ТРУДЫ

ВТОРАГО СЪѢЗДА

РУССКИХЪ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

ВЪ МОСКВѢ,

ПРОИСХОДИВШАГО

съ 20-го по 30-е августа 1869 года.

МОСКВА.
ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ (КАТКОВЪ И К°),
на Страстномъ бульварѣ.
1870.

ТРУДЫ

ВТОРАГО СЪѢЗДА

РУССКИХЪ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

ПО ОТДѢЛУ

ТЕХНОЛОГІИ И ПРАКТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Подъ редакціею Директора Императорскаго Техническаго Училища

В. К. Делла-Восъ.

О ПАРАЛЛЕЛОГРАММАХЪ.

(ПОСВЯЩАЕТСЯ ИМПЕРАТОРСКОМУ ТЕХНИЧЕСКОМУ УЧИЛИЩУ).

---

§ 1. На практикѣ до сихъ поръ употребляются только три различныхъ параллелограмма: сокращенный и полный параллелограммы Ватта и параллелограммъ, извѣстный подъ названіемъ механизма Эвенса. Но подобныхъ механизмовъ, доставляющихъ движеніе, подходящее въ большей или меньшей степени къ прямолинейному, можно составить много. Въ засѣданіяхъ Петербургской Академіи наукъ (1861 г. окт. 18-го, 1868 г. окт. 8-го) и Московскаго Математическаго Общества (1867 г. ноября 18-го) мы говорили объ устройствѣ такихъ параллелограммовъ, которые своею точностію превосходятъ параллелограммы нынѣ употребляемые. Теперь мы покажемъ какимъ образомъ можно составлять различные параллелограммы, доставляющіе прямолинейное движеніе съ приближеніемъ по желанію большимъ. При этомъ мы увидимъ, что съ тѣмъ же числомъ составляющихъ частей, какъ и полный параллелограммъ Ватта, можно сдѣлать такой параллелограммъ, который дастъ прямолинейное движеніе съ точностію до 13 степени, между тѣмъ какъ параллелограммы Ватта и механизмъ Эвенса даютъ это движеніе съ точностію не выше 5-й степени, въ параллелограммахъ же предложенныхъ нами эта степень мѣняется отъ 6 до 8. Такой параллелограммъ, какъ мы увидимъ, имѣетъ еще то преимущество, что онъ, сохраняя въ дѣйствіи своемъ точность еще достаточную для практики, можетъ своими частями замѣнять мотыль и шатунъ для преобразованія поперемѣннаго прямолинейнаго движенія въ непрерывное вращательное. Говоря о различныхъ параллелограммахъ, мы будемъ имѣть въ виду только безконечно малыя движенія, при которыхъ степень точности параллелограммовъ особенно легко опредѣляется; для перехода же отъ безконечно малыхъ движеній къ конечнымъ нужно будетъ сдѣлать нѣкоторыя измѣненія въ размѣрѣ ихъ частей. Эти измѣненія вообще будутъ незначительны, если движеніе параллелограмма происходитъ въ предѣлахъ довольно тѣсныхъ, и тогда онѣ могутъ быть вычислены помощію рядовъ по способу показанному нами въ мемуарѣ: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (Mém. des savants étrangers T. VII). Но послѣдній изъ вышеупомянутыхъ случаевъ, когда параллелограммъ своими частями замѣняетъ мотыль и кривошипъ, требуетъ особеннаго пріема, такъ какъ въ этомъ случаѣ, далеко отступающемъ отъ случая безконечно малыхъ движеній, ряды не могутъ быть съ пользою употреблены. Этимъ случаемъ мы особенно займемся и дадимъ всѣ формулы относящіяся до него.

§ 2. Механизмы, извѣстные подъ именемъ параллелограммовъ, вообще могутъ быть разсматриваемы какъ системы прямыхъ линій, двигающихся въ одной плоскости и связанныхъ между собою шарнирами, которые препятствуютъ точкамъ соединенія линій скользить по нимъ, но не мѣшаютъ измѣняться угламъ, составленнымъ этими линіями. Кромѣ того нѣкоторыя изъ нихъ прикрѣплены къ нѣкоторымъ точкамъ плоскости, такъ что эти линіи могутъ только вращаться около точекъ прикрѣпленія. Называя черезъ m число линій, составляющихъ параллелограммъ, черезъ n число шарнировъ, связывающихъ эти линіи по двѣ, и черезъ r число точекъ прикрѣпленія, мы замѣчаемъ, что на плоскости мѣсто каждой изъ m линій разсматриваемой системы, опредѣляется 3 величинами (за которыя, напр., можно взять двѣ координаты одного изъ концовъ линій и наклоненіе ея къ оси абсциссъ). Съ другой стороны каждый изъ n шарнировъ, связывающихъ двѣ линіи, и каждая изъ r точекъ прикрѣпленія линіи къ плоскости даютъ по два уравненія между величинами, опредѣляющими положеніе разсматриваемой нами системы (а именно: связь двухъ линій шарниромъ предполагаетъ равенство координатъ двухъ точекъ, принадлежащихъ двумъ линіямъ; прикрѣпленіе линіи одною изъ ея точекъ къ плоскости предполагаетъ данными координаты этой точки). Изъ этого видно, что въ разсматриваемой нами системѣ мѣсто всѣхъ точекъ будетъ опредѣляться $3m$ величинами связанными между собою $2(n+r)$ уравненіями, и слѣдовательно, число независимыхъ перемѣнныхъ представится разностію

$$3m - 2(n + r).$$

Но это число должно равняться 1 для того чтобы точки разсматриваемой системы могли двигаться только по опредѣленнымъ траэкторіямъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ параллелограммахъ; а потому

(1) . . . . $3m - 2(n + r) = 1.$

Съ другой стороны мы замѣчаемъ: 1) что разсматриваемая нами система не должна свободно двигаться въ плоскости, и 2) что всѣ линіи, ее составляющія, должны быть въ связи между собою.

Первое предполагаетъ необходимымъ точки прикрѣпленія и слѣдовательно, неравенство $r > o$.

Второе предполагаетъ, что n, число шарнировъ, больше $m - 2$, такъ какъ $m - 2$ шарнировъ, очевидно, недостаточно для того чтобы связать по двѣ всѣ m линій, составляющихъ систему. По уравненію же (1), при $n > m - 2$, находимъ

$$r < \frac{m + 3}{2}$$

Изъ этого видно, что v, число шарнировъ, должно удовлетворять такимъ неравенствамъ:

(2) . . . . $v > o,\ v < \frac{m+3}{2}$.

§ 3. Принимая въ уравненіи $3m - 2(n + v) = 1$ числа m и $n + v$ за неизвѣстныя и рѣшая его, находимъ такія величины для m и $n + v$:

$$m = 1,\ n + v = 1;\quad m = 3,\ n + v = 4;$$
$$m = 5,\ n + v = 7,\quad \text{и т. д.}$$

Разсматривая первыя значенія m и $n + v$

$$m = 1,\ n + v = 1,$$

мы замѣчаемъ, что по (2) при $m = 1$, должно быть

$$v > o,\quad v < \frac{1+3}{2} < 2,$$

что предполагаетъ $v = 1$. Слѣд. въ этомъ случаѣ параллелограммъ приводится къ одной линіи, вращающейся около одной изъ своихъ точекъ. — При этомъ получается круговое движеніе, которое можетъ замѣнить прямолинейное только съ точностію до второй степени. Переходя къ слѣдующимъ значеніямъ m и $n + v$ имѣемъ

$$m = 3,\quad n + v = 4.$$

А по (2) при $m = 3$ находимъ

$$v > o,\quad v < \frac{3+3}{2} < 3,$$

что предполагаетъ для v одну изъ такихъ величинъ:

$$v = 1,\quad v = 2.$$

По равенству же

$$n + v = 4,$$

этимъ величинамъ v будутъ соотвѣтствовать такія величины n:

$$n = 3,\quad n = 2.$$

И такъ, при $m = 3$ будетъ, или

$$v = 1,\quad n = 3,$$
$$\text{или } v = 2,\quad n = 2.$$

Въ первомъ случаѣ разсматриваемая нами система представляетъ линію, вращающуюся около одной изъ своихъ точекъ и связанную съ двумя другими помощію трехъ шарнировъ, или, что одно и тоже, треугольникъ, вращающійся около точки, лежащей на одной изъ его сторонъ. При этомъ всѣ точки могутъ двигаться только по кругамъ и слѣд., могутъ дать прямолинейное движеніе только съ точностію до 2-й степени.

Во второмъ случаѣ, когда при $m = 2$,

$$v = 2, \quad n = 2,$$

разсматриваемая нами система представляетъ двѣ линіи, вращающіяся около 2 неподвижныхъ точекъ и связанныя съ третьею помощію двухъ шарнировъ. Это простѣйшая система параллелограммовъ, которые могутъ дать прямолинейное движеніе съ точностію выше второй степени; таковы суть: *сокращенный параллелограммъ Ватта*, *механизмъ Эвенса* и *параллелограммъ* предложенный нами прошлаго года. Первые два параллелограмма даютъ прямолинейное движеніе съ точностію до 5-й степени; послѣдній до 6-й степени.

Въ третьей системѣ значеній m и $n + v$ имѣемъ

$$m = 5, \quad n + v = 7,$$

и по (2), при $m = 5$, находимъ

$$v > o, \quad v < \frac{5+3}{2} < 4.$$

Откуда ясно, что v, число точекъ вращенія линій, можетъ имѣть только такія значенія:

$$v = 1, \; v = 2, \; v = 3.$$

По равенству же

$$n + v = 7$$

находимъ, что этимъ величинамъ v будутъ соотвѣтствовать такія величины числа n:

$$n = 6, \; n = 5, \; n = 4$$

Первыя величины v и n

$$v = 1, \; n = 6$$

соотвѣствуютъ тому случаю, когда 5 линій связаны 6 шарнирами и вращаются около точки лежащей на одной изъ нихъ. При этомъ линіи составляютъ неизмѣнную систему и всѣ точки ихъ могутъ описывать только круги.

При

$$v = 2, \; n = 5$$

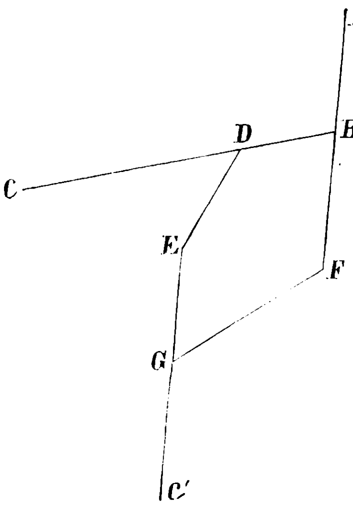
получаются параллелограммы, составленные изъ двухъ вращающихся около неподвижныхъ точекъ линій, сочлененныхъ съ тремя другими помощію пяти шарнировъ; таковы суть: *полный параллелограммъ Ватта* и параллелограммъ, предложенный нами подъ названіемъ *измѣненнаго параллелограмма Ватта* *). Первый изъ этихъ параллелограммовъ даетъ прямолинейное движеніе съ точностію до 5-й степени; второй—до 7-й.

---

*) Bulletin de l'Academie des sciences de St. Pétersbourg, T. III.

При томъ же сочлененіи составныхъ частей, какъ и въ параллелограммѣ Ватта, но при другомъ направленіи ихъ получается параллелограммъ, упоминаемый нами въ концѣ нашей статьи, подъ заглавіемъ: *Объ одномъ механизмѣ* *). При надлежащемъ размѣрѣ составныхъ частей, такой параллелограммъ даетъ прямолинейное движеніе, съ точностію до 6-й степени. Сочлененіе же частей такое какъ въ *измѣненномъ параллелограммѣ Ватта,* но съ другимъ направленіемъ, дастъ параллелограммъ изображенный на фиг. 1-й. Такой параллелограммъ, какъ нетрудно показать, можетъ дать прямолинейное движеніе съ точностію до 6-й степени и для этого размѣры его частей должны быть опредѣлены слѣдующимъ образомъ:

Фиг. 1.



Если длину линіи BC, вращающейся около точки C, примемъ за единицу и положимъ $GF = f$; $BF = h$, (длина этихъ линій произвольна), то всѣ остальныя части параллелограмма и точка A на линіи AF, доставляющая желаемое движеніе, найдутся по формуламъ

$$ED = \frac{(1-f)f^2}{1-2f^2};$$

$$CD = \frac{(1-f)(1-f^2)}{1-2f^2};$$

$$EC' = \frac{(1-f)^2(1+f)}{1-f-f^2}h;$$

$$GC' = \frac{f^3}{1-f-f^2}h;$$

$$AB = \frac{1-f-f^2}{f(1-f)}h.$$

Мѣсто точки C', около которой вращается линія $C'E$, выбирается такъ, что въ среднемъ положеніи параллелограмма линія DE идетъ по линіи CD и пятиугольникъ $EDBFG$ обращается въ прямоугольникъ.

§ 4. Переходимъ теперь къ послѣднимъ величинамъ r, n, возможнымъ при

$$m = 5.$$

Эти величины суть:

$$r = 3, \quad n = 4,$$

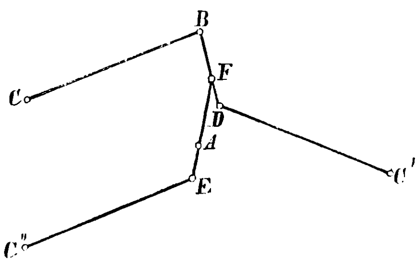
и онѣ, какъ увидимъ, даютъ параллелограммы особенно замѣчательные по точности ихъ дѣйствія. Такъ какъ $r = 3$, то въ этихъ параллелограммахъ линій, вращающихся около

*) Ученыя записки Академіи наукъ, т. XIV.

неподвижныхъ точекъ, будетъ 3, и онѣ всѣ должны быть въ связи между собою при помощи остальныхъ линій, которыхъ всего 2; а это возможно только въ томъ случаѣ, когда покрайней мѣрѣ одна изъ 2 линій связывающихъ будетъ непосредственно сочленена съ двумя линіями вращающимися около неподвижныхъ точекъ: эти то двѣ линіи, вращающіяся около неподвижныхъ точекъ, вмѣстѣ съ линіею ихъ связывающею, — мы, для сокращенія терминологіи, будемъ называть *первою частью* параллелограмма; другую же линію, вращающуюся около неподвижной точки, и линію, связывающую ее съ прочими, будемъ называть *второю частью* параллелограмма.

Параллелограммъ, о которомъ мы говорили въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 1867 года, 18-го Ноября, принадлежитъ къ разряду такихъ параллелограммовъ. Въ немъ *первая часть* представляетъ собою *сокращенный* параллелограммъ Ватта; *вторая же часть* дѣлается такъ, что въ среднемъ положеніи параллелограмма всѣ три вращающіяся около неподвижныхъ точекъ линіи параллельны между собою, и обѣ линіи, связывающія ихъ, сливаются въ одну, перпендикулярную къ нимъ. Такой параллелограммъ (фиг. 2), какъ вычисленія показываютъ, даетъ прямолинейное движеніе съ точностію до 8 степени, если въ размѣрѣ его частей выполнены слѣдующія условія:

Фиг. 2.



1) Всѣ три линіи BC, $C'D$, $C''E$, вращающіяся около неподвижныхъ точекъ C, C', C'', должны быть равны.

2) Разстоянія точки A, доставляющей желаемое движеніе, отъ концевъ F, E линіи FE должны имѣть такія величины:

$$AF = \frac{BF^2 - DF^2}{4\,FD};$$

$$AE = \frac{(BF - DF)^2}{4\,FD}.$$

§ 5. Параллелограммовъ разсматриваемаго нами вида можно составить много, измѣняя видъ *первой части* и давая различныя направленія линіямъ, составляющимъ *вторую часть*. Чтобы параллелограммы такимъ образомъ составленные давали прямолинейное движеніе съ желаемою степенью точности, ихъ части должны удовлетворять нѣкоторымъ уравненіямъ, которыя легко найти въ каждомъ частномъ случаѣ. Но эти уравненія оказываются довольно сложными, и число ихъ возрастаетъ вмѣстѣ со степенью точности параллелограмма, а потому рѣшеніе ихъ представляетъ трудности непреодолимыя, когда имѣются въ виду параллелограммы, отличающіеся особенною точностію ихъ дѣйствія. Затрудненіе это въ составленіи такихъ параллелограммовъ не имѣетъ мѣста, если во *второй части* параллелограмма линія, вращающаяся около неподвижной точки, и линія, связывающая ее съ остальною частію параллелограмма, выполняютъ такія условія:

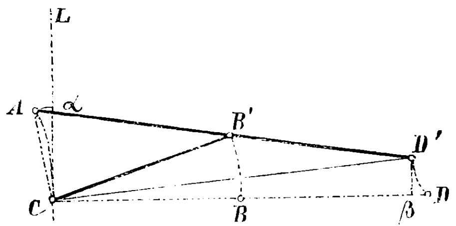
1) Вторая линія вдвое длиннѣе первой и сочленена съ нею своею серединою.

2) Одинъ конецъ второй линіи доставляетъ желаемое движеніе, а другой конецъ сочлененъ съ остальною частью параллелограмма.

3) Въ среднемъ положеніи параллелограмма конецъ второй линіи, доставляющій желаемое движеніе, совпадаетъ съ точкою, около которой вращается первая линія.

При выполненіи этихъ условій *второю частью* параллелограмма, онъ, какъ не трудно убѣдиться, дастъ прямолинейное движеніе съ точностію до $2\lambda+1$ степени, если первая часть его доставляетъ такое движеніе съ точностію до λ степени, и направленіе этого движенія одинаково съ направленіемъ *линій второй части* параллелограмма при среднемъ его положеніи.

Фиг. 3.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ (фиг. 3) CB, CD и CB', AD' два положенія линій, составляющихъ вторую часть параллелограмма: одно, соотвѣтствующее среднему положенію параллелограмма, когда точка A, доставляющая желаемое движеніе, совпадаетъ съ точкою C, около которой вращается линія CB', другое, когда точка A прошла безконечно малую дугу CA, а точка D, направляемая въ своемъ движеніи первою частью параллелограмма, прошла безконечно малую дугу DD'. По вышесказанному линія CD будетъ касательною къ дугѣ DD', такъ какъ эта линія прѣдставляетъ направленіе движенія точки D.

Соединяемъ точки A и C, C и D' прямыми AC, CD', возставляемъ изъ точки C перпендикуляръ CL къ линіи CD, и изъ точекъ A, D' опускаемъ перпендикуляры $A\alpha$, $D'\beta$ на линіи CL, CD.
По положенію имѣемъ

$$AD' = CD = 2CB';$$
$$AB' = B'D';$$

откуда видно, что уголъ ACD' прямой, а такъ какъ по построенію уголъ LCD тоже прямой, то углы $AC\alpha$, $D'CD$ равны, и слѣдовательно, прямоугольные треугольники $AC\alpha$, $D'CD$ подобны. Изъ подобія же треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{D'\beta}{CD'},$$

что даетъ намъ, для опредѣленія величины $A\alpha$, уклоненія точки A отъ прямой CL,

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'} D'\beta;$$

изъ прямоугольнаго же треугольника $CD'\beta$ имѣемъ

$$CD'^2 = C\beta^2 + D'\beta^2;$$

а такъ какъ

$$C\beta = CD - \beta D$$

и

$$CD = AD',$$

то это даетъ намъ

$$CD'^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2.$$

Замѣчая же изъ прямоугольнаго треугольника ACD', что

$$CD'^2 = AD'^2 - AC^2,$$

мы изъ этого равенства выводимъ

$$AD'^2 - AC^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2,$$

что по раскрытіи скобки и сокращеніи даетъ

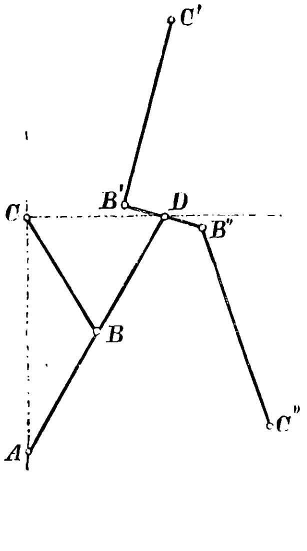
$$-AC^2 = -2AD' \,.\, \beta D + \beta D^2 + \beta D'^2.$$

Въ этомъ равенствѣ AD' величина конечная, величины же AC, βD, $\beta D'$ безконечно малыя и порядокъ безконечно малой $\beta D'$ выше порядка безконечно малой βD, такъ какъ линія CD касательная къ дугѣ DD'; вслѣдствіе чего это равенство предполагаетъ, что βD есть безконечно малое относительно AC втораго порядка. По положенію $\beta D'$ должно быть относительно βD безконечно малымъ порядка λ; такъ какъ дуга DD', описываемая точкою D, представляетъ прямую CD съ точностію до λ степеней. Слѣдовательно линія $\beta D'$ относительно линіи AC будетъ безконечно малою порядка 2λ, а это по вышенайденному равенству

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'}\,\beta D'$$

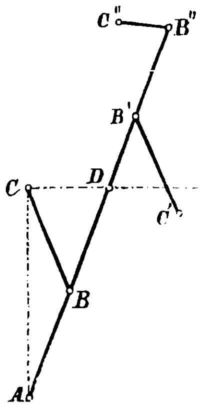
предполагаетъ, что $A\alpha$, уклоненіе точки A отъ прямой линіи LC, будетъ относительно AC безконечно малою порядка $2\lambda + 1$.

Фиг. 4.



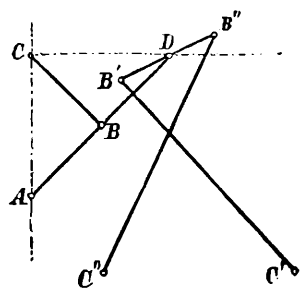
§ 6. На основаніи доказаннаго нами очень просто можно составлять параллелограммы болѣе точные изъ параллелограммовъ менѣе точныхъ, прибавляя къ послѣднимъ систему двухъ линій, о которой мы сейчасъ говорили. Такъ, отъ *сокращеннаго* параллелограмма Ватта, доставляющаго прямолинейное движеніе съ точностію до 5 степени, мы переходимъ къ параллелограмму, изображенному на фигурѣ 4, который, при выполненіи условій, показанныхъ въ § 5, будетъ давать прямолинейное движеніе съ точностію до 11 степени. Этотъ параллелограммъ состоитъ изъ трехъ линій BC, $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около неподвижныхъ точекъ C, C', C'' и двухъ линій $B'B''$, AD, сочленен-

Фиг. 5.



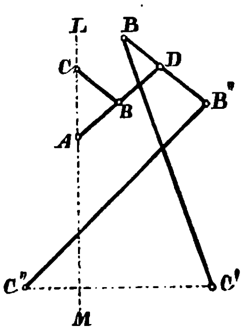
ныхъ съ первыми помощію трехъ шарнировъ B, B', B''; желаемое движеніе доставляетъ конецъ A линіи AD. Точно также отъ механизма Эвенса, доставляющаго прямолинейное движеніе съ точностію до 5, мы переходимъ къ параллелограмму, показанному на фигурѣ 5, который можетъ дать прямолинейное движеніе съ точностію тоже до 11 степени. Этотъ параллелограммъ состоитъ изъ тѣхъ же частей, какъ и предыдущій; вся разница въ положеніи неподвижныхъ точекъ C', C'', около которыхъ вращаются линіи $B'C'$, $B''\ C''$, и шарнира D, сочленяющаго линіи AD и $B'B''$. Въ § 3 мы видѣли, что изъ тѣхъ же частей какъ и сокращенный параллелограммъ Ватта и механизмъ Эвенса составляется параллелограммъ, котораго точность простирается до 6 степени. Прибавляя къ такому параллелограмму двѣ линіи, удовлетворяющія условіямъ показаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, мы получимъ параллелограммъ, который дастъ прямолинейное движеніе съ точностію до 13 степени. Параллелограммъ такимъ образомъ получаемый представленъ на фигурѣ 6. Онъ также состоитъ изъ пяти линій: трехъ $BC, B'C'$, $B''C''$, вращающихся около неподвижныхъ точекъ C, C', C'', и двухъ $B'\ B''$, AD, сочлененныхъ съ первыми помощію трехъ шарнировъ B, B', B''. Свободный конецъ линіи AD доставляетъ желаемое движеніе. Этотъ параллелограммъ разнится съ первымъ изъ вышепоказанныхъ только положеніемъ точекъ C', C'', около которыхъ вращаются линіи $B'C'$, $B''C''$.

Фиг. 6.



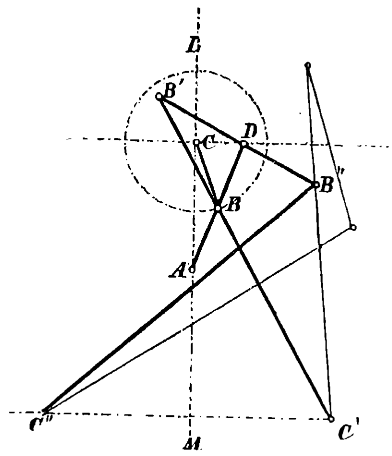
Такъ какъ этотъ параллелограммъ дастъ прямолинейное движеніе съ точностію до 13 степени, то по § 5, прибавляя къ нему еще двѣ линіи, мы можемъ получить параллелограммъ, который будетъ дѣйствовать съ точностію до 27 степени; прибавляя же еще двѣ линіи, мы увеличимъ степень точности до 55, и т. д. Но считая вполнѣ достаточною для практики точность до 13 степени, мы остановимся на последнемъ изъ вышепоказанныхъ параллелограммовъ, и не будемъ говорить о параллелограммахъ болѣе сложныхъ.

Фиг. 7.



§ 7. Доставляя прямолинейное движеніе вѣрно до степени столь высокой, разсматриваемый нами параллелограммъ можетъ дать съ точностію, достаточною для практики, прямую линію значительной длины сравнительно съ размѣрами его частей. Оставляя линіи AB, BC той же длины, и увеличивая

Фиг. 8.



длину пути точки A къ верху и къ низу отъ точки C (фигура 7), мы дойдемъ до того, что линія BC будетъ совершать полуоборотъ по правую сторону линіи LM, проходящей черезъ точку C и перпендикулярной къ линіи $C'C''$. Если же при этомъ мы перенесемъ точки $C'C''$ съ ихъ мѣста, и помѣстимъ ихъ симметрично по обѣ стороны линіи LM (фиг. 8); то всѣ положенія параллелограмма будутъ симметричны около линіи LM. А потому движенію точки A между крайними предѣлами, о которыхъ сейчасъ говорили, будетъ одинаково соотвѣтствовать и полуоборотъ линіи BC по правую сторону линіи LM, и полуоборотъ линіи BC по лѣвую сторону LM. Слѣд. при такомъ расположеніи точекъ C', C'', около которыхъ вращаются линіи $B'C'$, $B''C''$, полный оборотъ линіи BC около точки C будетъ соотвѣтствовать движенію точки A отъ одного крайняго предѣла до другаго и возврату ея на прежнее мѣсто. При той значительной степени точности, которою обладаютъ параллелограммы разсматриваемаго вида, оказывается возможнымъ сдѣлать достаточно близкою къ прямой линіи всю дугу, проходимую точкою A при полномъ оборотѣ линіи BC около точки C. Этого мы достигаемъ, какъ показываютъ вычисленія, давая составнымъ частямъ параллелограмма размѣры, опредѣляемые такимъ образомъ:

«За единицу принимаемъ длину линій $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около точекъ C', C''; длина линіи $B'B'' = a$, сочлененной съ этими линіями, и $C'C'' = b$, разстояніе точекъ C', C'', выразятся такъ:

$$(3)\ldots\ldots\ldots\; a = \frac{1}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}\;;$$

$$(4)\ldots\ldots\ldots\; b = \frac{1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}\;;$$

гдѣ σ есть sinus-versus угла наклоненія линіи $B'B''$ къ линіи $C'C''$ въ крайнемъ положеніи параллелограмма; линіи CB, AB, BD и AD опредѣляются равенствомъ:

$$(5)\ldots\ldots\ldots\qquad BC = AB = BD = \frac{AD}{2} = \frac{1}{4}\,l,$$

гдѣ l длина хода точки A, которую найдемъ по формулѣ:

$$(6). \qquad l = a\sqrt{\frac{\frac{(\mu + \sigma)\sigma(2 - \sigma)}{(\lambda + 1)^2}}{\frac{}{2\lambda} - \sigma}},$$

полагая

$$(7). \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{b}{a}, \\ \mu &= \frac{4 - (a + d)^2}{2ab}. \end{aligned} \right.$$

Точка D, въ которой линія $B'B''$ сочленена съ линіею AD, берется на срединѣ линіи $B'B''$; а мѣсто точки C, около которой вращается линія BC, выбирается такъ, что въ среднемъ положеніи параллелограмма, когда линія $B'B''$ параллельна линіи $C'C''$, точка D совпадаетъ съ точкою C.

§ 8. Не трудно показать, что при такомъ устройствѣ разсматриваемаго нами параллелограмма отклоненія точки A отъ прямой линіи LM, во время полнаго оборота линіи BC около точки C, не будутъ превосходить предѣла

$$\frac{2\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

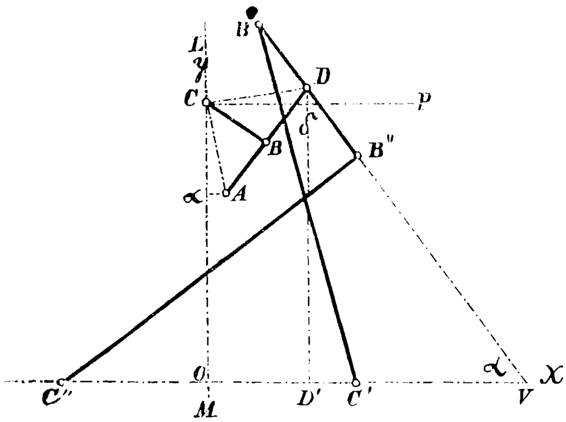
гдѣ M есть наибольшая величина, которой достигаютъ дроби

$$\frac{2\lambda\sigma + \mu + \frac{l^2}{a} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2(\mu + s)^2\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(2 - s)},$$

$$\frac{2\lambda\sigma + \mu + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu(\mu + s)\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)^2(2 - s)}$$

между $s = O$ и $s = \sigma$.

Фиг. 9.



Чтобы показать это мы сначала найдемъ формулы, опредѣляющія мѣсто точки D (фиг. 9) при различныхъ наклоненіяхъ линіи $B'B''$ къ $C'C''$. Для этого принимаемъ линію $C'C''$ за ось абсциссъ, линію LM за ось ординатъ; точка O, пересѣченіе этихъ линій, будетъ начало координатъ, и такъ какъ по вышесказанному точки C', C'' расположены симметрично около линіи LM, то

$$C'O = C''O$$

и слѣдовательно,

$$C'O = C''O = \frac{1}{2}\ C'C'' = \frac{1}{2}\ b.$$

Продолжая линію $B'B''$ до пересѣченія ея съ осью абсциссъ въ точкѣ V, мы замѣчаемъ, что координаты точки D по длинѣ линій DV и OV и углу $B'VC'' = \alpha$ выразятся такъ:

$$x = OV - DV\ Cos\ \alpha,$$
$$y = DV\ Sin\ \alpha.$$

Съ другой стороны мы замѣчаемъ, что

$$B'V = DV + DB';\quad B''V = DV - DB'';$$

$$C'V = OV - OC';\quad C''V = OV + OC'';$$

откуда по равенствамъ

$$DB' = DB'' = \frac{1}{2} B''B' = \frac{a}{2};$$

$$OC' = \frac{b}{2};\ OC'' = \frac{b}{2},$$

выводимъ

$$B'V = DV + \frac{a}{2};\ B''V = DV - \frac{a}{2};$$

$$C'V = OV - \frac{b}{2};\ C''V = OV + \frac{b}{2};$$

и такъ какъ длина линій $B'C'$, $B''C''$ принята нами за единицу, то изъ треугольниковъ $C'B'V$, $C''B''V$ имѣемъ

$$1 = \left(DV + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV - \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV + \frac{a}{2}\right)\left(OV - \frac{b}{2}\right) Cos\ \alpha,$$

$$1 = \left(DV - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV - \frac{a}{2}\right)\left(OV + \frac{b}{2}\right) Cos\ \alpha.$$

Рѣшая эти уравненія относительно величинъ DV и OV и полагая для сокращенія

$$1 - Cos\ \alpha = s,$$

$$\frac{b}{a} = \lambda;$$

$$\frac{4 - (a + b)^2}{2ab} = \mu,$$

находимъ

$$DV = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)s(2-s)}},$$

$$OV = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(\mu + s)\left(\frac{\lambda+1}{\lambda} - s\right)}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)s(2-s)}}.$$

Вносся эти величины DV и OV въ вышепоказанныя выраженія координатъ x, y точки D и замѣчая, что равенство

$$1 - \cos\alpha = s$$

даетъ

$$\cos\alpha = 1 - s, \quad \sin\alpha = \sqrt{s(2-s)},$$

получаемъ

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(\mu + s)s(2-s)}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$y = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Такъ выражаются координаты точки D по sinus-versus угла наклоненія линіи $B'B''$ къ линіи $C'C''$.

§ 9. Приступая къ опредѣленію уклоненій точки A отъ прямой LM, опускаемъ изъ точки A перпендикуляръ $A\alpha$ на линію LM: длина этого перпендикуляра представитъ уклоненіе точки A отъ линіи LM. Для опредѣленія этой длины опускаемъ изъ точки D перпендикуляръ DD' на ось абсциссъ, а изъ точки C возставляемъ перпендикуляръ CP къ оси ординатъ; линіи $C\delta, DD'$ будутъ координаты точки D, а потому на основаніи выведенныхъ нами въ § 8 выраженій x и y имѣемъ

$$C\delta = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(\mu + s)s(2-s)}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$DD' = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Дѣлая въ послѣднемъ изъ этихъ выраженій нулемъ величину $s = 1 - \operatorname{Cos}\alpha$, и замѣчая что это соотвѣтствуетъ тому случаю, когда линія $B'B''$ параллельна линіи $C'C''$, причемъ по § 7 точка D совпадаетъ съ точкою C, находимъ для опредѣленія линіи OC такую формулу:

$$OC = \frac{a}{2}(\lambda + 1)\sqrt{\frac{\mu}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}}} = \frac{a}{2}\sqrt{2\lambda\mu}.$$

Съ другой стороны, соединяя точки C и D прямою CD, а точки A и C прямою AC, замѣчаемъ, что по равенству линій (§ 7)

$$BC = AB = BD,$$

уголъ ACD прямой, а такъ какъ уголъ $\alpha C\delta$ по построенію тоже прямой, то прямоугольные треугольники $AC\alpha$, $DC\delta$ подобны, и слѣдовательно

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{D\delta}{CD},$$

что даетъ намъ

(8)........................... $$A\alpha = D\delta\,\frac{AC}{CD}.$$

Но $D\delta = DD' - D'\delta$, и $D'\delta = CO$; откуда, по внесеніи вышенайденныхъ величинъ CO, DD', получаемъ

$$D\delta = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}} - \frac{a}{2}\sqrt{2\lambda\mu}$$

или, что одно и тоже,

$$D\delta = \frac{a}{2}\,\frac{(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} - \sqrt{\mu\Big((\lambda+1)^2 - 2\lambda s\Big)}}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Умножая здѣсь числителя и знаменателя на сумму

$$(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu\Big((\lambda+1)^2 - 2\lambda s\Big)},$$

находимъ

$$D\delta = \frac{a}{2}\,\frac{(\lambda + 1 - s)^2(\mu + s) - \mu\Big((\lambda+1)^2 - 2\lambda s\Big)}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2} - s}\;\Big[(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu\Big((\lambda+1)^2 - 2\lambda s\Big)}\Big]},$$

что, по раскрытіи скобокъ въ числителѣ, приводится къ слѣдующему:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 + (\mu - 2\lambda - 2)\, s^2 + \left((\lambda + 1)^2 - 2\mu \right) s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}\left[(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu\left((\lambda+1)^2 - 2\lambda s\right)} \right]}.$$

Вносся же въ выраженія вспомогательныхъ величинъ λ и μ

$$\lambda = \frac{b}{a} \quad , \quad \mu = \frac{4 - (a+b)^2}{2ab}$$

значенія a и b по § 7, находимъ, что онѣ чрезъ σ выражаются такъ:

$$\lambda = 1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}\ ;$$

$$\mu = 4 - \sigma + 2\sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}\ ;$$

а потому

(9)
$$\mu - 2\lambda - 2 = -\sigma$$

$$(\lambda + 1)^2 - 2\mu = \frac{3}{16}\sigma^2,$$

и вышенайденное выраженіе $D\delta$ приводится къ такому виду:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16}\sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}\left[(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu\left((\lambda+1)^2 - 2\lambda s\right)} \right]}$$

Переходя ко второму множителю

$$\frac{AC}{CD}$$

выраженія $A\alpha$ по формулѣ (8), мы замѣчаемъ, что AC, какъ катетъ прямоугольнаго треугольника ACD, равенъ

$$\sqrt{AD^2 - CD^2};$$

а потому

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{AD^2 - CD^2}}{CD} = \sqrt{\frac{AD^2}{CD^2} - 1}.$$

Но по § 7

$$AD = \frac{1}{2} l\ ;$$

по построенію же

$$CD > C\delta,$$

гдѣ

$$C\delta = OD' = x.$$

Вслѣдствіе чего находимъ

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}{x^2} - 1};$$

откуда по внесеніи величины x, полученной въ § 8, имѣемъ

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{l^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)}{a^2(\mu+s)s(2-s)} - 1},$$

что иначе можно написать такъ:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right) - s(\mu+s)(2-s)}}{\sqrt{s(\mu+s)(2-s)}}.$$

Но по уравненію (6), опредѣляющему величину хода l, выраженіе

$$\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right) - s(\mu+s)(2-s)$$

обращается въ нуль при $s = \sigma$, что предполагаетъ дѣлимость этого выраженія на $s - \sigma$. Раскрывая скобки въ этомъ выраженіи и дѣля его на $s - \sigma$, мы находимъ частное

$$s^2 + (\mu + \sigma - 2)s - (\mu + \sigma - 2)\sigma - \frac{l^2}{a^2} - \mu,$$

гдѣ по (9)

$$\mu + \sigma - 2 = 2\lambda.$$

Вслѣдствіе чего это выраженіе можетъ быть замѣнено такимъ произведеніемъ двухъ множителей:

$$(\sigma - s)\left(\mu + 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2\right),$$

а потому вышепоказанное неравенство приводится къ такому виду:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma - s)\left(\mu + 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2\right)}}{\sqrt{s(\mu+s)(2-s)}}.$$

§ 10. Мы видѣли (§ 9), что $A\alpha$, уклоненіе точки A отъ прямой линіи LM, равняется произведенію

$$D\delta.\frac{AC}{CD},$$

гдѣ множитель $D\delta$ равенъ выраженію

$$\frac{\alpha}{2}\,\frac{s^3-\sigma s^2+\frac{3}{16}\sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s}\left[(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}+\sqrt{\mu(\lambda+1)^2-2\lambda s}\right]},$$

а множитель $\frac{AC}{CD}$ меньше

$$\frac{\sqrt{(\sigma-s)\left(\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2\right)}}{\sqrt{s(\mu+s)(2-s)}}.$$

Откуда видно, что $A\alpha$ будетъ меньше произведенія этихъ двухъ выраженій, а это произведеніе можетъ быть разложено на два такіе множителя:

$$\frac{\left(s^2-\sigma s+\frac{3}{16}\sigma^2\right)\sqrt{s(\sigma-s)}}{(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}+\sqrt{\mu\left((\lambda+1)^2-2\lambda s\right)}},$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)(2-s)}}.$$

Останавливаясь на первомъ изъ этихъ множителей, мы замѣчаемъ, что выраженіе

$$\left(s^2-\sigma s+\frac{3}{16}\sigma^2\right)\sqrt{s(\sigma-s)}$$

по возведенію въ квадратъ даетъ

$$-\left[s^6-3\sigma s^5+\frac{27}{8}\sigma^2 s^4-\frac{14}{8}\sigma^3 s^3+\frac{105}{256}\sigma^4 s^2-\frac{9}{256}\sigma^5 s\right],$$

гдѣ полиномъ, стоящій въ скобкахъ, равняется квадрату полинома

$$s^3-\frac{3}{2}\sigma s^2+\frac{9}{16}\sigma^2 s-\frac{1}{32}\sigma^3$$

безъ

$$\frac{\sigma^6}{32^2},$$

а потому это выраженіе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\sqrt{\frac{\sigma^6}{32^2} - \left(s^3 - \frac{3}{2}\sigma s^2 + \frac{9}{16}\sigma^2 s - \frac{1}{32}\sigma^3\right)^2}.$$

Откуда видно, что числовыя значенія этого выраженія не будутъ превосходить предѣла

$$\sqrt{\frac{\sigma^6}{32^2}} = \frac{\sigma^3}{32}.$$

Съ другой стороны мы замѣчаемъ, что въ этомъ множителѣ знаменатель

$$(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu\left((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s\right)}$$

будетъ больше удвоенной величины наименьшаго изъ двухъ членовъ

$$(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s}, \quad \sqrt{\mu\left((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s\right)},$$

его составляющихъ, и слѣд., будетъ больше наименьшей изъ двухъ величинъ

$$2(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s},$$

$$2\sqrt{\mu\left((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s\right)}.$$

А такъ какъ въ этомъ множителѣ, по замѣченному выше, числитель не превосходитъ предѣла

$$\frac{\sigma^3}{32},$$

то этотъ множитель будетъ меньше наибольшей изъ двухъ такихъ дробей:

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s}} = \frac{\sigma^3}{64(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s}},$$

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2\sqrt{\mu\left((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s\right)}} = \frac{\sigma^3}{64\sqrt{\mu\left((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s\right)}};$$

вслѣдствіе чего произведеніе этого множителя на второй множитель

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu + 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)(2 - s)}}$$

будетъ меньше наибольшаго изъ такихъ произведеній:

$$\frac{\sigma^3}{64\,(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)\,(2-s)}},$$

$$\frac{\sigma^3}{64\sqrt{\mu\left((\lambda+1)^2-2\lambda s\right)}}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)\,(2-s)}},$$

которыя приводятся къ слѣдующему:

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{(\lambda+1-s)^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)^2\,(2-s)}},$$

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{2\lambda\mu\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)^2(\mu+s)\,(2-s)}}.$$

А такъ какъ для s возможны только значенія отъ $s=0$ до $s=\sigma$, то наибольшая изъ этихъ двухъ величинъ не будетъ превосходить предѣла

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

гдѣ M означаетъ наибольшую величину, которой достигаютъ выраженія

$$\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{(\lambda+1-s)^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)^2\,(2-s)};$$

$$\frac{\mu+2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{2\lambda\mu\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)^2(\mu+s)\,(2-s)}$$

отъ $s=0$ до $s=\sigma$, и слѣдовательно, это будетъ предѣлъ значеній $A\alpha$, уклоненій точки A отъ прямой линіи LM, что и нужно было показать.

§ 11. Чтобы дать примѣръ употребленія выведенныхъ нами формулъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и показать сколь значительна степень точности, съ которою разсмотрѣнный нами параллелограммъ даетъ прямолинейное движеніе, мы возьмемъ

$$\sigma=1.$$

Дѣлая въ формулахъ (3) , (4), опредѣляющихъ a и b,

$$\sigma = 1,$$

находимъ

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{335}{64} + 7\sqrt{\frac{35}{64}}}} = 0,30992;$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{\frac{35}{16}}}{\sqrt{\frac{335}{64} + 7\sqrt{\frac{35}{64}}}} = 0,76831.$$

Вставляя эти величины a и b въ выраженія (7), опредѣляющія значеніе вспомогательныхъ количествъ λ, μ, находимъ:

$$\lambda = \frac{0,76831}{0,30992} = 2,47902,$$

$$\mu = \frac{4 - (0,30992 + 0,76831)^2}{2.\ 0,30992\ .\ 0,76831} = 5,95804.$$

При этихъ величинахъ λ, μ, a и $\sigma = 1$ формула (6), опредѣляющая длину хода l, даетъ:

$$l = 0,30992 \sqrt{\frac{(5,95804 + 1).1.(2 - 1)}{\frac{(2,470902 + 1)^2}{2.2,47902} - 1}} = 0,68099.$$

По величинѣ l равенства (5) намъ даютъ

$$BC = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$AB = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$BD = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$AD = \frac{0,68099}{2} = 0,34049.$$

Таковы должны быть размѣры различныхъ частей показаннаго нами параллелограмма, если за величину σ принимаемъ единицу.

Уклоненія отъ прямолинейнаго движенія въ такомъ параллелограммѣ по § 8 будутъ меньше

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

где M есть наибольшая величина, которой достигаютъ дроби

$$\frac{2\lambda\sigma + \mu + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s)^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(2 - s)},$$

$$\frac{2\lambda\sigma + \mu + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu (\mu + s)\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)^2 (2 - s)}$$

между $s = 0$ и $s = \sigma = 1$.

Внося въ выраженіе этихъ дробей величины σ, a, λ, μ, l и ограничиваясь двумя десятичными знаками, находимъ что онѣ равны

$$\frac{15{,}74 - 4{,}96\, s - s^2}{(3{,}48 - s)^2 (5{,}96 + s)^2 (2{,}44 - s)(2 - s)},$$

$$\frac{15{,}74 - 4{,}96\, s - s^2}{29{,}56\, (5{,}96 + s)(2{,}44 - s)^2 (2 - s)}.$$

Эти же дроби, какъ не трудно замѣтить *), идутъ постоянно возрастая отъ $s = 0$, до $s = 1$; а потому въ этихъ предѣлахъ, наибольшія ихъ величины будутъ при $s = 1$. Дѣлая

$$s = 1,$$

мы находимъ, что первая дробь приводится къ 0,0228, а вторая къ 0,0231. Послѣдняя величина, какъ бо́льшая, и будетъ наибольшею величиною, до которой достигаютъ такія дроби между $s = o$ и $s = 1$; и слѣд., по нашему знакоположенію

$$M = 0{,}0231.$$

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, разлагая полиномъ $15{,}74 - 4{,}96\, s - s^2$ на два множителя $(7{,}16 + s) \cdot (2{,}20 - s)$, мы замѣчаемъ, что эти дроби могутъ быть разложены на произведенія такихъ множителей:

$$\frac{7{,}16 + s}{2{,}44 - s} \cdot \frac{2{,}20 - s}{2 - s} \cdot \frac{1}{[(5{,}96 + s)(3{,}48 - s)]^2};$$

$$\frac{1}{29{,}56} \cdot \frac{7{,}16 + s}{2{,}44 - s} \cdot \frac{2{,}20 - s}{2 - s} \cdot \frac{1}{(5{,}96 + s)(2{,}44 - s)};$$

гдѣ всѣ множители отъ $s = o$, до $s = 1$ возрастаютъ, такъ какъ:

$$\frac{2{,}20 - s}{2 - s} = 1 + \frac{0{,}20}{2 - s};$$

$$\frac{1}{(5{,}96 + s)(3{,}48 - s)} = \frac{1}{20{,}74 - 2{,}48\, s - s^2}$$

$$\frac{1}{(5{,}96 + s)(2{,}44 - s)} = \frac{1}{14{,}75 - 3{,}48\, s - s^2}.$$

Вносяэту величину M и величины σ, a въ формулу

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

находимъ, что уклоненія отъ прямолинейнаго движенія въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ будутъ меньше

$$\frac{0{,}30992.1^3}{128}\sqrt{0{,}0231} = 0{,}00038,$$

что не составляетъ и 0.00051 длины хода $l = 0{,}68099$, между тѣмъ какъ въ параллелограммѣ Ватта, бывшемъ предметомъ изслѣдованій Прони (Annales des mines Tome XII), эти уклоненія превосходятъ 0,00060 длины хода *).

Изъ этого видно, что такой параллелограммъ, доставляя непосредственно преобразованіе попеременнаго прямолинейнаго движенія въ постоянное круговое, можетъ замѣнить собою въ паровыхъ машинахъ и параллелограммы нынѣ употребляемые и мотыль съ шатуномъ. Замѣтимъ въ заключеніе, что при этомъ отношеніе скоростей оказывается такимъ, какое можетъ дать мотыль только при длинѣ безконечно большой.

---

*) Съ уменьшеніемъ σ, предѣлъ этихъ уклоненій быстро уменьшается. Такъ, при $\sigma = \frac{4}{5}$, когда $a = 0{,}29533$, $b = 0{,}76415$, $l = 0{,}59676$, этотъ предѣлъ меньше 0,00014; а при $\sigma = \frac{2}{3}$, когда $a = 0{,}28648$, $b = 0{,}76175$, $l = 0{,}53716$, этотъ предѣлъ меньше 0,00007.

П. Чебышевъ.