ЗАМѢТКА

О ДВИЖЕНІИ ВИХРЕВЫХЪ

КОЛЕЦЪ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Отдѣльныя оттиски изъ „Математическаго Сборника“ Т. XXVI, в. III.)

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1907.

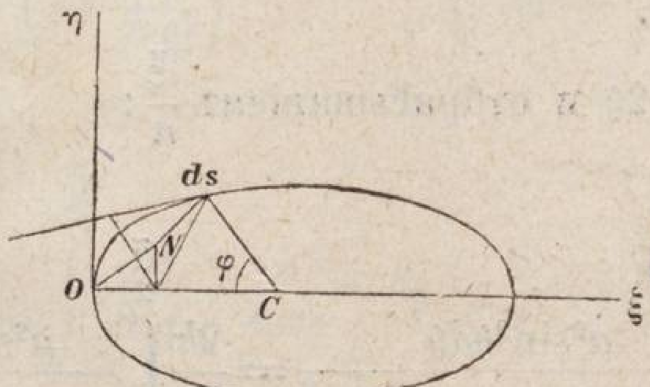
ЗАМѢТКА О ДВИЖЕНІИ ВИХРЕВЫХЪ КОЛЕЦЪ.

Н. Е. Жуковскаго.

Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 1907 г. 27 февраля.

§ 1. Обыкновенно предполагаютъ, что вся жидкость, заключенная въ вихревомъ кольцѣ, имѣетъ вихревое движеніе. Мы имѣемъ въ виду въ этой замѣткѣ разсмотрѣть задачу о движеніи круглаго вихревого кольца, несущаго заключенную въ немъ жидкость поступательнымъ движеніемъ и имѣющаго на поверхности вихревой слой.

§ 2. Опредѣлимъ сначала скорость, сообщаемую безконечно тонкимъ вихревымъ кольцомъ съ центромъ C и радіусомъ a точкѣ жидкости N, отстоящей отъ окружности кольца на весьма маломъ разстояніи ρ (фиг. 1). Проведемъ чрезъ N плоскость



Фиг. 1.

перпендикулярную кольцу и построимъ на ней прямоугольныя оси координатъ, принявъ начало o на окружности кольца и направивъ ось $o\xi$ по радіусу кольца, а ось $o\eta$ перпендикулярно къ плоскости кольца. Суммируя эффекты всѣхъ элементовъ $ds = ad\varphi$ на точку N, найдемъ для проекцій v и u скорости этой точки на оси $o\eta$ и $o\xi$ слѣдующія выраженія:

$$v = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[a^2(1-\cos\varphi)+a\xi\cos\varphi]\,d\varphi}{\left\{2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$u = -\frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\eta\cos\varphi\,d\varphi}{\left\{2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Здѣсь k есть безконечно малая циркуляція скорости по контуру, охватывающему кольцо такъ, что напряженія вихревого кольца есть $m = \frac{k}{2}$, а ξ и η суть координаты точки N.

Преобразуемъ интегралъ:

$$A = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{\left\{2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

подстановкою $\varphi = 2\theta$ и отбрасываніемъ $\frac{\xi}{a}$:

$$A = \frac{k}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^2\sin^2\theta\,d\theta}{\left\{4(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin^2\theta\,d\theta}{(4a^2\sin^2\theta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вообразимъ уголъ ψ безконечно малый, но весьма большой сравнительно съ безконечно малой величиною ρ, такъ что

$\frac{\rho}{\psi}=0$, и разобьемъ нашъ интегралъ A на два:

$$A=\frac{2k}{\pi}\int_0^{\psi}\frac{a^2\theta^2 d\theta}{(4a^2\theta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{k}{2\pi}\left\{\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\psi}\frac{\rho^2 d\theta}{(4a^2\theta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\right\}.$$

Мы имѣемъ:

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}}=\frac{k}{4\pi a}\int_0^{\psi}\frac{\frac{2ad\theta}{\rho^2}}{\sqrt{\frac{4a^2\theta^2}{\rho^2}+1}}=$$

$$=\frac{k}{4\pi a}\Bigg|_0^{\psi}\lg\left[\frac{2a\theta}{\rho}+\sqrt{\frac{2a\theta}{\rho}+1}\right]=\frac{m}{2\pi a}\lg\left(\frac{4a\psi}{\rho}\right),$$

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{\frac{\rho^2 d\theta}{\theta^2}}{\left(4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{k}{2\pi}\Bigg|_0^{\psi}\frac{1}{\sqrt{4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}}}=\frac{m}{2\pi a}$$

$$\frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{k}{4\pi a}\Bigg|_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=-\frac{m}{2\pi a}\lg\frac{\psi}{2}$$

На основаніи всего сказаннаго выраженіе A будетъ такое:

$$A=\frac{m}{2\pi a}\left\{\lg\frac{8a}{\rho}-1\right\}. \qquad (2')$$

Намъ остается еще опредѣлить входящій въ выраженіе v интегралъ:

$$B=\frac{k}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a\xi\cos\varphi d\varphi}{\left\{2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Вводимъ въ него тоже подстановку $\varphi=2\theta$, вслѣдствіе которой

$$B=\frac{k}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\xi(1-2\sin^2\theta)d\theta}{(4(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$-\frac{\xi}{a}A+\frac{ka\xi}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\left\{4(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Въ предѣлахъ разсматриваемой точности первый членъ второй части можетъ быть отброшенъ, и мы получаемъ по замѣнѣ $4(a^2-a\xi)$ на n:

$$B=-\frac{ka\xi}{\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{n\sin^2\theta+\rho^2}}. \qquad (3')$$

Беремъ входящій сюда интегралъ:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{n\sin^2\theta+\rho^2}}=\int\limits_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{n\theta^3+\rho^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\Big|_0^{\psi}\lg\left(\frac{\theta\sqrt{n}}{\rho}+\sqrt{\frac{n\theta^2}{\rho^2}+1}\right)+\int\limits_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{n}}\lg\left(\frac{4\sqrt{n}}{\rho}\right).$$

По подстановкѣ въ форм. (3′) получимъ:

$$B = \frac{m}{\pi}\,\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{2\pi a}\,\frac{\xi^2}{\rho^2}.$$

Теперь мы можемъ написать выраженіе скорости v, въ которомъ сохранены конечныя величины и весьма большія величины логариѳмическаго и перваго порядка:

$$v = \frac{m}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{\rho} - 1\right] + \frac{m}{\pi}\,\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{2\pi a}\,\frac{\xi^2}{\rho^2}. \tag{4}$$

Что касается до проекціи скорости на ось $o\xi$, то ее составлять не придется, ибо она получается изъ выраженія B въ форм. (3) только замѣною въ числителѣ множителя ξ на $-\eta$

Мы получаемъ:

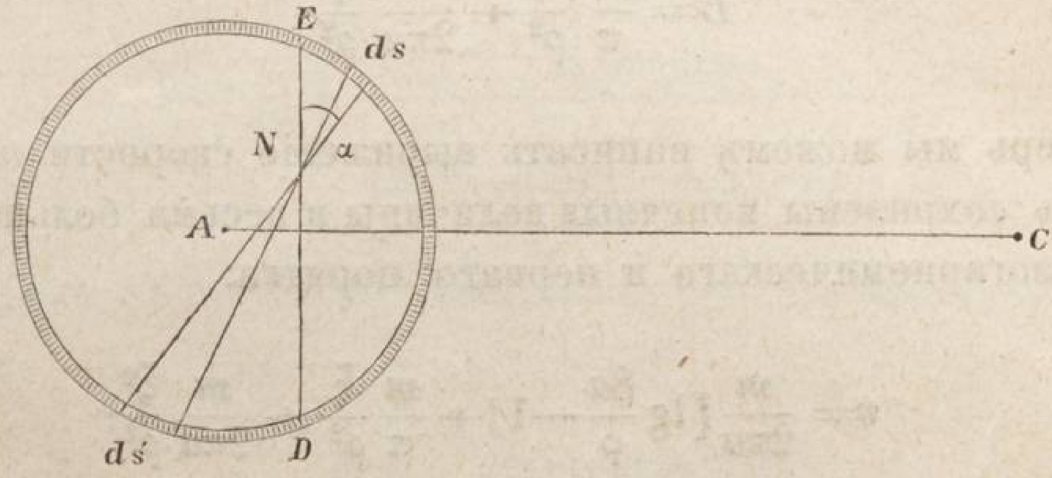
$$u = -\frac{m}{\pi}\,\frac{\eta}{\rho^2} - \frac{m}{2\pi a}\,\frac{\xi\eta}{\rho^2}. \tag{5}$$

Разсмотрѣніе форм. (4) и (5), приводитъ насъ къ заключенію, что *безконечно тонкое вихревое кольцо сообщаетъ точкѣ N отстоящей отъ него на очень близкое разстояніе ρ три скорости:* 1) *скорость w, направленную по оси кольца и имѣющую величину.*

$$w = \frac{m}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{\rho} - 1\right], \tag{6}$$

зависящую только отъ ρ; 2) *скорость вихревого вращательнаго движенія около касательной, проведенной къ кольцу въ точкѣ o, съ напряженіемъ вихря m;* 3) *скорость вращательнаго движенія около той же касательной, имѣющую конечную перемѣнную величину $\frac{\xi}{\rho}$.*

§ 3. Предположимъ теперь, что безконечно тонкія вихревыя кольца расположены по поверхности тора радіуса сѣченія b, такъ что на каждый элементъ ds этого сѣченія приходится напряженіе вихрей $m=\gamma ds$, и посмотримъ какую скорость сообщаютъ всѣ эти кольца точкѣ жидкости N, заключенной внутри тора (фиг. 2). Слагая всѣ скорости w, происходящія



Фиг. 2.

отъ всѣхъ элементарныхъ вихревыхъ колецъ съ напряженіями γds, мы получимъ на основаніи форм. (6) по оси вихря скорость w:

$$w=\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{b}-1\right], \tag{7}$$

потому что всѣ точки, лежащія внутри весьма тонкаго кругового слоя при логариѳмическомъ законѣ притяженія, имѣютъ одинаковый потенціалъ, равный потенціалу внѣшней точки, прилегающей къ слою.

Чтобы сложить геометрически всѣ скорости вихревыхъ движеній, получаемыхъ точкою N отъ элементовъ вихря, покрывающихъ слой, замѣчаемъ, что скорость вихревого движенія отъ одного элемента γds направлена перпендикулярно къ радіусу ρ, соединяющему этотъ элементъ съ точкою N, и равна $\frac{m}{\pi}\frac{1}{\rho}\cdot$ Эта скорость получается такимъ образомъ, повернувъ на прямой уголъ силу притяженія элементомъ γds точки N единицы массы по закону обратной пропорціональности разстоянію. Сложивши геометрически всѣ такія силы притяженія и повернувъ ихъ равнодѣйствующую на прямой уголъ, мы получимъ скорость точки N отъ всѣхъ вихревыхъ движеній.

Но круговой слой по закону обратной пропорціональности разстоянію внутренней точки не притягиваетъ, поэтому скорость точки N, полученная отъ всѣхъ движеній 2-го рода (вихревыхъ) есть нуль. Остается разсмотрѣть равнодѣйствующую скорость точки N отъ всѣхъ движеній третьяго рода. Проведемъ (фиг. 2) чрезъ N параллельно оси тора хорду DE и назовемъ чрезъ α уголъ между радіусомъ ρ, идущимъ отъ точки N къ элементу ds, и NE. Проекціи искомой результирующей скорости на ось тора и на его радіусы на основаніи форм. (4) и (5) будутъ такія:

$$\frac{\gamma}{2\pi a}\left[\int_0^\pi \sin^2\alpha(ds+ds')\right];\ -\left[\int_0^\pi \sin\alpha\cos\alpha(ds+ds')\right]$$

гдѣ чрезъ ds' мы называемъ элементъ дуги вертикальной относительно точки N элементу ds.

Такъ какъ уголъ, образованный двумя внутренними сѣкущими, измѣряется полусуммою дугъ, заключенныхъ между его сторонами, то

$$ds+ds'=2ad\alpha$$

и

$$\frac{\gamma}{2\pi a}\int_0^\pi \sin^2\alpha(ds+ds')=\frac{\gamma}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\alpha d\alpha==\frac{M}{4\pi a},$$

$$-\int_0^\pi \sin\alpha\cos\alpha(ds+ds')=-\frac{\gamma}{4\pi a}\int_0^\pi \sin 2\alpha 2d\alpha=\frac{\gamma}{4\pi a}\Big|_0^\pi \cos 2\alpha=0.$$

Соединяя всѣ скорости точки N, приходимъ къ заключенію, что результирующая этихъ скоростей для всякаго мѣста точки

N внутри тора совпадаетъ съ поступательной скоростью*)

$$W=\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{b}-1\right]+\frac{M}{4\pi a}=\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\left(\frac{8a}{b}\right)-\frac{1}{2}\right]. \qquad (8)$$

Такимъ образомъ *все движенiе тора приводится къ поступательному движенiю заключенной въ немъ массы жидкости вдоль оси тора со скоростью, данной формулою* (8).

Укажемъ подъ конецъ этой замѣтки, что форм. (4) и (5) удовлетворяютъ условiю:

$$\frac{dv}{d\xi}-\frac{du}{d\eta}=0$$

такъ какъ

$$\frac{dv}{d\xi}=-\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2}-\frac{m}{\pi}\frac{\xi\eta}{\rho^4}+\frac{m\xi}{\pi a\rho^2}-\frac{m\xi^3}{\pi\rho^4}=$$

$$=-\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2}-\frac{m}{\pi}\frac{\xi\eta}{\rho^4}+\frac{m}{\pi a}\frac{\xi\eta^2}{\rho^4},$$

$$\frac{du}{d\eta}=-\frac{m}{\pi}\frac{\xi\eta}{\rho^4}-\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2}+\frac{m}{\pi a}\frac{\xi\eta^2}{\rho^4}.$$

Точно также форм. (4) и (5) удовлетворяютъ условiю несжимаемости:

$$\frac{dv}{d\xi}+\frac{du}{d\xi}-\frac{1}{a-\xi}u=0,$$

ибо

$$\frac{dv}{d\eta}=-\frac{m}{2\pi a}\frac{\eta}{\rho^2}-\frac{m\xi^2\eta}{\pi a\rho^4},$$

$$\frac{du}{d\xi}=-\frac{m}{2\pi a}\frac{\eta}{\rho^2}+\frac{m\eta\xi^2}{\pi a^2\rho^4},$$

а при отбрасыванiи конечныхъ величинъ передъ величинами порядка $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{u}{a-\xi}=-\frac{m\eta}{\pi\rho^2}.$$

---

*) Этотъ случай соотвѣтствуетъ указанному въ курсѣ Basset (A treatise on hydrodynamics v. II, p. 87—88) съ помощiю значительно болѣе сложнаго анализа.