

Московский государственный технический университет

им. Н.Э.Баумана

И.Н.Фетисов

### **Определение моментов инерции тел**

Методические указания к лабораторной работе М-10 а,б,в

по курсу общей физики.

Под редакцией А. Ф. Наумова

Издательство МГТУ им.Н.Э.Баумана 1989

Рассмотрены различные методы экспериментального определения моментов инерции тел и законы динамики вращательного движения, на которых эти методы основаны.

Пособие предназначено для студентов 1-го курса МГТУ.

Цель работы — ознакомиться с различными методами экспериментального определения моментов инерции тел и законами динамики вращательного движения, на которых эти методы основаны.

## ВВЕДЕНИЕ

Момент инерции  $J$  системы материальных точек относительно некоторой оси определяется равенством

$$J = \sum_i m_i r_i^2,$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й точки систем,

$r_i$  — расстояние от  $i$ -й точки до оси.

Для твёрдого тела

$$J = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i,$$

где  $\Delta m_i$  — элемент массы твёрдого тела ,

$r_i$  — расстояние от элемента массы  $\Delta m_i$  до оси.

В некоторых случаях момент инерции тела  $J$  относительно произвольно заданой оси можно найти с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера

$$J = J_0 + md^2, \quad (1)$$

где  $m$  — масса тела,

$J_0$  — момент инерции данного тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно заданой оси,

$d$  — расстояние между указанными осями.

Используя основное уравнение динамики вращательного движения, можно вычислить момент инерции тела  $J$  относительно неподвижной оси по формуле

$$J = \frac{M}{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $M$  — результирующий момент действующих на тело сил относительно данной неподвижной

оси,

$\varepsilon$  — угловое ускорение тела. С другой стороны, момент инерции тела  $J$  относительно заданой оси и его угловая  $\omega$  позволяет вычислить кинетическую энергию вращательного движения этого тела  $J\omega^2/2$ .

## А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

### Теоретическая часть

Оборотный маятник является разновидностью физического маятника, период колебаний которого определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (3)$$

где  $J$  — момент инерции физического маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через точку опоры;

$m$  — масса физического маятника;

$d$  — расстояние от точки опоры до центра масс маятника;

$g$  — ускорение свободного падения.

Формула (3) справедлива для изохронных колебаний, т.е. таких, период которых не зависит от амплитуды. Это условие выполняется лишь при малых амплитудах колебаний (угол отклонения от вертикали не должен превышать  $5 - 6^\circ$ ).

Оборотный маятник, используемый в данной работе (рис. 1), представляет собой стальной стержень 3, на котором неподвижно закреплены две стальные опорные призмы 1 и 2 с параллельными ребрами. Кроме этого на стержне есть два стальных груза 4 и 5 в форме чечевиц, один из которых можно перемещать и закреплять в разных местах стержня.

Для наблюдения колебаний маятника его подвешивают опорным ребром той или иной призмы на стальную пластину в кронштейне, укрепленном в стене лаборатории во избежание вибрации подвеса.

Если расстояние между ребрами опорных призм оборотного маятника равно  $l$ , то положение его центра масс  $C$ , т.е. расстояние  $d$  (см. рис. 1) может быть найдено следующим образом.

Пусть  $T_1$  = период колебаний маятника, подвешенного на опорную призму 1, а  $J_1$  - его момент инерции относительно оси, совпадающей с ребром опорной призмы 1. Тогда из (3) следует

$$J_1 = \frac{T_1^2}{4\pi^2} mgd . \quad (4)$$

Если маятник подвесить на опорную призму 2, то период его колебаний  $T_2$  в общем случае изменится, так как изменится момент инерции и расстояние от точки опоры до центра масс маятника.

Аналогично соотношению (4) имеем

$$J_2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2} mg(l - d) . \quad (5)$$

На основании теоремы Гюйгенса-Штейнера можно записать

$$J_1 = J_c + md^2 , \quad (6)$$

где  $J_c$  — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс  $C$  и параллельной ребру опорной призмы.

Аналогично

$$J_2 = J_c + m(l - d)^2 . \quad (7)$$

Вычитая из (7) уравнение (6), получим

$$J_2 - J_1 = ml(l - 2d) . \quad (8)$$

С другой стороны, вычитая из (5) формулу (4), имеем

$$J_2 - J_1 = \frac{T_2^2 mg(l - d)}{4\pi^2} - \frac{T_1^2 mgd}{4\pi^2} . \quad (9)$$

Приравняв правые части выражений (8) и (9), получим формулу для вычисления расстояния  $d$ :

$$d = \frac{4\pi^2 l^2 - g l T_2^2}{8\pi^2 l - g(T_1^2 + T_2^2)} . \quad (10)$$

Подставляя (10) последовательно в (4) и (5), получим расчетные формулы для определения моментов инерции оборотного маятника относительно осей, совпадающих с ребрами опорных призм,

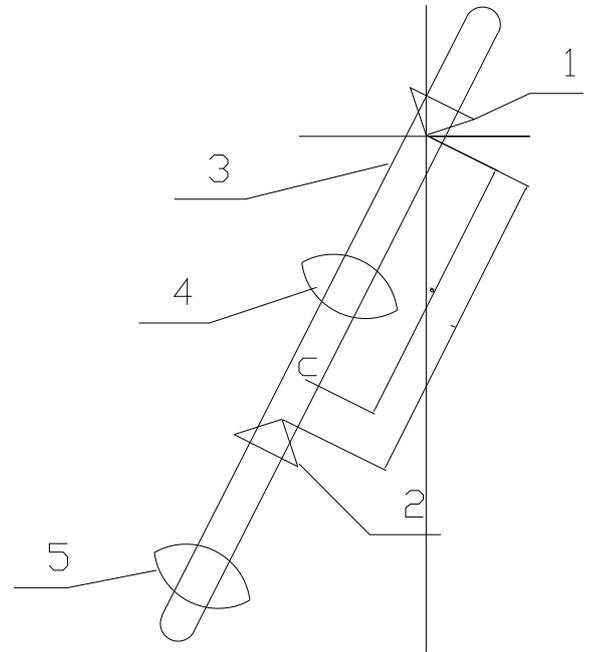


Рис. 1. Оборотный маятник

$$J_1 = \frac{mg T_1^2 (4\pi^2 l^2 - gl T_2^2)}{4\pi^2 [8\pi^2 l - g(T_1^2 + T_2^2)]}, \quad (11)$$

$$J_2 = \frac{mg T_2^2 (4\pi^2 l^2 - gl T_1^2)}{4\pi^2 [8\pi^2 l - g(T_1^2 + T_2^2)]}, \quad (12)$$

или

$$J_1 = \frac{mgl T_1^2 \left(\frac{4\pi^2 l}{g} - T_2^2\right)}{4\pi^2 \left[\frac{8\pi^2 l}{g} - (T_1^2 + T_2^2)\right]}, \quad (13)$$

$$J_2 = \frac{mgl T_2^2 \left(\frac{4\pi^2 l}{g} - T_1^2\right)}{4\pi^2 \left[\frac{8\pi^2 l}{g} - (T_1^2 + T_2^2)\right]}, \quad (14)$$

В данной работе  $m$ ,  $g$  и  $l$  имеют постоянные значения. Поэтому (13) и (14) можно записать в виде

$$J_1 = \frac{b T_1^2 \cdot (c - T_2^2)}{2c - (T_1^2 + T_2^2)}, \quad (15)$$

$$J_2 = \frac{b T_2^2 \cdot (c - T_1^2)}{2c - (T_1^2 + T_2^2)}, \quad (16)$$

где

$$b = \frac{mgl}{4\pi^2}, \quad c = \frac{4\pi^2 l}{g}. \quad (17)$$

#### Выполнение эксперимента

1. Отклонив маятника на угол  $5 - 6^\circ$ , свободно его отпустить.
2. Измерить время  $t_1$ ,  $n$  (например, четырех) полных колебаний. Найти период  $T_1 = t_1/n$ .
3. Повторить измерения, указанные в пп.1 и 2 не менее  $K=5$  раз и полученные данные занести в таблицу 1.

Таблица 1

k	t <sub>1</sub> , с	t <sub>2</sub> , с	n	T <sub>1</sub> , с	T <sub>2</sub> , с

4. Осторожно перевернув оборотный маятник, произвести указанные в пп. 1-3 операции для аналогичного нахождения периода  $T_2$ .

5. По данным таблицы 1 найти среднее значения  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$ , абсолютные погрешности  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  (см. лабораторную работу М-1), дополнив таблицу 1 полученными данными.

#### Обработка экспериментальных данных

1. По формулам (17), полагая  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ , вычислить  $l$  и  $c$ . Значения  $m$  и  $l$  для этого расчета должны быть указаны на установке.

2. По формулам (15) и (16) вычисляем моменты инерции оборотного маятника  $J_1$  и  $J_2$ .

3. Необходимые для нахождения погрешностей измерения моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$  их частные производные вычислить по формулам:

$$\frac{\partial J_1}{\partial T_1} = \frac{2b T_1 (c - T_2^2) (2c - T_2^2)}{[2c - (T_1^2 + T_2^2)]^2}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial T_2} = \frac{2b T_1^2 T_2 (T_1^2 - c)}{[2c - (T_1^2 + T_2^2)]^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial T_1} = \frac{2b T_2^2 T_1 (T_2^2 - c)}{[2c - (T_1^2 + T_2^2)]^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial T_2} = \frac{2b T_2 T_1 (c - T_1^2) (2c - T_1^2)}{[2c - (T_1^2 + T_2^2)]^2}, \quad (21)$$

4. Оценить значения абсолютных погрешностей  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$ , учитывая, что

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta t_1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n_1}{n_1}\right)^2} = \frac{\Delta t_1}{t_1},$$

т.е.  $\Delta T_1 = \frac{T_1}{t_1} \Delta t_1 = \frac{1}{n} \Delta t_1$  и аналогично  $\Delta T_2 = \frac{1}{n} \Delta t_2$ ,

где  $n$ -число периодов за измеряемый промежуток времени ( $t_1$  или  $t_2$ ). При этом абсолютные погрешности измерения времени  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  следует найти либо как случайные погрешности  $K$  (например,  $K=5$ ) измерений  $t_1$  и  $t_2$ , либо (если случайные погрешности меньше приборных) как приборные с учетом того, что при отсчёте времени  $t_1$  и  $t_2$  допускается ручной хронометраж, позволяющий в данном случае принять  $t_1 \approx t_2 \approx 0.2$  с.

5. Вычислить значения абсолютных погрешностей найденных моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$  по формулам:

$$\Delta J_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial J_1}{\partial T_1}\right)^2 (\Delta T_1)^2 + \left(\frac{\partial J_1}{\partial T_2}\right)^2 (\Delta T_2)^2}, \quad (22)$$

$$\Delta J_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial J_2}{\partial T_1}\right)^2 (\Delta T_1)^2 + \left(\frac{\partial J_2}{\partial T_2}\right)^2 (\Delta T_2)^2}, \quad (23)$$

6. Окончательный результат представить в виде

$$J_1 \pm \Delta J_1, \frac{\Delta J_1}{J_1} \cdot 100\%,$$

$$J_2 \pm \Delta J_2, \frac{\Delta J_2}{J_2} \cdot 100\%,$$

## Б. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

### Теоретическая часть

Маятник Максвелла (рис. 2) представляет собой маховик 1, жёстко закреплённый на осевом стержне 2, висящем на двух нитях 4, прикреплённых к опоре 5.

Вращая маятник Максвелла вокруг его оси и тем самым наматывая нити 4 на осевой стержень 2, можно поднять его на некоторую высоту  $h$ . В этом случае маятник, обладающий массой  $m$ , будет иметь потенциальную энергию  $mgh$  ( $g$  - ускорение свободного падения). Предоставленный затем самому себе, маятник начнет раскручиваться и его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию поступательного движения  $\frac{mv^2}{2}$  и вращательного движения  $\frac{J\omega^2}{2}$ . Таким образом, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (24)$$

где  $J$  — момент инерции маятника относительно его оси,

$h$  — высота, на которую опустилась ось маятника,

$v$  — скорость спуска оси маятника в тот момент, когда ось опустилась на расстояние  $h$ ,

$\omega$  — угловая скорость маятника в тот же момент времени.

Из уравнения (24) следует

$$J = m \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{2gh}{v^2} - 1 \right). \quad (25)$$

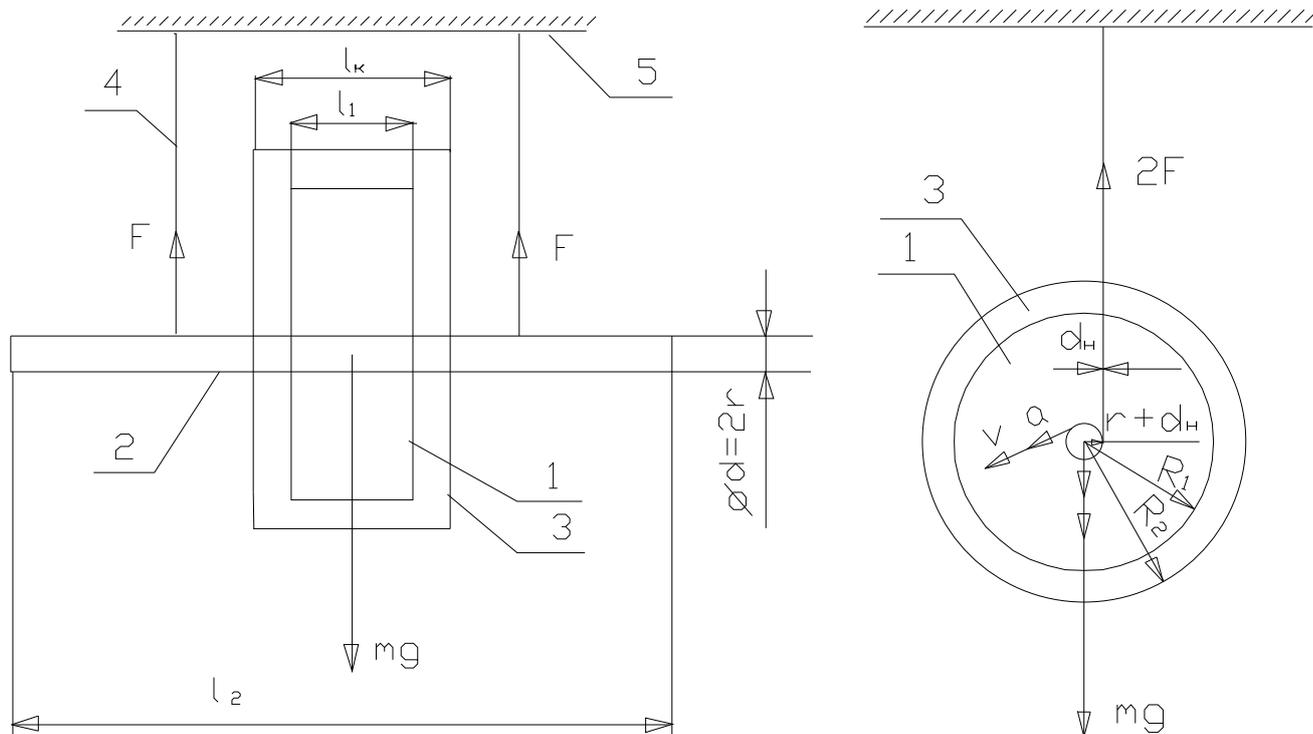


Рис. 2. Маятник Максвелла

Раскручивание нитей с осевого стержня маятника совершается обычно без их проскальзывания. Поэтому  $v = (r + d_n)\omega$ , где  $r$  — радиус осевого сечения стержня,  $d_n$  — диаметр нити. Маятник опускается с ускорением  $a$ , отличающимся от  $g$  ( $a < g$ ). Подставив в (25)  $v^2 = (r + d_n)^2 \omega^2$  и  $v^2 = 2ah$  имеем

$$J = m(r + d_n)^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right). \quad (26)$$

Учитывая, что  $r = \frac{d}{2}$  и  $a = \frac{2h}{t^2}$ , получим

$$J = \frac{m(d + 2d_n)^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (27)$$

где  $d$  — диаметр осевого стержня,

$d_n$  — диаметр нити,

$t$  — время спуска оси маятника на расстояния  $h$ ,

$m$  — масса маятника,

$g$  — ускорения свободного падения.

Из уравнения (27) следует, что чем больше момент инерции  $J$ , тем меньше ускорения спуска  $a$  маятника Максвелла. В силу того, что значения  $J$  не может быть равным нулю (или менее нуля), всегда ускорение спуска  $a < g$ . Отсюда следует, что сила  $F$ , с которой каждая нить действует на спускающийся маятник, не может равняться нулю. Значения силы  $F$  (и равной ей, но противоположно направленной силы натяжения нити) находится из уравнения

$$mg - 2F = ma \quad (28)$$

при условии, что трением нитей, сопротивлением воздуха и незначительным отклонением нитей от вертикали можно пренебречь. Таким образом,

$$F = \frac{m}{2}(g - a). \quad (29)$$

Можно показать, что формула (29) определяет значения силы натяжения каждой нити как при спуске, так и при подъёме маятника Максвелла.

Из сказанного, однако, не следует, что в любой момент времени  $2F < mg$  /см.уравнение (28)/. Очевидно, в нижнем положении маятника, когда нить полностью разматывается и скорость спуска оси маятника достигнет максимального значения  $V_{max}$ , ось маятника начнёт

вращаться вокруг параллельной ей оси, проходящей через нижний конец нити. В результате скорость  $V_{max}$  будет направлена вертикально вверх, и маятник, наматываясь на нити, станет подниматься. В крайнем нижнем положении изменение направления скорости  $V_{max}$  на  $180^\circ$  в силу малости значений радиуса  $r$  осевого стержня происходит за очень короткий промежуток времени  $\Delta t$ . Поэтому натяжение нитей маятника при прохождении резко возрастает (возникает рывок нитей). Значения силы натяжения  $F_{max}$  каждой нити при рывке можно определить из приближённого в данном случае равенства

$$(2 F_{max} - mg)\Delta t = m V_{max} - (-m V_{max}) = 2m V_{max} , \quad (30)$$

где  $m$ —масса маятника.

Равенство (30) не является строгим, так как  $F_{max}$ — значение силы, усреднённой в промежутке времени  $\Delta t$ .

Полагая, что при изменении направления скорости  $V_{max}$  на  $180^\circ$  её модуль не изменяется, имеем  $V_{max} \approx \frac{\pi r}{\Delta t}$ , т.е.  $\Delta t = \frac{\pi r}{V_{max}}$ . Подставляя  $\Delta t$  в (30), получим

$$2 F_{max} = \frac{2m V_{max}^2}{\pi r} + mg . \quad (31)$$

Значения  $V_{max}^2$  определяется высотой спуска  $h$  и ускорением  $a$ :

$$V_{max}^2 = 2ah .$$

Таким образом,

$$2 F_{max} = \frac{4h}{\pi r} ma + mg , \quad (32)$$

Несмотря на то, что  $a < g$ , первый член правой части равенства (32) может иметь значение не только сравнимое с  $mg$ , но и превышающее его, так как обычно  $h \gg r$ . Поэтому прочность нитей, на которых подвешен маятник Максвелла, должна быть такой, чтобы при рывке каждая из них выдержала натяжение

$$F_{max} = \frac{1}{2} \left( \frac{4h}{\pi r} ma + mg \right) .$$

### Экспериментальная часть

Маятник Максвелла (рис. 2), используется в данной работе,— это массивный цилиндр (маховик) 1 (радиусом  $R_1$  и толщиной  $l_1$ ), насаженный на осевой цилиндрический стержень 2 (радиусом  $r$  и длиной  $l_2$ ). Маховик 1 и стержень 2 изготовлены из одного материала. На маховик 1 вплотную насажено кольцо 3 из другого материала, имеющее внешний радиус  $R_2$  и толщину вдоль своей оси  $l_k$ . Маятник с помощью двух нитей подвешен к опоре 5.

Измерив в эксперименте время спуска  $t$  и высоту его снижения  $h$ , можно по формуле (27) определить значения момента инерции  $J$  маятника Максвелла.

С другой стороны, значения этого момента инерции можно рассчитать по формуле

$$J^* = \frac{m_{ц} R_1^2}{2} + \frac{m_{ст} r^2}{2} + \frac{1}{2} m_{к} (R_1^2 + R_2^2) \quad (33)$$

где  $m_{ц}$ — масса цилиндра (маховика) 1 включая массу части осевого стержня внутри его,

$m_{ст}$ — масса части осевого стержня вне маховика 1,

$m_{к}$ —масса кольца,

$R_1$  и  $R_2$ — внутренних и внешних радиусы кольца,

$r$ — радиус осевого стержня.

Сравнивая вычисленное по формуле (33) значение  $J^*$  со значением  $J$ , полученным из эксперимента по формуле (27), можно найти относительную погрешность измерения  $\gamma$  по формуле

$$\gamma = \frac{J^* - J}{J^*} 100 \% \quad (34)$$

## Выполнение эксперимента

1. С помощью штангенциркуля измерить  $d, d_n, l_1, L_2, l_k, R_1, R_2$  (см. рис. 2).
2. Вычислить массу маятника по формуле

$$m = \rho\pi[R_1^2 l_1 + r^2(l_2 - l_1)] + m_k, \quad (35)$$

где  $\rho$ — плотность материала маховика и осевого стержня,

$$m_k = \rho_k \pi l_k \cdot (R_2^2 - R_1^2) \quad (36)$$

где  $m_k$ — масса кольца, имеющего плотность  $\rho_k$ .

3. Измерить высоту спуска  $h$  оси маятника от крайнего верхнего положения до крайнего нижнего.

4. Вращая маятник вокруг оси, поднять маховик с кольцом до упора. При вращении следить за тем, чтобы нити наматывались на осевой стержень в один слой.

5. Отпустить маховик и одновременно включить секундомер.

Примечание. В установке с автоматической регистрацией времени спуска маятника нажатием клавиши приводится в движение маятник и одновременно с этим включается электронный секундомер.

6. Выключить секундомер, когда маятник достигнет крайнего нижнего положения.

Примечание. При автоматической регистрации времени спуска выключение секундомера автоматическое.

7. Операции пп. 4–6 повторить не менее трёх раз и подсчитать среднее значение времени спуска  $t$ .

8. По формуле (27) подсчитать момент инерции  $J$ .

9. Вычислить значения момента инерции  $J^*$  по формуле (33) с учётом (36) и подсчитать относительную погрешность по формуле (34).

## В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### Теоретическая часть

Момент инерции твёрдого тела определяет его инерционные свойства при вращательном движении. Существуют различные методы экспериментального определения моментов инерции тел, в данном случае используется метод крутильных колебаний.

Круглая горизонтальная платформа (рис. 3), подвешенная на трех одинаковых симметрично расположенных нитях (трифилярный подвес), закреплённых внизу у краёв платформы и вверху у краёв небольшого диска, может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы.

Если платформа массы  $m$ , вращаясь из положения равновесия в одном направлении, поднимется на высоту  $h$ , то приращение потенциальной энергии будет равно  $mgh$ , где  $g$ — ускорение силы тяжести. Вращаясь в обратном направлении, платформа придёт в положение равновесия с кинетической энергией, равной  $\frac{1}{2}J\omega_0^2$ , где  $J$ — момент инерции платформы относительно её оси вращения,  $\omega_0$ — её угловая скорость в момент прохождения положения равновесия. Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения энергии имеем

$$mgh = \frac{1}{2}J\omega_0^2. \quad (37)$$

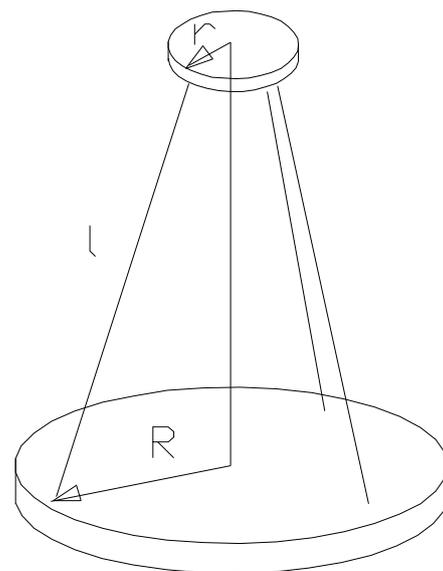


Рис. 3. Крутильный маятник

При малых амплитудах можно считать колебания платформы гармоническими. В этом случае зависимость угла поворота платформы от времени имеем вид

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t ,$$

где  $\alpha$ — угол поворота платформы,  $\alpha_0$ — амплитудное значение угла поворота,  $T$ — период колебаний,  $t$ — текущее время. Продифференцировав угловое смещение по времени, получим зависимость угловой скорости  $\omega$  от времени  $t$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha}{T} .$$

В момент прохождения платформой положения равновесия ( $t= 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T, 2T, \frac{5}{2}T$  и т.д.)  $\omega$  принимает значения  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi \alpha_0}{T} . \quad (38)$$

Подставляя (38) в (37), получаем

$$mgh = \frac{1}{2} J \left( \frac{2\pi \alpha_0}{T} \right)^2 . \quad (39)$$

Если  $l$ — длина нитей подвеса,  $R$ — расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней,  $r$ — расстояние от центра верхнего малого диска до точек крепления нитей на нём, то легко видеть (рис. 4), что

$$h = OO_1 = BC - BC_1$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2 ,$$

$$(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha) .$$

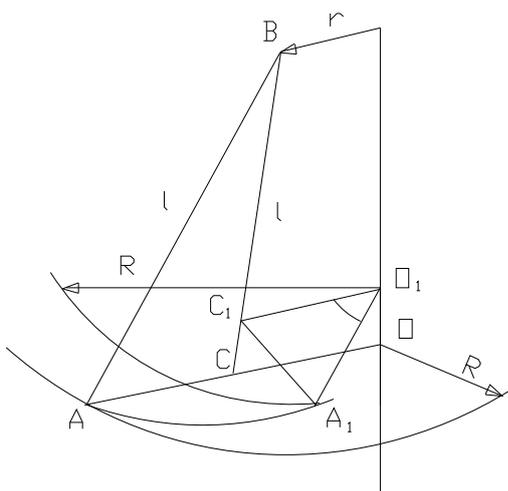


Рис. 4.

Выражая разность  $BC$  и  $BC_1$  как отношение разности их квадратов к их сумме

$$h = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1} ,$$

находим

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{BC + BC_1} .$$

При малых углах отклонения  $\alpha_0$ , выраженных в радианах, можно принять  $\sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$ , а при  $l \gg R$  можно допустить, что  $BC + BC_1 \approx 2l$ . Учитывая это, получим  $h = \frac{Rr \alpha_0^2}{2l}$ . Тогда на основании (39)  $mg \frac{Rr \alpha_0^2}{2l} = \frac{1}{2} J \left( \frac{2\pi \alpha_0}{T} \right)^2$ , откуда

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2 . \quad (40)$$

Формулу (40) можно использовать для определения момента инерции как самой платформы, так и платформы с телом, положенным на неё. В первом случае  $m$ — масса платформы,  $T$ — период её колебаний, во втором —  $m$ — общая масса платформы и тела,  $T$ — период их колебаний.

## Экспериментальная часть

1. Определение момента инерции тела (цилиндра)  $J_{цo}$ . Момент инерции цилиндра  $J_{цo}$  относительно оси, проходящей параллельно его образующей через его центр масс, можно найти из равенства

$$J_{цo} = J - J_o, \quad (41)$$

где  $J_o$  — момент инерции ненагруженной платформы относительно проходящей через её центр масс вертикальной оси вращения,  $J$  — момент инерции (относительно той же оси) платформы с цилиндром, расположенным вертикально, центр масс которого находится на оси вращения.  $J_o$  вычисляется по формуле (40) после экспериментального определения периода колебания  $T_o$  ненагруженной платформы. Необходимые при этом значения параметров  $l, R, r$  (см. рис. 3) и массы ненагруженной платформы  $m_o$  даются как постоянные прибора. Момент инерции  $J$  системы "платформа+цилиндр в её центре" находится аналогично по периоду колебаний системы  $T$  и её массе  $m = m_o + m_{цo}$ . Масса цилиндра  $m_{ц}$  предварительно определяется путём взвешивания.

### 2. Экспериментальная проверка теоремы Гюгенца-Штейнера.

1-й способ (с помощью четырех цилиндров). Для подтверждения этой теоремы можно использовать четыре одинаковых цилиндра с массой каждого  $m_{ц}$ , расположив их на платформе в вертикальном положении по два на каждом из двух произвольных диаметров платформы так, чтобы расстояние  $a$  от центров масс цилиндров до оси вращения было у них одинаковым. Если затем центр масс двух цилиндров, расположенных на одном диаметре платформы, приблизить к её оси вращения до расстояния  $a_1$ , а центры масс цилиндров, находящихся на другом диаметре, удалить от этой оси до расстояния  $a_2$  так, чтобы суммарный момент инерции четырех цилиндров относительно оси вращения платформы не изменился, то на основании теоремы Гюгенца-Штейнера можно написать равенство

$$4(J_{цo} + m_{ц} a^2) = 2(J_{цo} + m_{ц} a_1^2) + 2(J_{цo} + m_{ц} a_2^2)$$

или

$$a^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}. \quad (42)$$

Таким образом, в тех случаях, когда значения  $a_1$  и  $a_2$  удовлетворяют равенству (42), суммарный момент инерции относительно оси вращения платформы остаётся неизменным. Подтверждением этого должно быть постоянство периода крутильных колебаний в указанных случаях.

2-й способ (с помощью двух цилиндров). Для этого два одинаковых цилиндра с массой каждого  $m_{ц}$  надо расположить в центре платформы один над другим так, чтобы их центры масс были на оси вращения платформы. Определив экспериментально период колебаний  $T_1$  этой системы, вычисляют по формуле (40) её момент инерции  $J_1$ , принимая за массу системы  $m_1 = m_o + 2m_{ц}$ . Учитывая, что ненагруженная платформа имеет момент инерции  $J_o$ , находят момент инерции одного цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс

$$J_{цo} = \frac{1}{2}(J_1 - J_o). \quad (43)$$

Затем оба цилиндра располагают симметрично относительно оси вращения платформы так, чтобы их центры масс были удалены от этой оси на некоторое расстояние  $a$ . Найденный в этом случае период колебания системы  $T_2$  позволяет по формуле (40) с учётом того, что  $m_2 = m_1$ , найти момент инерции  $J_2$  платформы с равноудалёнными от оси вращения цилиндрами. По формуле, аналогичной формуле (43), вычисляют момент инерции одного цилиндра  $J_{ц}$  относительно оси вращения платформы, не проходящей в данном случае через его центр масс

$$J_{ц} = \frac{1}{2}(J_2 - J_o). \quad (44)$$

Для проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера необходимо сравнить значения  $(J_{ц} - J_{ц0})$  и  $m_{ц}a^2$ . На основании этой теоремы указанные значения должны совпадать:

$$J_{ц} - J_{ц0} = m_{ц} a^2, \quad (45)$$

### Выполнение эксперимента

1. Измерить массу  $m_{ц}$  одного из четырёх одинаковых цилиндров.
2. Установить рядом с платформой специальный, укреплённый на подставке, указатель положения равновесия платформы против метки, нанесённой на платформе.
3. Измерить периоды крутильных колебаний ненагруженной платформы  $T_0$  и платформы с цилиндром в её центре  $T$ . Подсчитать по формуле (40)  $J_0$  и  $J$  и по формуле (41) момент инерции цилиндра  $J_{ц0}$ . Полученные данные и данные установки занести в табл. 2

Таблица 2

$m_0$	$m_{ц}$	$R$	$r$	$l$	$T_0$	$T$	$J_0$	$J$	$J_{ц0}$

**Внимание!** Для измерения периода колебаний платформы необходимо в каждом случае сообщить небольшой вращательный импульс, при котором её амплитуда колебаний  $\alpha_0$  не превышала бы  $5 - 6^\circ$ . С этой целью поворачивают не её, а верхний диск трифилярного подвеса (примерно на  $30^\circ$ ). Этот диск имеет расположенный над ним стопорный (арретирный) винт, который отпускают только на время поворота диска. Этим достигается почти полное исключение других некрутильных колебаний. Закрепив стопорный винт и убедившись в том, что  $\alpha_0$  платформы не превышает  $6^\circ$ , измеряют время  $t$ , за которое платформа совершает  $n$  полных колебаний (можно положить  $n=10$ ). Отношение  $t/n$  в каждом случае определяет искомый период. Среднее значение периода можно найти, измерив три раза время  $t$  для одного значения  $n$ . Измерить время  $t$  можно с помощью либо механического секундомера (его нужно включать и выключать в момент прохождения метки платформы мимо указателя на подставке), либо с помощью электронного секундометра.

4. Проверить теорему Гюйгенса–Штейнера с помощью четырёх цилиндров. Центры масс цилиндров при этом должны отстоять от оси вращения на таких расстояниях  $a, a_1, a_2$ , значения которых удовлетворяли бы равенству (42). Провести измерения периода колебаний платформы при: 1)  $a_1 = a_2 = a$ , 2)  $a_1 = 0, a_2 = a\sqrt{2}$ , 3)  $a > a_1 > 0, a_2 > a$ . Результаты проверки занести в табл. 3. Период колебаний  $T$  в этих случаях должен оказаться постоянным.

Таблица 3

$a = \dots$			
$N$	$a_1$	$a_2$	$T$
1			
2			
3			

Таблица 4

$N$	$a$	$m_{ц0}a^2$	$j$
1			
2			
3			

5. Проверить теорему Гюйгенса–Штейнера с помощью цилиндров при трёх значениях  $n$ . Проверка состоит в экспериментальном определении значений левой и правой частей равенства (45) и их сравнении. При строго симметричном расположении цилиндров относительно оси вращения равенство (45) должно выполняться. Результаты проверки внести в табл. 4

6. Оценить погрешность  $\gamma$  момента инерции  $J_{ц0}$ , найденного в п. 3 по формуле (41),

$$\gamma = \frac{J_{ц0}^* - J_{ц0}}{J_{ц0}^*} 100\%,$$

где  $J_{ц0}^*$  вычисляется по массе цилиндра  $m_{ц}$  и его радиусу  $r_{ц}$ :

$$J_{wj}^* = \frac{m_w r_w^2}{2}. \quad (46)$$

## Контрольные вопросы

1. Какую роль играет момент инерции тела при его вращении?
2. Какие колебания физического маятника являются изохорными?
3. Пусть физическим маятником является шар радиуса  $R$  и массы  $m$ , висющий на нити длиной  $R$ . Какой будет формула для определения периода  $T$  его колебаний? Каким будет график зависимости  $T = f(d)$ ? /См. уравнение (3)/.
4. Как доказать, что при подъеме маятника Максвелла суммарное натяжение двух нитей такое же, как при спуске, и при этом меньше силы тяжести маятника?
5. Почему при достижении маятником Максвелла крайнего положения натяжение нитей резко возрастает?
6. Зависит ли период крутильных колебаний платформы на трифилярном подвесе от плотности материала, из которого она изготовлена?