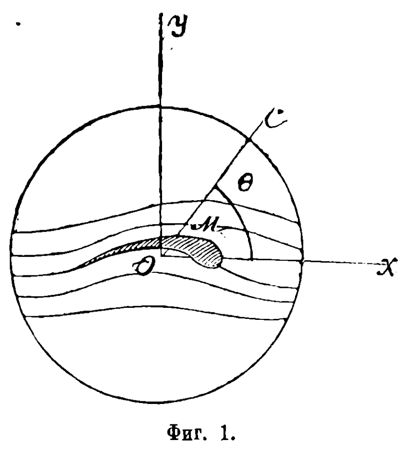
ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДАВЛЕНІЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА КОНТУРЪ, КОТОРЫЙ ВЪ ПРЕДѢЛѢ ПЕРЕХОДИТЪ ВЪ ОТРѢЗОКЪ ПРЯМОЙ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Сообщено въ Математическомъ Обществѣ 1911 марта 15).

§ 1. Въ моей статьѣ «Geometrische Untersuchungen über die Kutta'sche Strömung» я указалъ два контура, которые обтекаются плоскопарареллельнымъ потокомъ жидкости безъ образованія безконечно большихъ скоростей и въ предѣлѣ приближаются: одинъ къ дугѣ круга, а другой къ отрѣзку прямой[1]). Въ этой замѣткѣ я даю опредѣленіе центра давленія потока для второго изъ упомянутыхъ контуровъ.



Фиг. 1.

§ 2. Пусть имѣемъ (фиг. 1) плоскопараллельный потокъ жидкости, текущей въ безконечности со скоростью w и обтекающей нѣкоторый контуръ, при чемъ циркуляція скорости по этому контуру имѣетъ конечную величину J. Назовемъ черезъ L сумму моментовъ относительно центра O силъ давленія жидкости на разсматриваемый контуръ M

[1]) Труды отдѣленія физическихъ наукъ О. Л. Е. Т. 15 вып. 1.

(на часть цилиндрической поверхности тѣла, имѣющую длину, равную единицѣ, по направленію, перпендикулярному чертёжу) и проведемъ изъ центра O окружность весьма большимъ радіусомъ R. Напишемъ, что моментъ $(-L)$ равенъ суммѣ моментовъ количествъ движенія жидкости, протекающей въ единицу времени черезъ всѣ элементы начертанной окружности (массы втекающей жидкости надо брать со знакомъ $(-)$). Получимъ:

$$-L=\rho\int_0^{2\pi}\frac{ux+vy}{R}\,\frac{uy-vx}{R}\,R^2d\theta$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}(ux+vy)(uy-vx)\;d\theta, \tag{1}$$

гдѣ u и v компоненты скорости, а θ уголъ радіуса вектора R съ осью Ox, отсчитываемый противъ стрѣлки часовъ.

Предположимъ, что потокъ жидкости характеризуется функціею мнимаго перемѣннаго $z=x+yi$ слѣдующаго вида:

$$F(z)=\varphi+\psi i,$$

гдѣ φ потенціалъ скоростей, а ψ функція тока.

Мы имѣемъ:

$$\frac{dF}{dz}=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}i=u-vi \tag{2}$$

Составляемъ произведеніе:

$$z\frac{dF}{dz}=ux+vy+(uy-vx)i$$

и возводимъ его въ квадратъ:

$$z^2\left(\frac{dF}{dz}\right)^2=[(ux+vy)^2-(uy-vx)^2]+2i(ux+vy)(uy-vx).$$

Отсюда видно, что

$$(ux+vy)(uy-vx)=\text{д. ч.}\left[\frac{1}{2i}z^2\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]. \qquad (3)$$

Съ другой стороны, для всякой точки C окружности радіуса R имѣемъ:

$$z=R(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$dz=R(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta,$$

$$d\theta=\frac{dz}{R(-\sin\theta+i\cos\theta)}=\frac{dz}{iz}. \qquad (4)$$

Подстановка выраженій (4) и (3) въ форм. (1) даетъ намъ:

$$L=\text{д. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\int\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 zdz\right] \qquad (5)$$

гдѣ интеграція распространяется на окружность весьма большого радіуса R.

Если разсматриваемый плоскопараллельный потокъ получается съ помощію конформнаго преобразованія

$$\zeta=\chi(z) \qquad (6)$$

изъ другого болѣе простого потока, при чемъ въ безконечности

$$z=(\lambda+\mu i)\,\zeta \qquad (6')$$

и скорость w' новаго потока по скорости скораго выражается формулою:

$$w'=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,w, \qquad (7)$$

то удобно форм. (5) приложить сначала къ плоскости мнимаго перемѣннаго ζ и написать:

$$L=\text{д. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\int\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2\zeta d\zeta\right],$$

гдѣ интеграція ведется по окружности весьма большого круга, проведеннаго изъ тока O на плоскости мнимаго перемѣннаго ζ. Потомъ слѣдуетъ перейти къ плоскости мнимаго перемѣннаго z, при чемъ оси xOy считать совмѣщенными съ осями $\xi O\eta$. Безконечному кругу на плоскости перемѣннаго ζ будетъ, въ силу соотношенія (6′), соотвѣтствовать тоже безконечно большой кругъ. Мы получимъ формулу:

$$L = \text{д. ч.}\left[\ \frac{\rho}{2}\int\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 \frac{\zeta}{\frac{d\zeta}{dz}}\,dz\right]. \tag{8}$$

Формулы (5) и (8) сводятся къ формуламъ, выведеннымъ нѣсколько инымъ способомъ профессоромъ С. А. Чаплыгинымъ[1]), только у него интеграція ведется не по окружности безконечно большого круга, а по контуру обтекаемаго тѣла, что разумѣется, даетъ одинъ и тотъ же результатъ, когда въ потокѣ жидкости нѣтъ точекъ съ безконечно большими скоростями.

§ 3. Разсмотримъ конформное преобразованіе

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right), \tag{9}$$

которое даетъ:

$$\xi + \eta i = \frac{1}{2}\left[\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta\right],$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

При этомъ преобразованьи всѣ точки, лежащія на кругахъ $r = r_0$ и на прямыхъ $\theta = \theta_0$, будутъ лежать на софокусныхъ

---

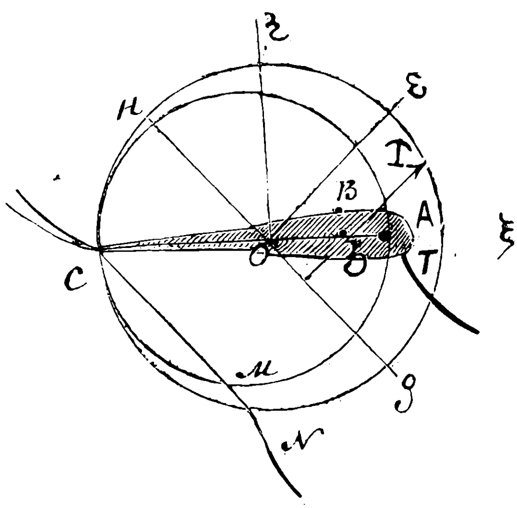
1) Математическій Сборникъ Т. 28. „О давленіи плоскопараллельнаго потока на преграждающія тѣла“, форм. 52, 53.

эллипсахъ и гиперболахъ съ фокуснымъ разстояніемъ $2a$:

$$\begin{gathered}
\frac{\xi^2}{\frac{1}{4}\left(r_0+\frac{a^2}{r_0}\right)^2}+\frac{\xi^2}{\frac{1}{4}\left(r_0-\frac{a^2}{r_0}\right)^2}=1, \\
\frac{\xi^2}{a^2\cos^2\theta_0}-\frac{\xi^2}{a^2\sin^2\theta_0}=1.
\end{gathered} \tag{11}$$

Пространство плоскости мнимаго перемѣннаго z, ограниченное окружностью радіуса a и безконечно большимъ кругомъ, преобразуется въ пространство, ограниченное отрѣзкомъ прямой $2a$, соединяющимъ фокусы, и безконечно большимъ кругомъ.

Предположимъ (фиг. 2), что къ окружности радіуса a прикасается въ точкѣ C на оси $O\xi$ другая окружность большаго радіуса b и построимъ ея изображеніе въ разсматриваемомъ конформномъ преобразованіи на плоскости мнимаго перемѣннаго ζ. При этомъ каждой точки E, имѣющей радіусъ векторъ r и уголъ θ, мы будемъ строить соотвѣтственную точку B, съ помощію формулъ (10).



Фиг. 2.

Мы получимъ контуръ вида CBT, заключающій внутри себя фокальное разстояніе CA. Въ точкѣ C кривыя, ограничивающія найденный контуръ, прикасаются къ оси $O\xi$, такъ какъ для этой точки по фор. (10) найдемъ:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=0.$$

Вообразимъ теперь, что окружность радіуса b обтекается потокомъ, текущимъ въ безконечности со скоростью w подъ угломъ $\beta = \angle go\xi$ навстрѣчу оси 0ξ и дающимъ по контурамъ, охватывающимъ эту окружность циркуляцію скорости J, положительную въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки. При этомъ величина J такова, что точка C, вмѣстѣ съ другой точкой N на окружности радіуса b, обращаются въ критическія точки нулевой скорости. Хорда CN будетъ параллельна діаметру GH, идущему въ направленіи потока, т. е. образующему уголъ β съ осью 0ξ.

Если бы не было циркуляціи, то скорость жидкости въ точкѣ C была бы, какъ извѣстно, $2w \sin\beta$ и была бы направлена по стрѣлкѣ часовъ. Отъ эффекта циркуляціи получается во всѣхъ точкахъ окружности радіуса b скорость $\frac{J}{2\pi b}$, направленная въ сторону обратную движенію стрѣлки часовъ. Для того, чтобы точка C не имѣла скорости, надо положить:

$$\frac{J}{2\pi b} = 2w\sin\beta. \tag{12}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$J = 4\pi bw\sin\beta. \tag{13}$$

Если подвергнуть разсматриваемый потокъ жидкости конформному преобразованію, характеризуемому форм. (9), то получимъ по плоскости перемѣннаго ζ потокъ, обтекающій контуръ CBT, при чемъ точка T, являющаяся изображеніемъ точки N будетъ такъ же, какъ и точка N, критическою точкою нулевой скорости; что же касается точки C, то она для новаго потока не будетъ критическою точкою нулевой скорости, и въ ней скорость жидкости будетъ конечна. Это видно по форм. (2). Мы можемъ для непреобразованнаго потока написать извѣстное выраженіе:

$$u - vi = \frac{dF}{dz} = -w\,\frac{(z+a)(z-n)}{z^2}(\cos\beta + i\sin\beta), \tag{14}$$

въ которомъ n есть комплексная мнимая величина соотвѣтствующая точкѣ N.

Въ безконечности имѣемъ:

$$u = -w\cos\beta,\ v = w\sin\beta,$$

а въ точкахъ N и C имѣемъ:

$$u = v = 0.$$

При переходѣ къ преобразованному потоку на плоскости мнимаго перемѣннаго ζ получимъ компоненты скорости u' и v', опредѣляемыя формулою:

$$u' - v'i = \frac{dF}{dz} : \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\frac{2w(z+a)(n-z)}{z^2}(\cos\beta + i\sin\beta)}{1 - \frac{a^2}{z^2}}. \tag{15}$$

Для безконечной дали преобразованный потокъ даетъ скорости

$$\left.\begin{aligned} u' &= -2w\cos\beta, \\ v' &= 2w\sin\beta, \\ w' &= 2w. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Въ точкахъ T и C, въ которыя на плоскости ζ преобразуются точки N и C плоскости z будемъ имѣть: для первой точки

$$u' = v' = 0;$$

для второй точки

$$u' - v'i = -w\frac{(a + ON(\cos\beta' - i\sin\beta'))(\cos\beta + i\sin\beta)}{a},$$

гдѣ $\beta' = \angle NO\xi$.

Изъ написанной формулы получаемъ:

$$v' = -w\frac{[a\sin\beta - ON\sin(\beta' - \beta)]}{a} = 0$$

$$u' = -w\frac{[a\cos\beta + ON\cos(\beta' - \beta)]}{a} = -w\frac{CN}{a} = -2w\sin\beta.$$

Такимъ образомъ вся скорость въ точкѣ C для преобразованнаго потока направлена по оси $O\xi$ и имѣетъ на основанiи форм. (16) величину:

$$u' = -w' \sin\beta. \tag{17}$$

Силу P давленiя потока на тѣло будемъ опредѣлять по данной мною общей теоремѣ [1]), согласно которой для опредѣленiя силы P надо умножить векторъ, представляющiй скорость потока въ безконечности, на плотность жидкости и циркуляцiю скорости и повернуть на прямой уголъ въ томъ направленiи, въ которомъ циркуляцiя положительна. Для потока обтекающаго контуръ CBT будемъ имѣть:

$$P = \rho w' J'.$$

Такъ какъ циркуляцiя въ данномъ и въ преобразованномъ потокѣ остается одна и та же, то $J' = J$. Вслѣдствiе этого изъ форм. (12) и (16) получаемъ:

$$P = 2\pi\rho b w'^2 \sin\beta = \pi\rho f w'^2 \sin\beta, \tag{18}$$

гдѣ $f = 2b$ есть площадь единицы длины плоской пластинки при глубинѣ $2b$.

§ 4. Переходимъ къ опредѣленiю точки приложенiя найденной силы. Для этого пользуемся формулами (8) и (14), изъ которыхъ найдемъ:

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 \frac{\zeta}{\frac{d\zeta}{d\xi}} = \frac{w^2(\cos 2\beta + i \sin 2\beta)(z+a)(z-n)^2(z^2+a^2)}{z^3(z-a)}$$

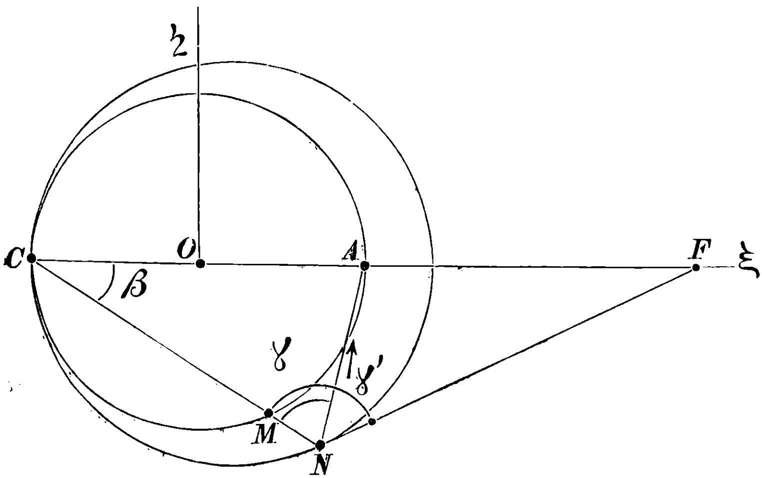
$$= w^2(\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\left\{z + 2(a-n) + \frac{(a-n)(3a-n)}{z-a} + \dots\right\}, \tag{19}$$

гдѣ ненаписанные члены порядка малости выше $\frac{1}{R}$ могутъ быть отброшены.

---

[1]) Труды отдѣленiя физическихъ наукъ О. Л. Е. Т. 15 вып. 1.

Подстановка формулы (19) въ выраженіе (8) приводитъ насъ къ слѣдующей величинѣ момента L силъ давленія на



Фиг. 3.

пластинку CBT относительно центра моментовъ O:

$$L = \text{д. ч.}\left[\frac{\rho}{2} w^2 (a - n)(3a - n)(\cos 2\beta + i \sin 2\beta) \int \frac{dz}{(z - a)}\right]$$

$$= \text{д. ч.}\left[\pi \rho w^2 i (a - n)(3a - n)(\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\right]. \qquad (20)$$

Сюда слѣдуетъ на основаніи фиг. 3 подставить такія величины:

$$a - n = NAe^{(\pi - \gamma - \beta)i}$$

$$3a - n = NFe^{(\pi - \gamma' - \beta)i},$$

$$\cos 2\beta + i \sin 2\beta = e^{2\beta i}.$$

Произведеніе этихъ величинъ даетъ намъ:

$$NA . NTe^{(2\pi - (\gamma + \gamma'))i}.$$

Если b близокъ къ a и точка N приближается къ M, то γ приближается къ $\frac{\pi}{2}$, и мы получаемъ:

$$2\pi - (\gamma + \gamma') = \pi - \mu,$$

гдѣ $\mu=\angle ANF$. Величина L въ форм. (20) получаетъ такое значеніе:

$$L=-\pi\rho w^2 2a\sin\beta NF\sin\mu=$$
$$=-\pi\rho w^2 4a^2\sin\beta\cos\beta.$$

Но такъ какъ $w'=2w$, то

$$L=-\pi\rho w'^2 a^2\sin\beta\cos\beta \tag{21}$$

Преобразуя это выраженіе по форм. (18), находимъ

$$L=-\frac{Pa\cos\beta}{2}. \tag{22}$$

Эта формула показываетъ (фиг. 2), что точкою приложенія силы P на оси симметріи $O\xi$ разсматриваемаго контура является точка S, независящая отъ угла β и отстоящая отъ A на разстояніи одной четверти всей длины CA. Этотъ результатъ совпадаетъ съ тѣмъ, который указываетъ Кутта [1]. То обстоятельство, что форма, данная на (фиг. 2) имѣетъ постоянный центръ давленія (на практикѣ это оправдывается только для небольшихъ угловъ β) указываетъ на удобное примѣненіе этой формы при устройствѣ рулей.

[1]) Kutta „Über eine mit dem Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimentionale Strömung“. München 1910.

Отдѣльный оттискъ изъ Математическаго Сборника, Т. XXVIII, в. I.

Москва. Типографія Императорскаго Московскаго Университета. 1911.