О ДВИЖЕНІИ МАЯТНИКА

СЪ ТРЕНІЕМЪ

ВЪ ТОЧКѢ ПРИВѢСА.

Н. Е. Жуковскаго.

Отдѣльный оттискъ изъ VII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.

МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Кудринская улица, д. Кирѣевой.
1895.

О ДВИЖЕНІИ МАЯТНИКА

СЪ ТРЕНІЕМЪ

ВЪ ТОЧКѢ ПРИВѢСА.

Н. Е. Жуковскаго.

Отдѣльный оттискъ изъ VII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.

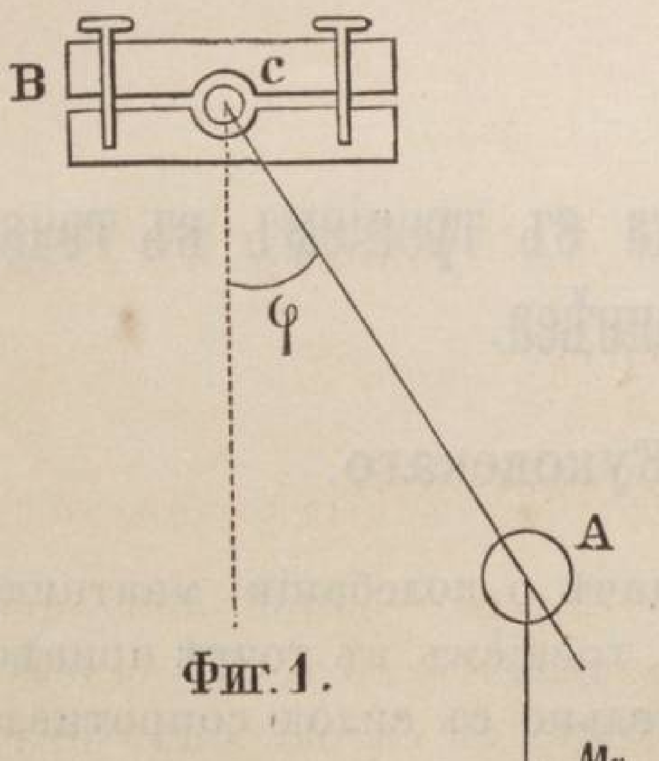
МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Кудринская улица, д. Кирѣевой.
1895.

О движенiи маятника съ тренiемъ въ точкѣ привѣса.

Н. Е. Жуковскаго.

Въ обыкновенной задачѣ о колебанiи маятника, подвѣшеннаго на ножѣ, тренiемъ въ точкѣ привѣса пренебрегаютъ сравнительно съ силою сопротивленiя воздуха, которая является главнымъ факторомъ въ явленiи затуханiя колебанiй. Но существуютъ задачи практики, въ которыхъ точкою привѣса маятника является шипъ, зажатый въ подшипникахъ, и тренiе въ точкѣ привѣса развивается значительное. Таковы задачи о колебанiи балансировъ, спускныхъ аппаратовъ и т. д. Любопытно указать, что въ этихъ задачахъ время колебанiя не зависитъ отъ тренiя въ подшипникахъ и остается равнымъ времени колебанiя маятника безъ тренiя, даже въ тѣхъ случаяхъ, когда, пройдя малый путь, маятникъ останавливается, не достигнувъ своего положенiя равновѣсiя (равновѣсiе безъ тренiя).

Анализъ разсматриваемаго вопроса чрезвычайно простъ. Движущею силою можетъ быть или вѣсъ маятника, или сила дѣйствiя пружины. Мы будемъ разсматривать первое предположеніе, замѣтивъ, что для перехода ко второму слѣдуетъ только замѣнить статическій моментъ силы вѣса статическимъ моментомъ силы дѣйствія пружины.



Фиг. 1.

Пусть (фиг. 1) шипъ C физическаго маятника AC, имѣющаго массу M, зажатъвъ подшипникахъ B такъ, что на окружности шипа развивается сила тренія F. Отклоняемъ маятникъ отъ вертикали на уголъ φ_0, удовлетворяющій условію:

$$Mga\, sn\varphi_0 > Fr, \quad (1)$$

гдѣ g напряженіе тяжести, a разстояніе отъ центра тяжести до центра шипа и r радіусъ шипа.

Предоставленный дѣйствію тяжести маятникъ начнетъ опускаться внизъ, причемъ измѣненіе угла φ, образуемаго имъ съ вертикалью, выразится извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$k \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = Mga\, sn\varphi - Fr,$$

гдѣ k моментъ инерціи маятника относительно оси шипа. Считая уголъ φ малымъ (Такъ какъ моментъ дѣйствія пружины пропорціоналенъ углу ея крученія, то при дѣйствіи пружины этого ограниченія не нужно), напишемъ данное дифференціальное уравненіе въ видѣ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{Mga}{k}\varphi-\frac{Fr}{k}=0$$

и приведемъ его посредствомъ подстановки:

$$\varphi=\theta+\frac{Fr}{Mga} \tag{2}$$

къ уравненію безъ послѣдней части. Это уравненіе будетъ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Mga}{k}\theta=0; \tag{3}$$

интегрируя его, найдемъ при данныхъ начальныхъ условіяхъ, что

$$\theta=\theta_0\, cs\left(t\sqrt{\frac{Mga}{k}}\right), \tag{4}$$

гдѣ

$$\theta_0=\varphi_0-\frac{Fr}{Mga}.$$

Формулы (4) и (2) приводятъ насъ къ слѣдующимъ уравненіямъ, разрѣшающимъ предложенную задачу:

$$\varphi=\frac{Fr}{Mga}+\left(\varphi_0-\frac{Fr}{Mga}\right)cs\left(t\sqrt{\frac{Mga}{k}}\right), \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\sqrt{\frac{Mga}{k}}\left(\varphi_0-\frac{Fr}{Mga}\right)sn\left(t\sqrt{\frac{Mga}{k}}\right). \tag{6}$$

Изъ уравненія (6) заключаемъ, что *маятникъ будетъ останавливаться чрезъ промежутки временъ:*

$$T=\pi\sqrt{\frac{k}{Mga}}, \tag{7}$$

равные временамъ колебанія маятника безъ тренія.

Изъ уравненія (5) видимъ, что первая остановка маятника произойдетъ при амплитудѣ:

$$\varphi_1 = -\varphi_0 + \frac{2Fr}{Mga}. \tag{8}$$

По формулѣ (1) слѣдуетъ, что

$$\varphi_0 > \frac{Fr}{Mga}; \tag{9}$$

если кромѣ этого

$$\varphi_0 < \frac{2Fr}{Mga},$$

то φ_1 будетъ положительно, и маятникъ не дойдетъ до вертикальнаго положенія. Остановившись въ положеніи φ_1, маятникъ прекратитъ свое движеніе, такъ какъ на основаніи формулъ (8) и (9)

$$\varphi_1 < \frac{Fr}{Mga},$$

т. е. моментъ силы вѣса менѣе момента силы тренія.

Если

$$\varphi_1 > \frac{2Fr}{Mga},$$

то φ_1 будетъ отрицательно, и маятникъ перейдетъ чрезъ вертикаль влѣво. При этомъ, если

$$\varphi_0 < \frac{3Fr}{Mga}, \tag{10}$$

то маятникъ, остановившись слѣва отъ вертикали, прекратитъ свое движенiе, такъ какъ формула (8) на основанiи неравенства (10) даетъ:

$$(-\varphi_1) < \frac{Fr}{Mga}.$$

Если же

$$\varphi_0 > \frac{3Fr}{Mga},$$

то маятникъ начнетъ двигаться вправо и т. д.

Изъ этого разсужденiя видно, что *число колебанiй маятника равно цѣлому числу, наиболѣе близкому къ дроби:*

$$\varphi_0 : \frac{2Fr}{Mga}.$$

При устройствѣ спускныхъ аппаратовъ, въ которыхъ быстрымъ поворотомъ рычага надо открыть или закрыть клапаны, эта дробь должна быть менѣе единицы. Быстрота дѣйствiя аппарата увеличивается чрезъ увеличиванiе статическаго момента Mga движущей силы, а отнюдь не чрезъ уменьшенiе силы тренiя, такъ какъ это уменьшенiе, не влiяя на время колебанiя, вноситъ вредное дрожанiе спускного рычага.