Библіотека ИМПЕРАТОРСКАГО Московскаго Техническаго училища

Б $\frac{I}{28}$

КЪ ВОПРОСУ О ДВИЖЕНІИ МАТЕРЬЯЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОДЪ ПРИТЯЖЕНІЕМЪ ОДНОГО И ДВУХЪ ЦЕНТРОВЪ.

Н. Жуковскій.

1. Въ этой замѣткѣ я предлагаю весьма простой способъ изслѣдованія движенія матерьяльной точки подъ притяженіемъ одного и двухъ центровъ, основанный на выраженіи радіуса кривизны коническихъ сѣченій чрезъ радіусы векторы.

Пусть m и n будутъ двѣ безконечно близкія точки эллипса. Соединяемъ ихъ съ фокусами f и f_1 и проводимъ нормали mo и no, которыя раздѣлятъ углы между радіусами векторами пополамъ. Назовемъ чрезъ θ безконечно малый уголъ между этими нормалями и чрезъ α и β—безконечно малые углы между радіусами векторами при вершинахъ f и f_1. Изъ чертежа имѣемъ:

$$\angle onf + \theta = \angle omf + \alpha$$
$$\angle omf_1 + \theta = \angle onf_1 + \beta.$$

Складываемъ и сокращаемъ

$$2\theta = \alpha + \beta.$$

Назовемъ радіусъ кривизны mo чрезъ ρ, радіусы век-

Р 13373

торы fm и f_1m—чрезъ и r и r_1, элементъ дуги mn—чрезъ σ и уголъ касательной съ радіусами векторами—чрезъ φ. Получимъ изъ чертежа, обращая вниманіе на безконечно малые треугольники mpn и mqn,

$$\theta = \frac{\sigma}{\rho}, \ \alpha = \frac{\sigma sn\varphi}{r}, \ \beta = \frac{\sigma sn\varphi}{r_1}.$$

Подставляемъ и сокращаемъ на σ

$$\frac{2}{\rho} = sn\varphi\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right). \qquad (1)$$

Это и есть искомое выраженіе радіуса кривизны эллипса чрезъ радіусы векторы. Въ случаѣ параболы надо положить $r_1 = \infty$; въ случаѣ же гиперболы увидимъ, повторяя для нея предыдущій выводъ, что надо будетъ взять въ формулѣ (1) большій радіусъ векторъ r_1 съ отрицательнымъ знакомъ.

2. Положимъ, что матерьяльная точка движется подъ притяженіемъ центра f силою

$$P = \frac{\mu}{r^2},$$

гдѣ r разстояніе точки отъ центра, а μ коэффиціентъ притяженія. Принимая массу точки равной единицѣ, опредѣляемъ ея скорость по теоремѣ живыхъ силъ

$$v^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right). \qquad (2)$$

Здѣсь постоянное h выражается чрезъ начальную скорость v_0 и начальное разстояніе r_0

$$h = \frac{v_0{}^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}. \qquad (3)$$

Опредѣливъ скорость по формулѣ (2), мы будемъ имѣть для опредѣленія траэкторіи единственное условіе, что центробѣжная сила равна центростремительной. Посмотримъ, не можетъ ли въ нашемъ случаѣ траэкторія быть коническимъ сѣченіемъ, имѣющимъ фокусъ въ точкѣ f. Проэкція силы P на нормаль будетъ

$$\frac{\mu}{r^2}\, sn\varphi,$$

гдѣ φ есть уголъ между радіусомъ r и касательной къ траэкторіи, а центробѣжная сила на основаніи фор. (2) и (1) будетъ

$$\frac{v^2}{\rho} = \left(\frac{\mu}{r} + h\right)\, sn\varphi \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}\right).$$

Сравниваемъ и сокращаемъ на $sn\varphi$

$$\left(\frac{\mu}{r} + h\right)\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}\right) = \frac{\mu}{r^2}, \qquad (4)$$

откуда

$$h = \mp \frac{\mu}{r' \pm r} = \mp \frac{\mu}{2a}\,. \qquad (5)$$

Здѣсь верхній знакъ имѣетъ мѣсто для эллипсовъ, а нижній для гиперболъ; a есть большая полуось эллипса или дѣйствительная полуось гиперболы. Формула (5) показываетъ, что при h отрицательномъ мы удовлетворимъ уравненію (4), принимая за траэкторію эллипсъ и опредѣляя его большую полуось изъ фор. (5); въ случаѣ $h = o$ мы удовлетворимъ урав. (4), принимая за траэкторію параболу, т. е. полагая $r' = \infty$; въ случаѣ же h положительнаго мы удовлетворимъ равенству центробѣжной и центростремительной силы, принявъ за траэкторію гиперболу и опредѣливъ ея дѣйствительную полуось изъ фор. (5). Всякій разъ, какъ намъ будутъ даны r_0 и v_0, мы опредѣлимъ по формулѣ (3) видъ траэкторіи; далѣе въ случаѣ эллипса и гиперболы опредѣлимъ по фор. (5) полуось a. По этимъ даннымъ и по условію, что траэкторія должна проходить чрезъ начальное положеніе точки и должна коснуться къ начальной скорости, она вполнѣ опредѣляется.

Разсмотримъ еще случай отталкивательной силы. Предположимъ, что эта сила имѣетъ центръ въ фокусѣ f', и попробуемъ, не можетъ ли быть траэкторіею вѣтвь гиперболы, для которой фокусъ f' есть внѣшній. Такъ какъ коэффиціентъ μ въ уравненіи живыхъ силъ надо будетъ взять со знакомъ минусъ, то фор. (3) и (4) примутъ для нашего случая видъ:

$$h = \frac{v_0{}^2}{2} + \frac{\mu}{r'_0}, \qquad (6)$$

$$\left(-\frac{\mu}{r'} + h\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{\mu}{r'^2}. \qquad (7)$$

Изъ фор. (7) находимъ:

$$h = \frac{\mu}{r'-r} = \frac{\mu}{2a}. \qquad (8)$$

Такъ какъ по фор. (6) величина h всегда положительна, то мы для всякихъ начальныхъ значеній v_0 и r'_0 можемъ изъ фор. (8) опредѣлить дѣйствительную полуось гиперболы a. Далѣе останется только выбрать эту гиперболу такъ, чтобы она прошла чрезъ начальное положеніе точки и коснулась ея начальной скорости. Такимъ образомъ въ случаѣ отталкивательной силы траэкторіи всегда бываютъ гиперболы.

3. Переходимъ къ задачѣ о движеніи матерьяльной точки подъ притяженіемъ двухъ центровъ. Предполагая, что эти центры помѣщены въ точкахъ f и f_1, разстоянія которыхъ отъ движущейся точки суть r и r', выразимъ силы притяженія формулами:

$$P = \frac{\mu}{r^2},\ P' = \frac{\mu'}{r'^2}.$$

Опредѣляемъ скорость движенія по теоремѣ живыхъ силъ, принимая массу точки за единицу

$$v^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} + h\right). \qquad (9)$$

Постоянное h выражается по начальному положенію и начальной скорости

$$h = \frac{v_0^{\,2}}{2} - \frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu'}{r_0'}. \qquad (10)$$

Когда скорость движенія удовлетворяетъ фор. (9), то единственное условіе, которому останется удовлетворить при выборѣ траэкторіи, состоитъ въ равенствѣ центробѣжной и центростремительной силы. Посмотримъ, не можемъ ли мы удовлетворить этому условію, принимая за траэкторію коническое сѣченіе съ фокусами f и f_1.

Составляя центробѣжную силу по фор. (9) и (1) и приравнивая ее центростремительной силѣ, найдемъ:

$$\left(\frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} + h\right)\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}\right) = \frac{\mu}{r^2} \pm \frac{\mu'}{r'^2}, \qquad (11)$$

гдѣ верхній знакъ имѣетъ мѣсто для эллипсовъ, а нижній для гиперболъ.

Опредѣляемъ h

$$h = -\frac{\mu' \pm \mu}{r' \pm r} = -\frac{\mu' \pm \mu}{2a}. \qquad (12)$$

Формулы (10) и 12) даютъ намъ условія, при которыхъ матерьяльная точка, притягиваемая къ центрамъ f и f_1, можетъ двигаться по эллипсамъ или гиперболамъ, имѣющимъ въ этихъ центрахъ фокусы.

Проводимъ чрезъ начальное положеніе точки эллипсъ, имѣющій фокусы въ точкахъ f и f_1, и опредѣляемъ его полуось a. Эта величина должна быть одинакова съ тою, которая получается изъ фор. (10) и (12). Кромѣ того построенный нами эллипсъ долженъ прикасаться начальной скорости v_0. Если всѣ эти условія удовлетворены, то найденный эллипсъ будетъ траэкторіей точки. Также разрѣшаемъ вопросъ и относительно гиперболической траэкторіи.

БИБЛІОТЕКА
Московскаго
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

Изданіе Императорскаго Московск. Общества Испытателей Природы.

Москва. 1881. Въ Университетской типографіи (М. Катковъ), на Страстномъ бульварѣ.