frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} + \frac{f + gz}{a + bz} = 0;$$

отсюда, вставивъ величину $\frac{dy}{dx}$, найдемъ

$$z + x \frac{dz}{dx} + \frac{f + gz}{a + bz} = 0,$$

$$\text{или } z(a + bz) + f + gz + x \cdot \frac{dz}{dx} (a + bz) =$$

$$(za + bz^2 + f + gz) + x \frac{dz}{dx} (a + bz) = 0,$$

$$\text{изъ чего } \frac{1}{x} + \frac{(a + bz)}{bz^2 + (a + g)z + f} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

уравненіе, которое неспрудно интегрировать.

По опредѣленіи интеграла, должно вставить $\frac{y}{x}$ вмѣсто z .

Въ уравненіи $y \frac{dy}{dx} + (x + 2y) = 0$, по сравненіи съ предыдущимъ примѣромъ, $a = 0$, $b = f = 1$, $g = 2$; по сему выйдетъ

$$\frac{1}{x} + \frac{z}{z^2 + 2z + 1} \cdot \frac{dz}{dx} = 0;$$

придаемъ и вычислѣмъ $\frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{dz}{dx}$, получаемъ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1+z} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

отсюда $lcx + l(1+z) + \frac{1}{1+z} = 0$, или

$$lc(x + xz) = - \frac{1}{1+z};$$

по вставкѣ величины z ,

$$lc(x + y) + \frac{x}{x+y} = 0.$$

II. Въ уравн. $ay^m \frac{dy}{dx} + (x^m + by^m) = 0$, $a = 0$,
 $b = a$, $f = 1$, $g = b$; слѣд.

$$\frac{1}{x} + \frac{az^m}{az^{m+1} + bz^{m+1}} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

III. Возьмемъ уравненіе $x \frac{dy}{dx} - y = V(x^2 + y^2)$;

положивъ $y = xz$ и раздѣливъ на x , получаемъ

$$\frac{dy}{dx} - z = V(1 + z^2), \text{ или, по вставкѣ величины } \frac{dy}{dx},$$

опредѣляемой изъ ур. $y = xz$, находимъ

$$x \cdot \frac{dz}{dx} + z - z = V(1 + z^2); \text{ отсюда}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{V(1+z^2)}; \text{ изъ сего интеграль } (\S 7)$$

будетъ

$$lx = l[c(z + V(1 + z^2))],$$

или $x = cz + cV(1 + z^2)$; послѣ сего