ЖУКОВСКИЙ, Н. Е. проф.

ЗАМЕТКА ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва — 1923

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Р. С. Ф. С. Р.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ В. С. Н. Х.

КОМИТЕТ ПО УВЕКОВЕЧЕНИЮ ПАМЯТИ Н. Е. ЖУКОВСКОГО.

В. Серия 7. НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА. № XIII—1

ЖУКОВСКИЙ, Н. Е.

ЗАМЕТКА ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО.
Москва—1923.

Основная редакционная работа произведена преподавателем В. М. Т. У.
Н. Г. Тенцовым.

Комитет по увековечению
памяти *Н. Е. Жуковского.*

Главлит № 4328. Москва. Напеч. 3.000 экз.

„Мосполиграф.". 1-я Образцовая типография, Пятницкая, 71.

Заметка по вариационному исчислению.

(Сообщено в Московском Математическом Обществе 1915 г. марта 31).

1. В 1879 году была напечатана мною в Математическом Сборнике статья «О начале наименьшего действия»[1]), в которой доказывается, что интегралы, выражающие действие в форме Лагранжа

$$\int_0^t 2\,T dt$$

и в форме Гамильтона

$$\int_0^t (T+U)\,dt\,,$$

имеют между двумя неизменными конфигурациями системы при действительном движении сильный minimum сравнительно со всякими движениями, которые для первого случая должны удовлетворять теореме живых сил, а для второго должны быть одновременными. Прием доказательства, которым я тогда пользовался, может быть распространен на различные виды подъинтегральных функций и с большою простотою дает результаты, полученные при современном развитии вариационного исчисления, опирающемся на методы Вейерштрасса и Гильберта[2]).

Я вывожу здесь моим способом эти результаты, останавливаясь на случае, когда подъинтегральная функция зависит только от одной неизвестной функции и ее первой производной.

---

[1]) Математический Сборник. Т. IX, также сочинения Н. Е. Жуковского. М. 1912. Т. I, стр. 171—178.

[2]) См. сочинение Н. П. Гернет „Об основной простейшей задаче вариационного исчисления“. С.-Петербург. 1913 г.

2. Вариация интеграла

$$V = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

при слабом варьировании выражается формулою:

$$\delta V = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y\, dx + \left[F\left(y_1'\right) - y_1' \frac{\partial F}{\partial y_1'} \right] \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1'} \delta y_1 -$$

$$- \left[F(y_0') - y_0' \frac{\partial F}{\partial y_0'} \right] \delta x_0 - \frac{\partial F}{\partial y_0'} \delta y_0 ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

где члены вне знака интеграла зависят от вариаций δx_1, δy_1 δx_0, δy_0 концов рассматриваемой линии, а y_1' и y_0' тангенсы углов наклонения этих концов к оси ox.

Интегрируя дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

мы получим линии, называемые **экстремалями**, которые зависят от двух произвольных параметров, а, устанавливая между этими параметрами связь, найдем однопараметренное семейство экстремальных линий. Каждому такому семейству экстремалей соответствует семейство **эквидистантных** линий, которые удовлетворяют дифференциальному ур-ию

$$\left(F - p\frac{\partial F}{\partial p}\right) dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

при чем вместо y' в функцию F формулы (4) подставлена функция p, представляющая тангенс угла касательной с осью ox рассматриваемого семейства экстремалей, выраженный в функции x, y. Легко усмотреть, что левая часть форм. (4) является всегда полным дифференциалом. Действительно, условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[F - p\,\frac{\partial F}{\partial p}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)$$

приводит нас к уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial p} - p\,\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y} - p\,\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x},$$

или: $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y}\, p + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial y}\, p + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right),$$

которое удовлетворяется на основании ур. (3).

Интеграл уравнения (4) с одною произвольною постоянною и дает нам семейство эквидистантных линий.

Предполагая, что в формуле (1) сравниваются экстремали некоторого семейства, начала которых (x_0, y_0) лежат на одной эквидистантной линии, и заменяя y' на p, найдем, что

$$\delta V = \left[F(p_1) - p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1}\right] \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right) \delta y_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

В частности, когда все экстремали выходят из одного полюса, мы будем принимать эту точку за начало сравниваемых экстремалей и полагать $\delta x_0 = \delta y_0 = O$.

Если концы рассматриваемых экстремалей лежат тоже на эквидистантной линии, то

$$\left[F(p_1) - p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1}\right] \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right) \delta y_1 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

и

$$\delta V = O\,.$$

Уравнение эквидистантных линий представится при этом в виде

$$V = \text{const}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

так что сами эти линии можно рассматривать как линии равного значения интеграла V. (В моем вышеупомянутом сочинении эти линии называются линиями равного действия).

Еслибы конец экстремали переместился по эквидистантной кривой, а координаты ее начала имели вариации δx_0, δy_0, то

$$\delta V = -\left\{\left[F(p_0) - p_0 \frac{\partial F}{\partial p_0}\right] \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial p_0} \quad \delta y_0\right]\right\} . \; . \; . \; . \; (7')$$

Предполагаем, что все начала экстремалей прикасаются к одной и той же линии, которая является огибающей рассматриваемого семейства экстремалей и называется **пограничной кривой**. Тогда, так как для пограничной кривой $\frac{\delta y_0}{\delta x_0} = y'_0 = p_0$, форм. (7') принимает вид:

$$\delta V = -F\left(y'_0\right) \delta x_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7'')$$

3. Условившись обозначать чрез

$$V = (a,b)$$

интеграл, данный формулой (1), взятый по кривой (ab), докажем следующую основную теорему нашего изложения (фиг. 1).

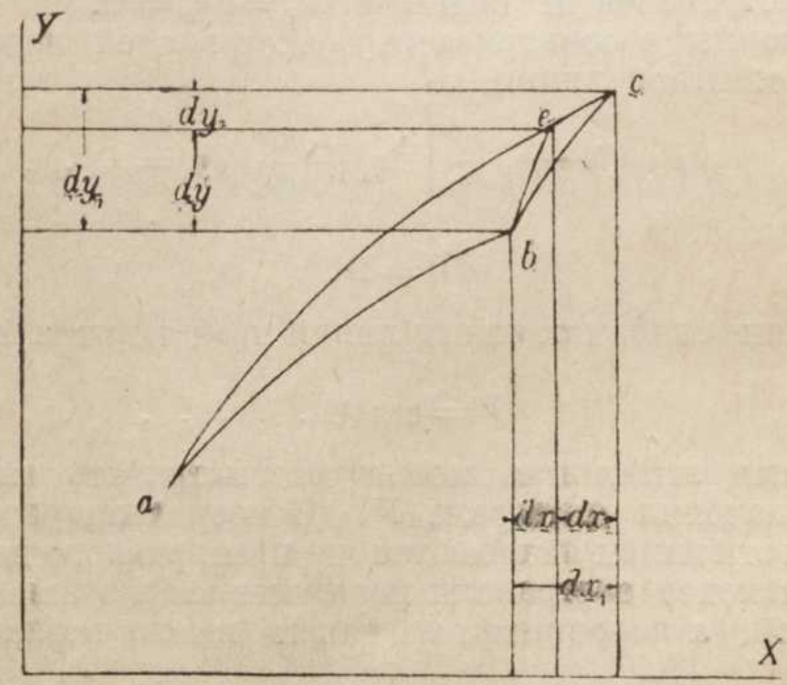
Теорема I. Для двух бесконечно близких экстремалей ab и ac, выходящих из полюса a, концы которых соединены элементом дуги bc, имеет место равенство:

$$(bc) + (ab) - (ac) = \left\{F(y') - F(p) - \frac{\partial F(p)}{\partial p}(y' - p)\right\} dx_1 \; . \; . \; (8)$$

Здесь y' есть тангенс угла наклонения касательной к элементу bc с осью ox, а p тангенс угла наклонения к оси ox экстремали в точке b. Вторая часть равенства представляет помноженную на dx_1 известную функцию Вейерштраса

$$E = F(y') - F(p) - \frac{\partial F(p)}{\partial p}(y' - p) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Для доказательства проведем чрез точку b эквидистантную



Фиг. 1.

линию be и отнесем к ее элементу (be) уравнение (4). Согласно фиг. (1) мы можем подставить в это уравнение

$$dx = dx_1 - dx_2,$$
$$dy = y'dx_1 - pdx_2.$$

Получим:

$$\left[F(p) - p\,\frac{\partial F}{\partial p}\right](dx_1 - dx_2) + \frac{\partial F}{\partial p}(y'dx_1 - pdx_2) = 0\,,$$

или

$$\left[F(p) + (y' - p)\,\frac{\partial F}{\partial p}\right] dx_1 - F(p)\,dx_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

С другой стороны, из чертежа видно, что

$$(bc) = F(y')\,dx_1\,,$$

$$(ac) - (ab) = (ec) = F(p)\,dx_2\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

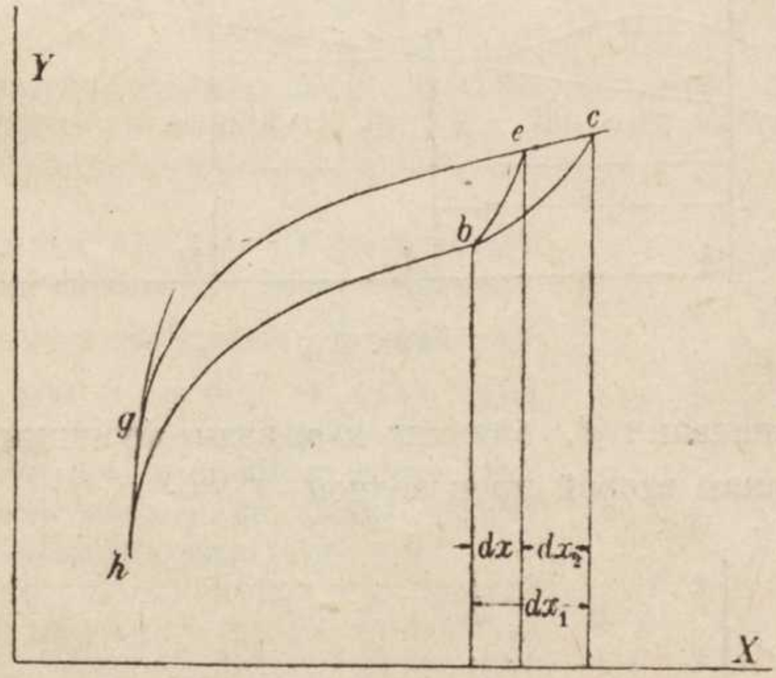
вследствие чего

$$(bc) + (ab) - (ac) = F(y')\,dx_1 - F(p)\,dx_2 \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

Вычитая из второй части формулы (12) первую часть формулы (10), получим формулу (8). Желаемое, таким образом, доказано.

Данная теорема имела бы место и в том случае, если бы начала рассмотренных экстремалей не находились бы в одном полюсе, а лежали бы на одной и той же эквидистантной линии. Если же начала экстремалей лежат на **пограничной линии** ag, то, принимая во внимание (фиг. 2), что на основании ур. (7″)

$$(gc) - (hb) = (ec) - (hg),$$



Фиг. 2.

нужно вторую формулу (11) заменить нижеследующей:

$$(gc) - (hb) + (hg) = (ec) = F\ (p)\ dx_2.$$

Вследствие этого равенство (8) видоизменилось бы в такое:

$$(bc) - (gc) + (hb) - (hg) = Edx_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

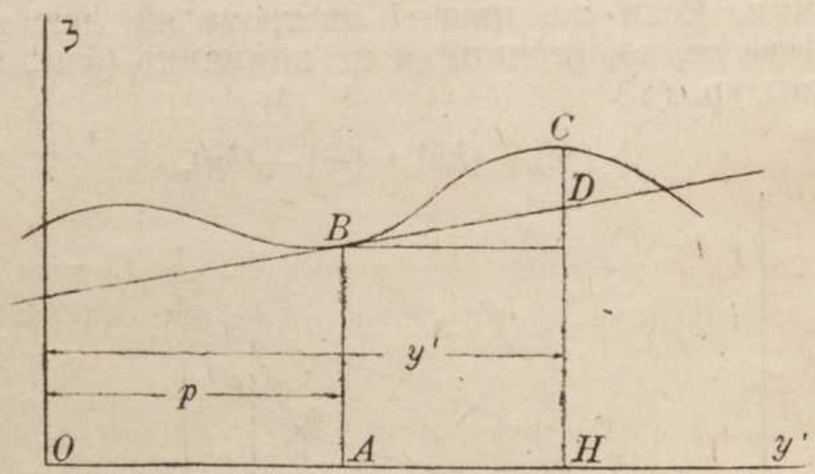
Для исследования функции Вейерштраса E строится для каждой точки рассматриваемого поля линия, называемая **характеристической кривой**. Ее уравнение есть:

$$\zeta = F\ (x, y, y'),$$

при чем ζ представляет ординату, y' — абсциссу, а x, y — параметры. Если припишем (фиг. 3), абсциссе значение $OA = p$, соответствующее рассматриваемой экстремали, и, построив ординату $AB = F\ (p)$, проведем к характеристической кривой касательную BD, то для направления элемента bc на фиг. (1), выраженного тангенсом угла y', найдем, при $OH = y'$, ординату $HC = F(y')$, отрезок которой

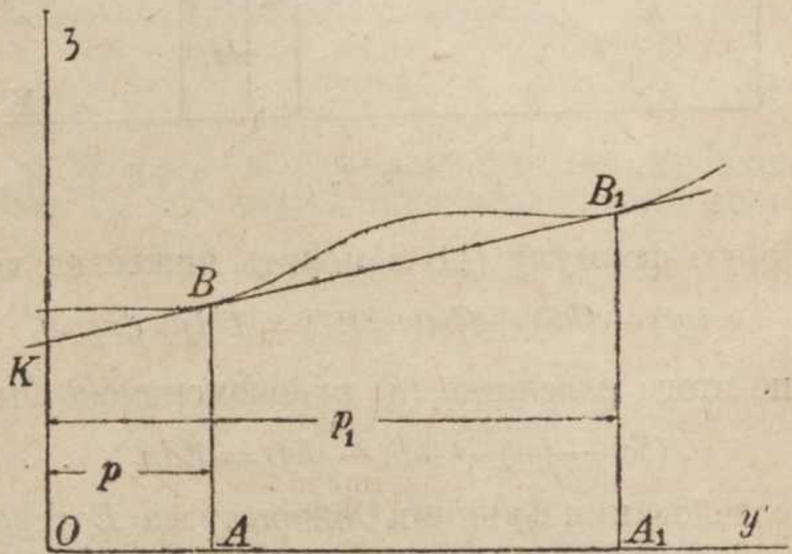
$$CD = F(y') - F(p) - \frac{\partial F}{\partial p}(y' - p)$$

и будет величиною E.



Фиг. 3.

Для значений y', близких к p, знак функции E одинаков с знаком второй производной $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2}$.



Фиг. 4.

При положительности этой производной характеристическая кривая в точке B обращена выпуклостью к оси абсцисс, и знак E положителен; при отрицательности наоборот. Если характеристическая кривая не пересекает касательную BD, то E имеет постоянный знак для всякого наклона элемента bc.

На фиг. (4) представлен случай, в котором характеристическая кривая прикасается к касательной BD еще в точке B_1. Этот случай играет важную роль для минимальных и максимальных линий с угловыми точками. Называя чрез p и p_1 абсциссы точек касания B и B_1, найдем из чертежа:

$$\frac{\partial F(p)}{\partial p} = \frac{\partial F(p_1)}{\partial p_1},$$

$$OK = F(p) - p\frac{\partial F(p)}{\partial p} = F(p_1) - p_1\frac{\partial F(p_1)}{\partial p_1} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Эти равенства называются условиями Эрдмана.

4. Переходим теперь к разбору минимальных и максимальных свойств различных экстремалей.

Теорема II. Если на части экстремали aef, на которой нет точек соприкосновения с пограничной кривой, $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ имеет постоянный знак $+$ или $-$, то (aef) будет иметь в первом случае minimum, а во втором maximum сравнительно со всеми величинами (abcf), взятыми по весьма близким кривым, проходящим чрез точки a и f.

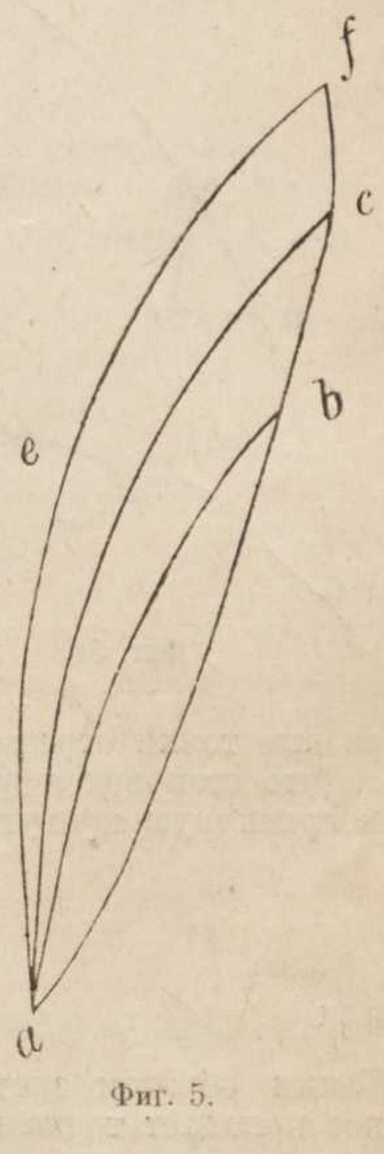
Воображаем семейство экстремалей af, ac, ab, выходящих из полюса a, и сравниваемую кривую $abcf$, которая может отстоять на конечное расстояние от af, но во всех точках которой E имеет постоянный знак, положим положительный. Тогда, на основании теоремы I, для всякого элемента кривой $abcf$:

$$(bc) > (ac) - (ab).$$

Суммируя это неравенство на все элементы bc сравниваемого пути, найдем

$$(abf) > (af).$$

Воображая, что соседняя кривая abf весьма близка af, заключим из постоянства знака $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2}$ на экстремали af о постоянстве знака E на кривой abf и о том, что (abf) более или менее (af). Таким образом доказывается существование min или max (af). Для того, чтобы было допустимо **сильное**

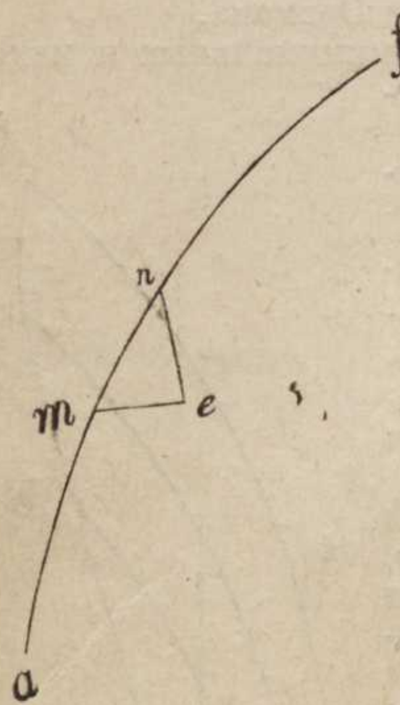


Фиг. 5.

варирование т.-е., чтобы кривая abf при бесконечной близости к af могла представлять предел зубчатки, нужно, чтобы характеристическая кривая, построенная для всех точек экстремали acf, была обращена к оси абсцисс **на всем своем протяжении** выпуклою или вогнутою стороною. При отсутствии этого условия возможно только **ограниченное варирование**, т.-е. в соседней кривой разность $y'-p$ должна не выходить из пределов, указываемых фигурой (3).

Если на каком-нибудь элементе кривой af $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2}$ равно нулю или имеет знак обратный с остальными точками кривой af, то (af) не дает min, или max. Действительно, если напр. на всей кривой af кроме места mn вторая производная положительна, а на элементе mn она отрицательна, то всегда можно выбрать соседний путь $amenf$, в котором элемент mn прежней экстремали заменен зубчиком men и доказать по предыдущему, что

$$(amenf) < (amnf).$$



Фиг. 5а.

Данное доказательство теоремы II не будет иметь места, если на экстремали agf есть точка g, прикасающаяся к пограничной кривой для семейства экстремалей, выходящих из полюса a. Действительно, прилагая (фиг. 6) к соседней кривой acf вышеупомянутые рассуждения, мы докажем в случае E положительного, что $(acf) > (agf)$. Что же касается до (agf), то, проводя чрез разные точки отрезка gf экстремали, выходящие из полюса a, (что становится возможным, когда точка g попадает на пограничную кривую) докажем, что

$$(gf) > (aqf) - (ag),$$

$$(ag) + (gf) > (aqf),$$

или

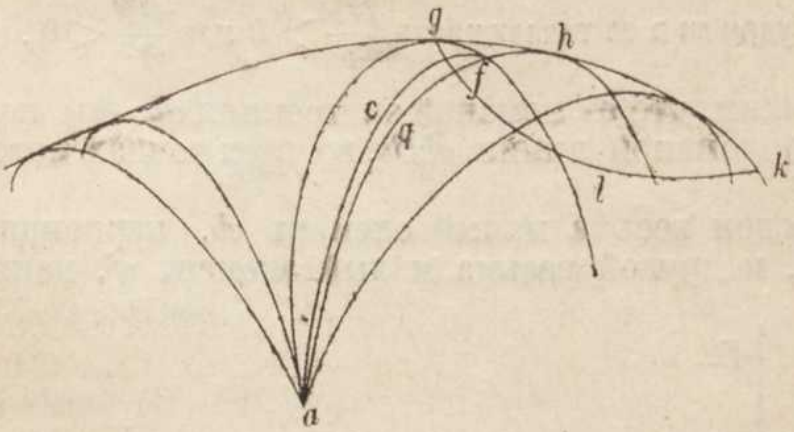
$$(agf) > (aqf).$$

Таким образом экстремаль перестает давать min, когда на нее попадает точка прикосновения к граничной кривой.

Теорема III. Отрезок ghk пограничной кривой, на котором $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ имеет постоянный знак, дает для (ghk) minimum или maximum

сравнительно со всеми величинами (glbck), взятыми по весьма близким контурам, проведенным чрез точки g и k и лежащим внутри поля рассматриваемого семейства экстремалей.

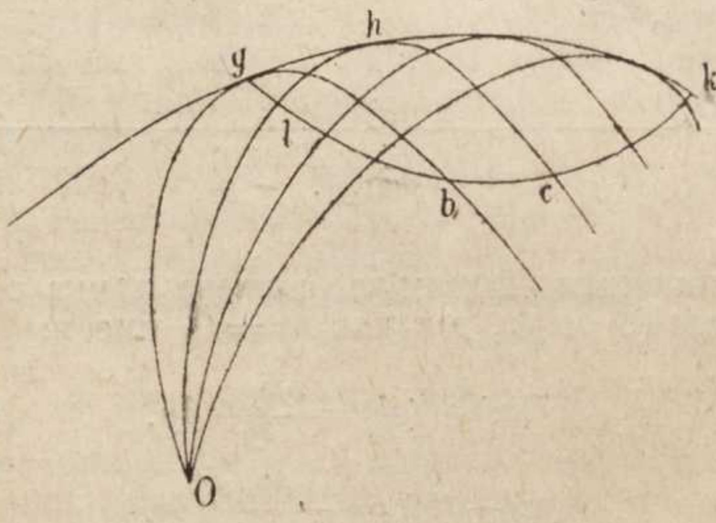
Пусть (фиг. 7) *ghk* отрезок линии, огибающей экстремали, выходящие из точки *O*.



Фиг. 6.

Проведем чрез точки *g* и *k* некоторую кривую *glbck*, лежащую в поле экстремалей настолько близко к *ghk*, что во всех ее точках, согласно условию $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > O$, имеем $E > O$. Тогда:

$$(bc) > (gh) + (hc) - (gb)$$



Фиг. 7.

Суммируя эти неравенства на все элементы *bc* кривой *bck*, найдем:

$$(bck) > (ghk) - (gb) \text{ или } (ghk) < (bck) + (gb)$$

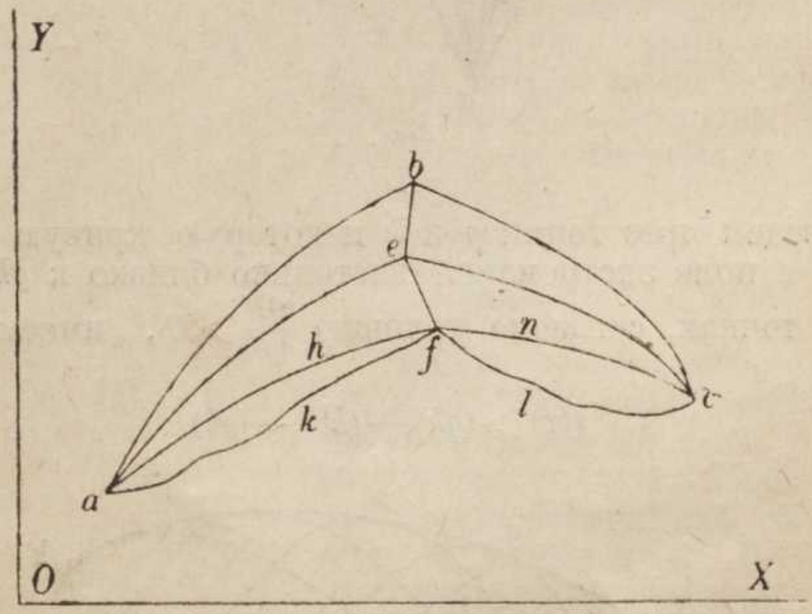
Но $$(gb) < (glb),$$

поэтому $$(ghk) < (glbck).$$

Теорема IV. Если на экстремали имеется точка, с тангенсом угла касательной p, удовлетворяющая условию Эрдмана, и мы через эту точку проведем другую экстремаль с тангенсом угла касательной в рассматриваемой точке, равными p_1, то построенная ломаная линия будет минимальной или максимальной кривой, смотря потому, будем ли в ее точках иметь $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$ или $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} < 0$.

Положим, что от ломаной экстремали abc мы переходим к соседней ломаной линии $akflc$, во всех точках которой $E > O$ (фиг. 8).

Проведем весьма малый элемент eb, перпендикулярный к оси ox, и другой весьма малый элемент ef, направленный



Фиг. 8.

по эквидистантным линиям лагранжева пучка с полюсом a. По формулам (6) и (8), так как $\delta x = O$, имеем:

$$(ae) - (ab) = \frac{\partial F(p)}{\partial p} \delta y,$$

$$(ec) - (bc) = - \frac{\partial F(p_1)}{\partial p_1} \delta y,$$

где $\delta y = - eb$. Но, по первому условию Эрдмана (форм. 14),

$$\frac{\partial F(p)}{\partial p} = \frac{\partial F(p_1)}{\partial p_1},$$

поэтому

$$(ae) - (ab) + (ec) - (bc) = O,$$

или

$$(ae) + (ec) = (ab) + (bc).$$

Далее легко усмотреть, что элемент ef эквидистанты, построенный для пучка лагранжевых кривых с полюсом a, будет одновременно и элементом эквидистанты, построенным для пучка лагранжевых кривых с полюсом c, так как тангенсы угла наклонения того и другого элемента выражаются согласно формуле (4) так:

$$\frac{p\,\frac{\partial F(p)}{\partial p} - F(p)}{\frac{\partial F(p)}{\partial p}} = \frac{p_1\,\frac{\partial F(p_1)}{\partial p_1} - F(p_1)}{\frac{\partial F(p_1)}{\partial p_1}} \quad \ldots\ldots (15)$$

а эти величины по первому и второму условию Эрдмана между собою равны.

Таким образом $(ab) + (bc) = (af) + (fc)$,

но $(ahf) < (akf)$ и $(fnc) < (flc)$,

поэтому $(ab) + (bc) < (akf) + (flc)$.

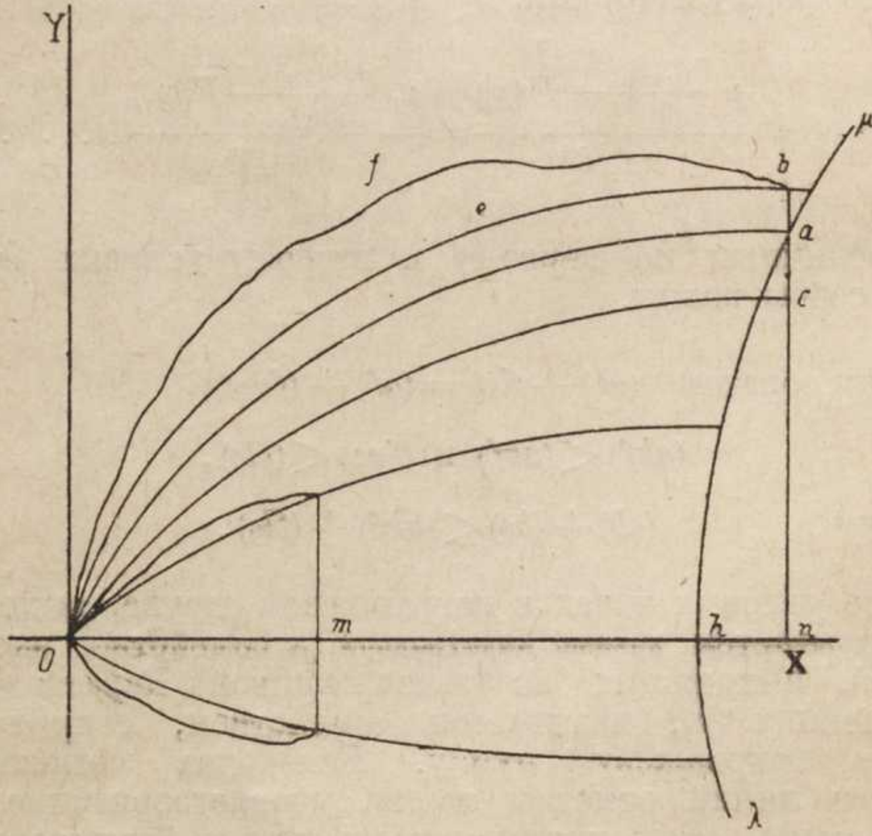
Место угловых точек в лагранжевом пучке, выходящем из a, называется **кривою Каратеодори**, а семейство экстремалей (bc), выходящих из точек кривой Каратеодори в направлениях p_1, называется семейством, сопряженным данному лагранжеву пучку. Если на сопряженном семействе линий отметим точки, удовлетворяющие условию Эрдмана, то получим вторую **кривую Каратеодори**, для точек которой можно построить второе семейство сопряженных линий и т. д.

Идя по лагранжевой кривой до линии Каратеодори, повернув от точки пересечения по сопряженной экстремали, пройдя по ней до второй кривой Каратеодори и повернув от нее по экстремали второго сопряженного семейства и т. д., мы получим ломаную экстремаль, которая при постоянстве $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ и отсутствии на ней точек прикосновения к соответствующим огибающим кривым будет обладать максимальными или минимальными свойствами.

Теорема V. Если на пучке лагранжевых кривых (фиг. 9), **выходящих из полюса O, отметить место $\lambda\mu$ точек, для которых $\frac{\partial F(p)}{\partial p} = 0$, то всякая экстремаль Oa, идущая от полюса до этого места при постоянстве на ней знака $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2}$, будет иметь min или max, сравнительно со всеми соседними кривыми, выходящими из O и оканчивающимися на параллели оси оу, проведенной чрез a.**

Возьмем соседнюю кривую ofb и проведем через ее конец b лагранжеву кривую ab. Если $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2}$ положительно, то

$$(ofb) > (oeb).$$



Фиг 9.

С другой стороны по форм. (5)

$$(oeb) - (oa) = \frac{\partial F}{\partial p}\, ab.$$

* Так как отрезок ab лежит влево от $\lambda\mu$ и, вследствие положительности $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2}$, производная $\frac{\partial F(p)}{\partial p}$ должна возрастать при подходе к $\lambda\mu$, то она будет положительна, и

$$(oeb) > (oa). \text{ *}$$

Еслибы соседняя кривая оканчивалась за кривой $\lambda\mu$ в нижней точке c, то $\frac{\partial F}{\partial p}$ было бы отрицательно, но зато вместо ab надо было бы взять $-(ca)$; таким образом опять получили бы

$$(oc) > oa.$$

На основании двух написанных неравенств находим

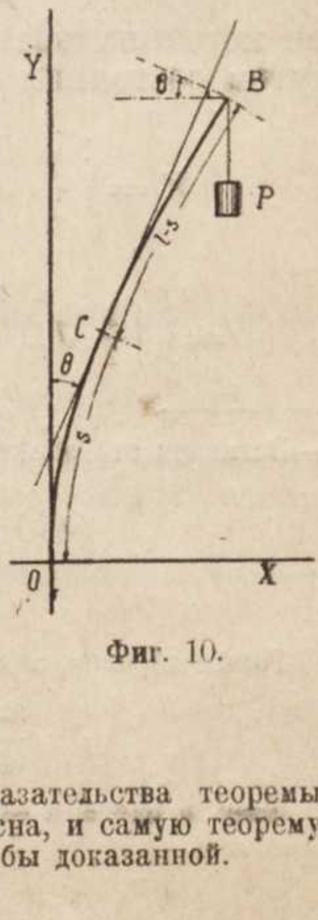
$$(ofb) > (oa).$$

Как только мы перейдем за точку h в некоторую точку n, то (on) перестает быть *min.* и мы получаем $(oa) < (on)$

Если во всех точках одной из лагранжевых линий, напр., oh, имеем $\frac{\partial F}{\partial p} = O$, $\frac{\partial^2 F(p)}{\partial p^2} > O$, то любой отрезок om этой линии вплоть до отрезка oh, конец которого лежит на кривой $\lambda\mu$, будет иметь *min.* сравнительно с соседними кривыми, выходящими из O и имеющими в конце абсциссу om. Доказательство будет такое же, как вышеприведенное.

Теорема V, которая, насколько мне известно, не приводится в курсах вариационного исчисления, играет весьма важную роль в теории устойчивости упругих систем *).

5. Окончим нашу заметку рассмотрением задачи об устойчивости вертикальных колонн.



Фиг. 10.

Определим потенциальную энергию стержня $OB = l$, защемленного в точке O, который постепенно сгибается действием вертикального груза P, приложенного к его концу B (фиг. 10). При сгибании каждого элемента ds от прямолинейного вида в прогнутое состояние при кривизне $\frac{d\theta}{ds}$ мы запасаем в каждом элементе C стержня работу:

$$\frac{1}{2} J \; E \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds,$$

---

*) Поставленная между звездочками часть доказательства теоремы, приводимая нами по рукописи *Н. Е.*, не совсем ясна, и самую теорему, в приведенной выше формулировке, мы не считали бы доказанной.

Знак разности

$$(oeb) - (oa) = \frac{\partial F}{\partial p} ab = \frac{\partial F}{\partial p} \delta y_1,$$

имеющий решающее значение для доказательства теоремы, может быть определен следующим образом.

Раскладывая $\frac{\partial F}{\partial p}$ в ряд около точки a, мы получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_a + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \delta p_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y} \delta y_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} \delta x_1.$$

Так как точка a лежит на кривой $\lambda\mu$, а точка b имеет одинаковую абсциссу с точкой a, то

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_a = o, \; \delta x_1 = o,$$

а потому для точки b

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_b = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y}\right] \delta y_1.$$

где θ есть угол касательной с осью oy. Кроме того, поворот на угол $d\theta$ всякого элемента C стержня, отстоящего от начала O на расстояние s, заставляет груз опуститься на

$$(l-s)\sin\theta\, d\theta = (l-s)\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}\,ds.$$

Это дает потерю потенциальной энергии, равную:

$$-P\,(l-s)\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}\,ds = d\,[P(l-s)\cos\theta] + P\cos\theta\,ds.$$

Вся потенциальная энергия прута в каком-нибудь его согнутом состоянии выразится интегралом:

$$V=\int_o^s \frac{1}{2}\,JE\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds - \int_o^s P\,(l-s)\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}\,ds =$$

$$=\int_o^s\left[\frac{1}{2}\,JE\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + P\cos\theta\right]ds + \Big|_o^s P\,(l-s)\cos\theta.$$

Вставляя это значение в формулу разности $(oeb)-(oa)$, находим

$$(oeb)-(oa)=\varepsilon\left[\frac{\partial^2F}{\partial p^2}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial p\partial y}\right]\delta y_1^2,$$

где

$$o<\varepsilon<1.$$

Гаким образом, знак разности будет одинаков со знаком выражения

$$\frac{\partial^2F}{\partial p^2}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial p\partial y}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right).$$

Лишь в частном случае, когда

$$\frac{\partial^2F}{\partial p\partial y}=o \text{ и } \frac{\partial p}{\partial y}>o.$$

знак разности $(oeb)-(oa)$ будет всецело определяться знаком $\frac{\partial^2F}{\partial p^2}$. (Этот случай имеет место в разбираемой ниже задаче об устойчивости колонн-

В общем же случае теорему следовало бы, по нашему мнению, формулировать так:

Если на пучке Лагранжевых кривых, выходящих из полюса o, отметить место $\lambda\mu$ точек, для которых $\frac{\partial F(p)}{\partial p}=o$, то всякая экстремаль ao, идущая от полюса до этого места, при постоянстве и одинаковости на ней знаков выражений

$$\frac{\partial^2F}{\partial p^2} \text{ и } \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)=\frac{\partial^2F}{\partial p^2}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial p\partial y}$$

будем иметь *min.* или *max.* сравнительно со всеми кривыми, выходящими из o и оканчивающимися на параллели oy, проведенной через a.

Предполагая, что длина прута остается неизменной и равной l, получим:

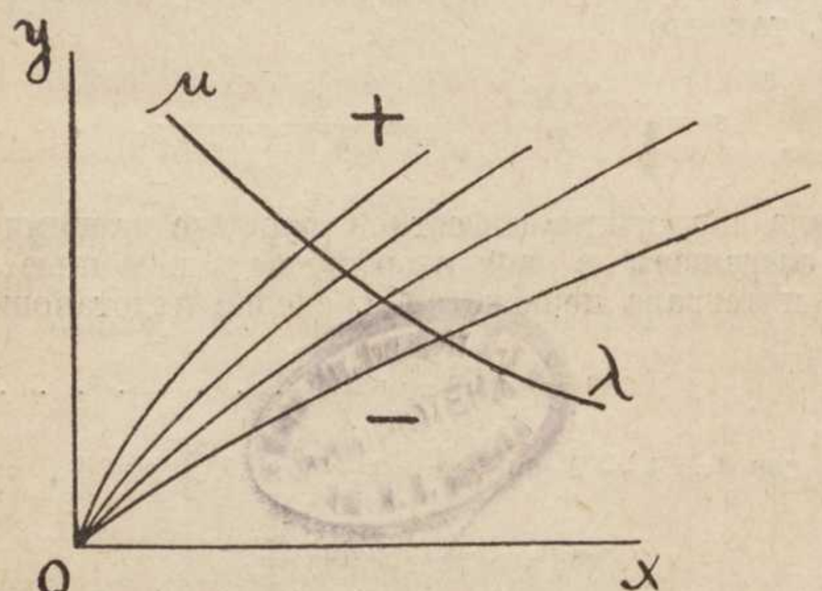
$$V = P\int_0^l \left[\frac{1}{2}\,\frac{JE}{P}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \cos\theta\right] ds - Pl =$$

$$= P\int_0^l \left(\frac{1}{2}\,\frac{JE}{P}\,\theta'^2 + \cos\theta\right) ds - Pl.$$

Для того, чтобы изогнутое состояние удерживалось в равновесии грузом P, необходимо и достаточно, чтобы неизвестная функция θ от s была такова, чтобы вариация интеграла

$$V = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\,\frac{JE}{P}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \cos\theta\right) ds$$

Геометрически ясно, что знак $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)$ для точек, близких к $\lambda\mu$, зависит от распределения положительных и отрицательных значений $\frac{\partial F}{\partial p}$ на плоскости (x,y). Если, двигаясь в сторону возрастания ординат, мы переходим (фиг. 9 и фиг. 9 *bis*) от отрицательных значений к положительным, то будем иметь $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) > o$, если от положительных значений к отрицательным, то $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) < o$.



Фиг. 9 *bis*.

Прим. ред.

при постоянном значении верхнего предела $s = l$ была нулем, т.-е.

$$\delta\int_0^l \left(\frac{1}{2}\frac{JE}{P}\theta'^2+\cos\theta\right)ds=O \quad .\ .\ .\ .\ .\ (16)$$

Отсюда согласно ур. (3) получаем дифференциальное ур. экстремалей в виде:

$$\frac{JE}{P}\frac{d}{ds}(\theta')+\sin\theta=O,$$

или

$$\frac{JE}{P}\theta' d\theta'+\sin\theta\, d\theta=O,$$

которое по интегрировании дает:

$$\frac{JE}{P}\theta'^2=2\cos\theta+C$$

Произвольное постоянное определим под условием, что $\theta'=O$ при $\theta=\theta_0$; тогда

$$\frac{JE}{P}\theta'^2=2(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

Отсюда

$$s=\sqrt{\frac{JE}{P}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}+C_1,$$

при чем новое постоянное C_1 определяем условием $\theta=O$ при $s=O$, так что

$$s=\sqrt{\frac{JE}{P}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}. \quad .\ .\ .\ .\ (17)$$

Эта формула аналогична известной формуле качания маятника. Мы выражаем в ней вторую часть помощью эллиптического интеграла первого вида, сделав подстановку:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\psi \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (18)$$

тогда: $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\psi,$

$$\cos\theta_0=1-2\sin^2\frac{\theta_0}{2},$$

$$\cos\theta-\cos\theta_0=2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cos^2\psi,$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\psi\, d\psi,$$

$$d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \psi \; d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \psi}}.$$

Так как при $\qquad \theta = O, \; \psi = O,$ то

$$s = \sqrt{\frac{JE}{P}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \psi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (17')$$

Будем откладывать по оси абсцисс величину s, а по оси ординат угол θ [угол θ по форм. (18) выражается через ψ, а ψ по форм. (17′) выражается эллиптическою функциею от s] и построим (фиг. 11) лагранжево семейство экстремалей. Каждая экстремаль будет иметь параметром θ_0.

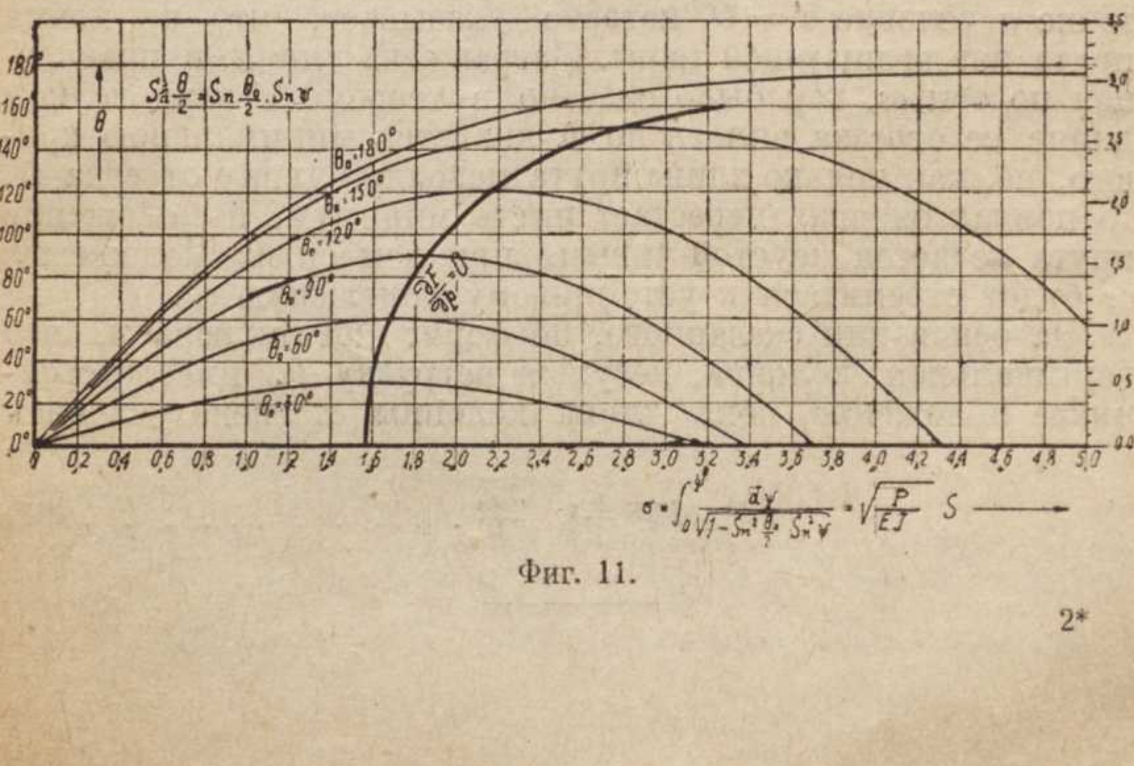
Когда угол θ получает значение θ_0, при котором $\theta' = O$, тогда согласно форм. (16) получается $\psi = \frac{\pi}{2}$. Длина l, которую должен иметь стержень в сделанном предположении, по форм. (17) представится полным эллиптическим интегралом первого вида

$$l = \sqrt{\frac{JE}{P}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \psi}}, \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

который развертывается в известный ряд

$$l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{JE}{P}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \ldots\right) \; . \; . \; . \; (20)$$

Уравнение (20) дает нам кривую $\lambda\mu$, точки пересечения которой с лагранжевыми кривыми дают $\theta' = O$ или $\frac{\partial F}{\partial p} = O.$

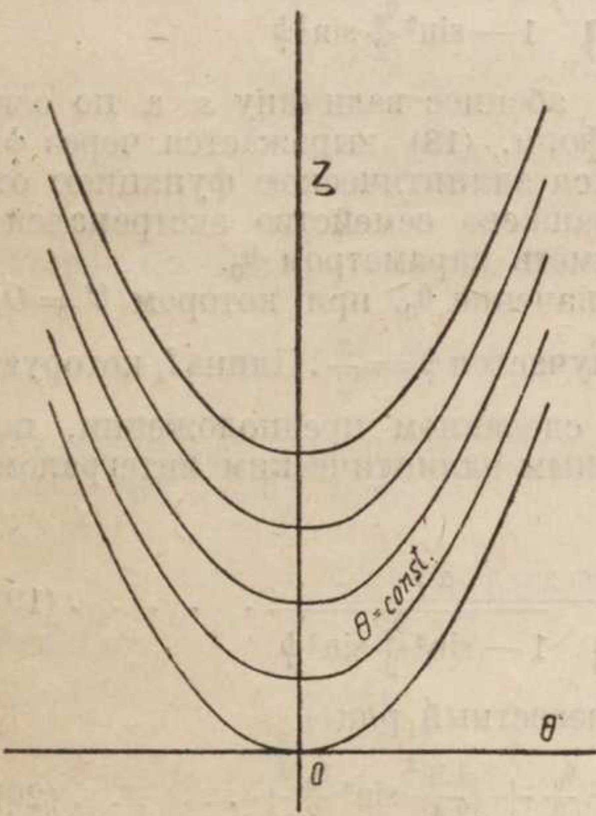


Фиг. 11.

Что касается до уравнения характеристической кривой, то оно, на основании ур. (16), будет:

$$\zeta = \left(\frac{1}{2}\frac{JE}{P}\theta'^2 + \cos\theta\right),$$

при чем θ' надо откладывать по оси абсцисс, а θ считать параметром.



Фиг. 12.

Характеристические кривые будут параболами, обращенными выпуклостью вниз; поэтому, во всех точках поля функция Вейерштрасса $E > O$

Интеграл формулы (16), взятый по каждой лагранжевой кривой от O до кривой $\lambda\mu$, будет иметь минимум сравнительно со значением этого интеграла, взятого по соседним кривым при том же l, т.-е. потенциальная энергия изогнутого прута, углы которого θ следуют закону линии oa, будет менее энергии прута той же длины l при всяком другом изгибе его. Это показывает, что при данной длине мы получим устойчивое положение прута, при чем выполнены два условия: в точке O условие $\theta = O$, и в точке a условие $\theta' = O$, которое указывает, что на конце прута нет вращающей пары. Лагранжева линия, направленная по оси os, как было сказано в теореме V, при всякой длине ее отрезка вплоть до $o\lambda$ является минимальною кривою, но, как только длина прута перейдет длину отрезка $o\lambda$, то полная энергия перестает иметь минимум, и положение прута делается неустой-чивым, при чем он из положения oe будет стремиться к устойчивому положению oa.

На основании сказанного, по форм. (20) заключаем, что вертикальная колонна, несущая нагрузку P, имеет устойчивое положение, пока длина колонны стеснена условием

$$l \leqq \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{JE}{P}} \qquad (21)$$

Ипатьев, В. Н. Разложение пиронафита при высоких давлениях при помощи кретинпроцесса. П. 1920 г. 32 стр.
Ипатьев, В. Н. Производство аммиака из элементов. П. 1920 г. 13 стр.
Карта электрификации России с пояснительн. запиской.
Куколевский. Сборник нормалей деталей машин. М. 1922 г.
Краткий отчет Технич. Совета Отд. Хим. Промышл. В. С. Н. Х. за 1920 г. П. 1921 г. 70 стр.
Керблай, С. А. Наиб. величина коэфф. полезн. действ. лин. электропередачи. П. 1921 г. 16 стр.
Кролль Моритц. Учебник электротехники для техническ. школ и практиков. М. 1921 г. 247 стр., 579 рисунков.
Кох, В. Электропередача высокого напряжения под редакцией проф. Вологдина. Б. 1922 г. 70 стр., 50 рис.
Курбатов, В. Я. Введение в химию. П. 1919 г. 782 стр., 18 рис.
„ Самосварка. П. 1919 г. 203 стр., 22 рис.
Круг, К. А., проф. Программа работ по электрификации России. 1920 г. 14 стр.
Крылов, А. И. Минер. и растит. масла для полив. инструмент. смаз. маш. двиг. и разн. механизмов. П. 1919 г. 89 стр., 7 рис.
Крылов, А. И. О специальных сортах стали. М. 1922 г. 200 стр.
Квартвелов, А. Д., и Иванов, В. Н. Перераб. бариевых минералов на соли бария. П. 1920 г. 59 стр.
Лазарев, П. П. Основы учения химич. действ. света, ч. I. общая фотохим. П. 1919 г. 59 стр.
Лазарев, П. П. То же, ч. II. Частн. фотохимия. П. 1920 г. 69 стр.
„ То же, ч. III. Прилож. к фотохимии. П. 1920 г. 63 стр.
Лялин, Л. М. Химия технолог. орган. веществ, ч. I. П. 1920 г. 216 стр.
„ Хлеб. П. 1919 г. 43 стр.
Лукьянов, П. М. Производство серной кислоты. М. 1922 г. 432 стр., 163 рис.
Мюнстерберг и др. Сборник по прикладной психологии. М. 1921 г. 124 стр.
Никитинский, Я., проф., и Новиков, М., проф. Минога. М. 1919 г. 38 стр., 15 рис.
Нессельштраус, Т. З. Термометр в заводском деле. П. 1920 г. 52 стр.
Орлов, М. М. Лесная вспомогательная книжка для лесных техников. П. 1922 г.
Оппенгейм, К. А. Деревянные шпалы на русск. жел. дор. с точки зрения народн. хоз. М. 1921 г. 109 стр.
Описание Центральн. Научно-Технич. лаборат. П. 1920 г. 91 стр., 20 рис.
Песоцкий, Н. А. Справочн. книга по лесопильн. производству для мастер. кальк. и руководство произв. П. 1919 г. 108 стр.
Песоцкий, Н. А. Лесопильное дело. П. 1919 г.
Передерий. Курс железобетон. мостов. П. 1920 г. 144 стр., 235 рис.
Паунсо, Л. Начало статистики. П. 1921 г. 213 стр.
Прянишников. О химической перераб. наших фосфоритов. П. 1921 г. 20 стр.
Правила безопасности для электр. сооруж. П. 1921 г. 48 стр.
Попов, С. М., и Якимов, М. Я. Метод приготовления хлористого кальция. П. 1919 г. 27 стр.
Порай-Кошиц, А. Я. К вопросу о судьбе красочн. промышл. в России. П. 1918 г. 14 стр.
Работа научн. технич. учреждений республики, I, II вып. 19—20 г. г.
Розенцвейг, М. А. Системат. сборник правил изобрет., выдан. в России за 16½ лет. П. 1920 г. 848 стр.
Сообщения о научн.-технич. работах, вып. I.
Сообщения о научно-техническ. работах, вып. II и V.
Степанов, А. И. Приготовл. льда при помощи распылителей. П. 1920 г. 15 стр.
Сырокомский, В. С. Применение редких элементов в промышл. П. 1919 г. 32 стр.
Словцов, В. И. Пищевые раскладки. П. 1919 г. 84 стр.
Труды комиссии по исследов. топл. д/автом. двиг. внутренсгор., в. I. 1919 г. 56 с., 6 р.
„ „ „ „ „ вып. II. П. 1920 г. 90 стр., 22 рис.
Труды Технического Совета Отд. Металла. №№ 1, 2, 3. М. 1920 г.
„ „ „ 1921 г. 32 стр. № 4.
Технические Известия с № 1 по 9. П. 1919 г.
Технические условия для магнит. стали. П. 1921 г. 11 стр.
Таусенд, Р. Волшебство в изучении движений. П.
Ферсман, А. Е. Кратк. руководство к собиранию материалов. 1920 г. 80 стр.
Фокин, Л. Ф. Обзор химическ. промышл. в России. Ч. II, вып. II. П. 1921 г. 103 стр.
То же. Химия цианамида и его произв. П. 1920 г. 54 стр.
Федоровский, Н. М., проф. Краткий определитель минералов и горн. пород. П. 1919 г. 32 стр.

30