КЪ ВОПРОСУ

О РАЗРѢЗАНІИ ВИХРЕВЫХЪ ШНУРОВЪ.

Н. Е. Жуковскаго,

Профессора Московскаго Университета.

МОСКВА.

1894.

КЪ ВОПРОСУ

О РАЗРѢЗАНІИ ВИХРЕВЫХЪ ШНУРОВЪ.

Н. Е. Жуковскаго,

Профессора Московскаго Университета.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1894

Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при
Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.
Математическій Сборникъ, Т. XVII.

КЪ ВОПРОСУ О РАЗРѢЗАНІИ ВИХРЕВЫХЪ ШНУРОВЪ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Сообщено на IX съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей 1894 г. января 8).

§ 1. Рядомъ съ доказательствомъ невозможности образованія въ жидкости безъ тренія новыхъ вихрей, высказывается обыкновенно положеніе о невозможности раздѣленія вихреваго шнура на части—о невозможности его разрѣзанія. Это послѣднее положеніе, насколько мнѣ извѣстно, не было обстоятельно теоретически изслѣдовано и опирается болѣе на опыты Томсона съ дымными вихревыми кольцами, которыя уклоняются отъ приближаемаго къ нимъ ножа.

Но слѣдуетъ замѣтить, что при такихъ опытахъ все-таки является возможность получить въ продолженіе нѣкотораго времени вихревое кольцо разрѣзаннымъ на двѣ половины. Стоитъ только пустить его такъ, чтобы остріе ножа направлялось по діаметру кольца; тогда, набѣжавъ на ножъ, кольцо раздѣлится на два полукольца, опирающіяся своими концами на бока ножа. Эти полукольца, проскользя по ножу, возсоединятся опять въ вихревое кольцо (такой опытъ мы много разъ демонстрировали).

Рѣзкое уклоненіе вихреваго кольца отъ подносимаго ножа собственно замѣчается въ томъ случаѣ, когда мы желаемъ разрѣзать кольцо, поднося ножъ сбоку.

Было бы весьма интересно изслѣдовать этотъ вопросъ теоретически, т.-е. рѣшить задачу о движенiи вихреваго кольца вблизи острiя клина, погруженнаго въ жидкую массу но задача эта очень трудная. Въ виду трудности задачи въ трехъ измѣренiяхъ мы предлагаемъ здѣсь рѣшенiе аналогичной задачи въ двухъ измѣренiяхъ, которую ставимъ такъ: изслѣдовать движенiе прямолинейнаго вихреваго шнура вблизи острiя погруженнаго въ жидкость клина, причемъ острiе клина направлено параллельно оси вихреваго шнура.

§ 2. Выведемъ сначала нѣкоторыя общiя формулы о движенiи центра вихревой площадки (нормальнаго сѣченiя шнура). Предположимъ, что теченiе несжимаемой жидкости въ двухъ измѣренiяхъ характеризуется формулами:

$$u = \frac{d\psi}{dy}, \qquad v = -\frac{d\psi}{dx}, \tag{1}$$

гдѣ u и v проекцiи скорости жидкости на нѣкоторыя прямоугольныя оси координатъ x, y, а

$$\psi = const.$$

даетъ уравненiя линiй тока. Во всѣхъ точкахъ жидкости внѣ вихревыхъ площадокъ функцiя ψ удовлетворяетъ условiю

$$\Delta_2 \psi = 0,$$

а на вихревыхъ площадкахъ даетъ:

$$\Delta_2 \psi = 2\omega,$$

гдѣ ω угловая скорость частицы жидкости, считаемая положительной при вращенiи по солнцу.

Выдѣлимъ мысленно одну вихревую площадку и разобьемъ функцiю ψ на двѣ части, изъ которыхъ часть ψ_1 зависитъ отъ граничныхъ условiй и отъ влiянiя всѣхъ вихревыхъ площадокъ, кромѣ первой, а остающаяся часть зависитъ только отъ влiянiя первой вихревой площадки. Тогда .

$$\psi=\psi_1+\frac{1}{\pi}\iint\omega\, lg\, R\, d\sigma, \tag{2}$$

гдѣ R есть разстояніе разсматриваемой точки жидкости отъ элемента площади $d\sigma$ выдѣленной площадки, а двойная интеграція распространяется на всю площадь этой площадки.

Составимъ, какъ это дѣлаетъ Lamb *), выраженія компонентовъ скорости центра тяжести разсматриваемой площадки въ предположеніи, что по ней распредѣлена матерія съ плотностью ω. Называя чрезъ x_1, y_1 координаты упомянутаго центра тяжести, найдемъ по форм. (1) и (2):

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{k}\left\{\iint\frac{d\psi_1}{dy}\,\omega d\sigma+\frac{1}{\pi}\iiiint\frac{\omega\omega'}{R}(y-y')d\sigma d\sigma'\right\},$$

$$-\frac{dy_1}{dt}=\frac{1}{k}\left\{\iint\frac{d\psi_1}{dx}\,\omega d\sigma+\frac{1}{\pi}\iiiint\frac{\omega\omega'}{R}(x-x')d\sigma d\sigma'\right\},$$

гдѣ

$$k=\iint\omega\, d\sigma$$

представляетъ напряженіе разсматриваемаго вихреваго шнура, или половину циркуляціи скорости по охватывающему его контуру. Четырекратный интегралъ въ первой формулѣ берется два раза по площади разсматриваемой площадки, и такъ какъ въ немъ всякому элементу

$$\frac{\omega\omega' d\sigma d\sigma'}{R}(y-y')$$

соотвѣтствуетъ другой элементъ

$$\frac{\omega\omega' d\sigma d\sigma'}{R}(y'-y)$$

съ обратнымъ знакомъ, то весь этотъ четырекратный интегралъ обращается въ нуль. Также обращается въ нуль и четырекратный интегралъ второй формулы.

Мы получаемъ:

---

*) *Lamb.* A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids. § 138.

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{k} \iint \frac{d\psi_1}{dy} \omega d\sigma,$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{1}{k} \iint \frac{d\psi_1}{dx} \omega d\sigma. \tag{3}$$

Переходимъ къ предположенію, что площадь нормальнаго сѣченія вихреваго шнура исчезающе мала, а напряженіе вихря k конечно.

Такъ какъ функція ψ_1 зависитъ только отъ граничныхъ условій и вліянія вихревыхъ площадокъ, кромѣ разсматриваемой, то она вмѣстѣ съ своими производными остается непрерывной и конечной вблизи первой площадки и при вступленіи внутрь ея. Мы можемъ въ форм. (3) вынести производныя ψ_1 за знаки интеграловъ и приписать имъ значенія, соотвѣтствующія точкѣ, лежащей внѣ площадки на разстояніи весьма близкомъ отъ ея центра. Получимъ:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\psi_1}{dy}, \ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{d\psi_1}{dx}. \tag{4}$$

Опредѣлимъ ψ_1 по формулѣ (2), предполагая, что размѣры площадки сравнительно съ разстояніемъ отъ центра площадки точки, для которой опредѣляется ψ_1 суть малыя величины высшаго порядка.

Въ этомъ предположеніи R можно считать за разстояніе центра тяжести площадки отъ разсматриваемой точки и вынести lgR въ формулѣ (2) за знакъ интеграла:

$$\psi_1 = \psi - \frac{k}{\pi} lgR. \tag{5}$$

Подставляя въ уравненіи (4), найдемъ для скоростей центра тяжести площадки, который мы будемъ звать *центромъ вихря*, формулы:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dy}\left(\psi - \frac{k}{\pi} lg\, R\right),$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{d}{dx}\left(\psi - \frac{k}{\pi} lg\, R\right). \tag{6}$$

Здѣсь надо во вторыхъ частяхъ сначала взять производныя по y и x, а потомъ положить $x=x_1$, $y=y_1$. Предположимъ теперь, что разсматриваемое теченіе жидкости въ двухъ измѣреніяхъ, содержащее безконечно малыя вихревыя площадки, изъ которыхъ одна имѣетъ координаты x_1, y_1, характеризуется функціею мнимаго перемѣннаго $z=x+yi$, которую мы разбиваемъ на дѣйствительную и мнимую часть:

$$F(x+yi)=\varphi+\psi i.$$

Умножаемъ второе уравненіе (6) на i и вычитаемъ изъ перваго:

$$\frac{d}{dt}(x_1-y_1 i)=\Big/^{z=z_1}\left\{\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}\,i-\frac{k}{\pi}\left(\frac{d\,lgR}{dy}+\frac{d\,lg\,R}{dx}\,i\right)\right\}, \qquad (7)$$

гдѣ подстановка показываетъ, что послѣ взятія производныхъ надо вездѣ z замѣнить на z_1, т.-е. x и y на x_1 и y_1.

На основаніи извѣстныхъ свойствъ дѣйствительной и мнимой части функціи мнимаго перемѣннаго имѣемъ:

$$\frac{d\psi}{dy}=\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d\,lg\,R}{dy}=\frac{d}{dy}\,lg\sqrt{(x-x_1)^2+(y-x_1)^2}=\frac{d}{dx}arctg\,\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (7) преобразуется въ слѣдующую основную формулу для опредѣленія движенія центра вихря:

$$\frac{d}{dt}(x_1-y_1 i)=\Big/^{z=z_1}\frac{d}{dz}\left(F-\frac{k}{\pi}\,lg\,(z-z_1)\right). \qquad (8)$$

§ 3. Приложимъ формулу (8) къ двумъ простымъ примѣрамъ, которые лягутъ въ основаніе разрѣшенія интересующей насъ задачи.

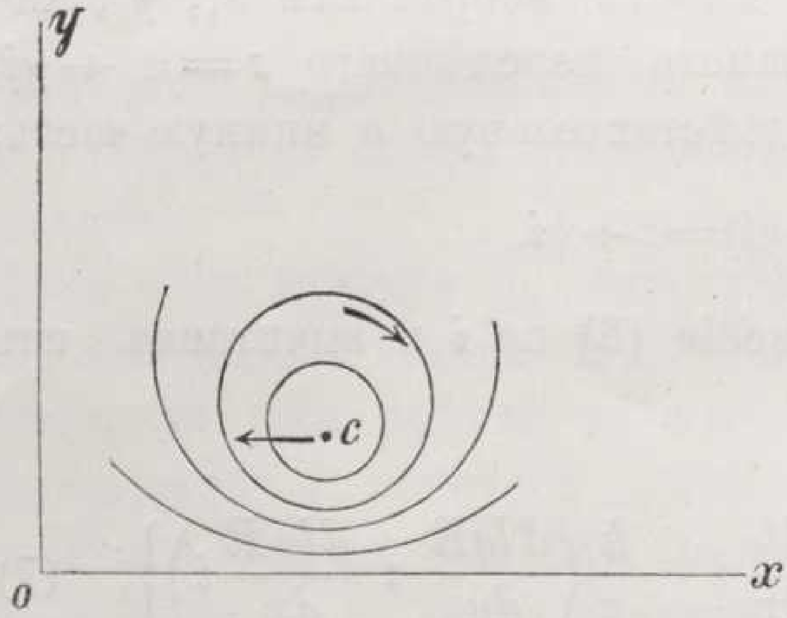
Пусть дано:

$$F=\frac{ki}{\pi}\,lg\,\frac{z-z_1}{z-z_2}, \qquad (9)$$

гдѣ

$$z_1 = x_1 + y_1 i\,,$$

$$z_2 = x_1 - y_1 i\,.$$



Фиг. 1.

Точки (z_1) и (z_2) являются центрами двухъ вихревыхъ площадокъ, имѣющихъ напряженія вихря, равныя k и $-k$. Ось ox есть одна изъ линій тока, такъ что она можетъ быть принята за неподвижную границу и все теченіе можетъ быть разсматриваемо на полуплоскости. Линіи токовъ этого теченія будутъ (фиг. 1) окружности, охватывающія центръ вихря C (точку z_1) и приближающіяся, расширяясь, къ прямой ox. Скорость во всякой точкѣ теченія на основаніи уравненія (1) находится по формулѣ:

$$u - vi = \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} i = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dx} i$$

или

$$u - vi = \frac{dF}{dz}\,. \tag{10}$$

Для нашего случая эта формула даетъ:

$$u - vi = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right)$$

и показываетъ, что при $z = \infty$ скорость равна нулю; всѣ точки на конечномъ разстояніи отъ C имѣютъ скорости неравныя нулю.

Подставляя значеніе F изъ формулы (9) въ формулу (8), находимъ для движенія центра вихря уравненіе:

$$\frac{d}{dt}\,[x_1 - y_1 i] = -\frac{k}{2\pi y_1}\,,$$

откуда

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \tag{11}$$

Такимъ образомъ центръ вихря C будетъ двигаться параллельно оси ox съ постоянною скоростью, которая направлена отъ x къ o, если вращеніе вихря совершается по солнцу.

Для втораго примѣра возьмемъ:

$$F = wz + \frac{ki}{\pi} lg \frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{12}$$

Теченіе жидкости, представляемое этою функціею, имѣетъ тѣ же вихревые центры z_1 и z_2, какъ и предыдущее теченіе, и тоже расположено симметрично относительно оси ox, такъ что эта ось можетъ быть принята за неподвижную границу и все теченіе можетъ быть разсматриваемо на полуплоскости.

Скорость въ безконечности направлена параллельно оси ox и равна w, потому что на основаніи формулъ (10) и (12):

$$u - vi = w + \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right), \tag{13}$$

гдѣ вторая часть обращается въ w при $z=\infty$.

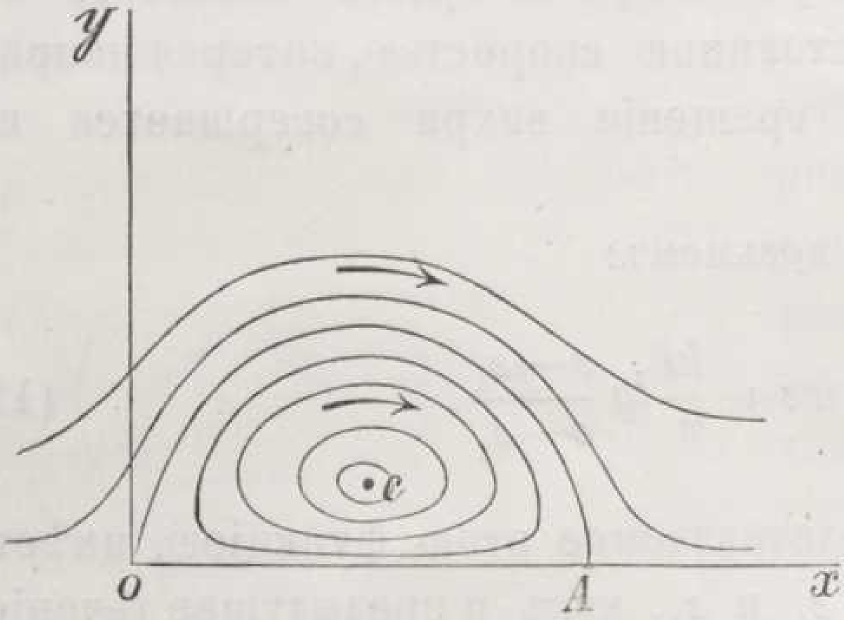
Въ разсматриваемомъ теченіи существуютъ двѣ критическія точки съ нулевою скоростью. Предполагая, что одна изъ этихъ точекъ лежитъ въ началѣ координатъ, мы должны обратить въ нуль вторую часть формулы (13) положеніемъ $z=0$. Это даетъ

$$w = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{2ky_1}{\pi(x_1{}^2 + y_1{}^2)}. \tag{14}$$

На основаніи равенства (14) формула (13) можетъ быть написана въ видѣ

$$u - vi = \frac{kzi}{\pi}\left(\frac{1}{z_1(z-z_1)} - \frac{1}{z_2(z-z_2)}\right), \tag{15}$$

гдѣ вторая часть, кромѣ $z=0$, обращается еще въ нуль при $z=2x_1$. Такимъ образомъ другая критическая точка нулевой скорости будетъ лежать на оси ox на разстояніи $2x_1$ отъ начала координатъ.



Фиг. 2.

Линіи токовъ разсматриваемаго теченія расположатся, какъ представлено на фиг. (2), на которой C есть центръ вихря, а точки o и A — критическія точки нулевой скорости.

Движеніе центра вихря C на основаніи формулъ (8) и (12) найдется изъ уравненія:

$$\frac{d}{dt}(x_1-y_1 i)=w-\frac{k}{2\pi y_1}\,,$$

которое даетъ:

$$\frac{dx_1}{dt}=w-\frac{k}{2\pi y_1}\,,\ \frac{dy_1}{dt}=0. \tag{16}$$

Такимъ образомъ и здѣсь центръ вихря будетъ двигаться параллельно оси ox съ постоянною скоростью. Эта скорость имѣетъ направленіе отъ o къ x, если

$$w>\frac{k}{2\pi y_1}\,,$$

и наоборотъ.

Вмѣстѣ съ центромъ вихря C перемѣщаются по оси ox съ тою же скоростью и критическія точки o и A.

Разстояніе $2x_1$ между этими точками въ частномъ случаѣ при

$$w=\frac{2k}{\pi y_1}$$

обращается въ нуль, причемъ въ такой слившейся критической точкѣ линіи токовъ пересѣкаютъ ось ox уже не подъ прямыми углами, какъ на фиг. (2), а подъ углами въ 45°.

§ 4. Рѣшеніе поставленной нами задачи получается съ помощію конформнаго преобразованія двухъ вышеописанныхъ теченій жидкости. Поэтому, прежде нежели приступить къ этому рѣшенію, посмотримъ, какъ преобразуется формула (8), когда теченіе, опредѣляемое функціею $\Phi(\zeta)$ на плоскости мнимаго перемѣннаго $\zeta=\xi+\eta i$, преобразуется въ теченіе, опредѣленное на плоскости перемѣннаго z функціею $F(z)$, причемъ между точками первой и второй плоскости установлено соотвѣтствіе съ помощію уравненія:

$$\zeta=f(z), \tag{17}$$

вслѣдствіе чего

$$\Phi\,(f\,(z))=F(z).$$

Соотвѣтствіе (17) установлено такъ, что центры вихря второго теченія соотвѣтствуютъ центрамъ вихря перваго и что въ разсматриваемыхъ границахъ каждой точкѣ одного теченія соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка другого. Предполагая, что центру вихря $z_1=x_1+y_1 i$ соотвѣтствуетъ въ преобразованномъ теченіи центръ вихря $\zeta_1=\xi_1+\eta_1 i$, напишемъ для движенія этого второго центра формулу (8) въ такомъ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\Big/^{\zeta=\zeta_1}\frac{d}{d\zeta}\left(\Phi(\zeta)-\frac{ki}{\pi}\,lg(\zeta-\zeta_1)\right).$$

Величину, стоящую во второй части въ скобкахъ, представимъ сначала въ видѣ функціи z. Для этого замѣняемъ $\Phi(\zeta)$ на $F(z)$ и полагаемъ, что

$$lg(\zeta-\zeta_1)=lg\,(f(z)-f\,(z_1)).$$

Считая въ послѣдней формулѣ z за величину близкую къ z_1, сдѣлаемъ разложеніе:

$$lg(f(z)-f(z_1))=lg\left(f'(z_1)(z-z_1)+\frac{f''(z)}{2}(z-z_1)^2+\ ..\right)$$

$$=lg f'(z_1)+lg\,(z-z_1)+lg\left(1+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\ldots\right)$$

$$=lg f'(z_1)+lg(z-z_1)+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\ldots$$

По подстановкѣ получаемъ:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\Big/^{\zeta=\zeta_1}\left[\frac{d}{dz}\left(F-\frac{ki}{\pi}lg\,(z-z_1)\right)-\frac{ki}{\pi}\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}\right]\frac{dz}{d\zeta}. \tag{18}$$

§ 5. Конформное преобразованіе, которымъ мы будемъ пользоваться, характеризуется подстановкою:

$$z=\zeta^\mu, \tag{19}$$

которая по введеніи полярныхъ координатъ

$$x=r\,cs\alpha,\quad \xi=\rho\,cs\theta,$$
$$y=r\,sn\alpha,\quad \eta=\rho\,sn\theta,$$

даетъ соотношеніе:

$$\rho=\sqrt[\mu]{r},\quad \theta=\frac{\alpha}{\mu}. \tag{20}$$

Это показываетъ, что полярныя координаты точки плоскости $\xi\eta$ получаются изъ полярныхъ координатъ соотвѣтственной точки на плоскости xy чрезъ раздѣленіе полярнаго угла на μ и чрезъ измѣненія величины радіуса вектора посредствомъ извлеченія изъ нея корня степени μ.

Приложимъ такое преобразованіе къ теченію, представленному формулою (9), считая при этомъ $\mu>1$.

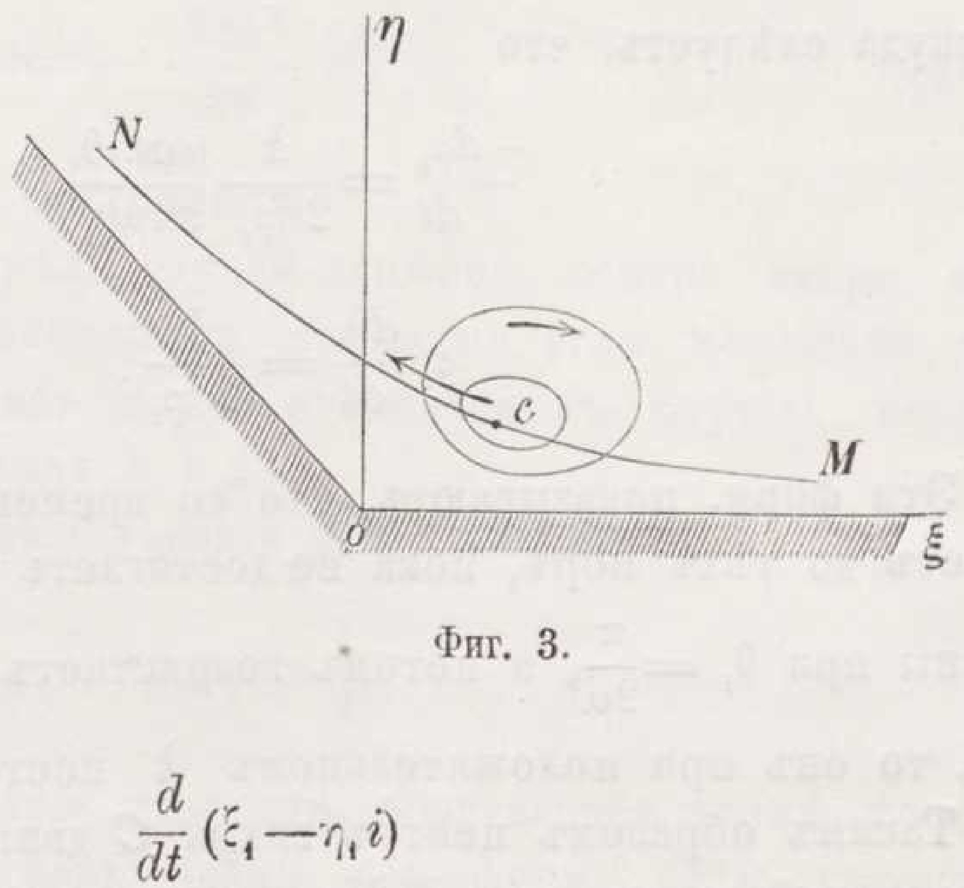
Получимъ теченіе, опредѣленное формулою:

$$\Phi=\frac{ki}{\pi}lg\frac{\zeta^\mu-\zeta_1^{\ \mu}}{\zeta^\mu-\zeta_2^{\ \mu}}, \tag{21}$$

въ которомъ неподвижною границею будетъ уже не прямая стѣнка, а стороны угла меньшаго двухъ прямыхъ и равнаго $\frac{\pi}{\mu}$. Пользуясь указаннымъ правиломъ соотвѣтствія, мы можемъ изъ линій тока на фиг. (1) получить линіи тока новаго теченія, представленныя на фиг. (2). Скорость жидкости въ этомъ теченіи при вершинѣ угла и въ безконечности будетъ равна нулю, потому что производная (форм. 10)

$$\frac{dF}{d\zeta}=\frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\zeta}=\frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta^\mu-\zeta_1{}^\mu}-\frac{1}{\zeta^\mu-\zeta_2{}^\mu}\right)\mu\zeta^{\mu-1} \tag{22}$$

обращается въ нуль при $\zeta=0$ и при $\zeta=\infty$.



Фиг. 3.

Переходимъ къ изслѣдованію движенія центра вихря C, которому по форм. (21) соотвѣтствуетъ напряженіе k.

Выразимъ

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)$$

въ полярныхъ координатахъ. Подставляя сюда

$$\xi_1=\rho_1 cs\theta_1,\ \eta_1=\rho_1 sn\theta_1,$$

находимъ, что

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=(cs\theta_1-i\,sn\theta_1)\left(\frac{d\rho_1}{dt}-i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

Такъ какъ

$$\zeta_2=\rho_1(cs\theta_1-i\,sn\theta_1),$$

то написанное выраженіе можно представить еще такъ:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}-i\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

На основаніи этого замѣчанія и форм. (18) получаемъ:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}-i\frac{d\theta_1}{dt}\right)=-\frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{\zeta_1^{\mu-1}}{\zeta_1^{\mu}-\zeta_2^{\mu}}+\frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right\}.\quad(23)$$

Пользуясь соотношеніемъ $\zeta_1\zeta_2=\rho_1^2$ и замѣняя всѣ координаты на полярныя, получимъ:

$$\frac{d\rho_1}{dt}-i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{k}{2\pi\rho_1}\left(-\frac{\mu\, cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}-i\right).$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$\begin{aligned}-\frac{d\rho_1}{dt}&=\frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1},\\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt}&=\frac{k}{2\pi\rho_1}.\end{aligned}\quad(24)$$

Эти форм. показываютъ, что со временемъ радіусъ ρ_1 убываетъ до тѣхъ поръ, пока не достигаетъ наименьшей величины при $\theta_1=\frac{\pi}{2\mu}$, а потомъ возрастаетъ. Что касается угла θ_1, то онъ при положительномъ k постоянно возрастаетъ.

Такимъ образомъ центръ вихря C двигается (фиг. 3) по нѣкоторой траекторіи MN въ направленіи отъ N къ M, если вращеніе вихря совершается по солнцу.

Чтобы составить уравненіе траекторіи MN умножаемъ первое изъ ур. (24) на $\rho_1 d\theta_1$, второе на $d\rho_1$ и складываемъ:

$$\frac{\mu cs\mu\theta_1\, d\theta_1}{sn\mu\,\theta_1}+\frac{d\rho_1}{\rho_1}=0.$$

Интегрируя, находимъ *):

*) Это уравненіе получаетъ Gröbli въ сочиненіи „Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfaden“ для случая цѣлаго μ и Greenhill въ сочиненіи „Plane Vortex Motion“ (Quart. Journ. Vol. XV § 6) для случая всякаго $\mu>1$.

$$\rho_1 sn\mu\theta_1 = \lambda, \tag{25}$$

гдѣ λ произвольное постоянное.

Кривыя, представляемыя этимъ ур., имѣютъ асимптотами стороны угла, ограничивающаго разсматриваемое теченіе.

Чтобы установить связь между θ_1 и временемъ, представляемъ второе ур. (24) на основаніи (25) въ видѣ:

$$dt = \frac{2\pi\lambda^2}{k}\frac{d\theta_1}{sn^2\mu\theta_1}$$

и совершаемъ интегрированіе:

$$t = \tau - \frac{2\pi\lambda^2}{k\mu} ctg\, \mu\theta_1, \tag{26}$$

гдѣ τ произвольное постоянное.

§ 6. Мы разсмотрѣли случай движенія центра вихря въ пространствѣ, ограниченномъ сторонами угла меньшаго π, но интересующая насъ задача относится къ случаю, когда уголъ заключенъ между π и 2π.

Если бы мы въ изслѣдованіи § 5 положили

$$1 > \mu > \frac{1}{2},$$

то получили бы теченіе жидкости, обтекающее клинъ, но на острія этого клина, какъ видно изъ форм. (22), скорость была бы безконечно велика.

Для полученія теченія, ограниченнаго боками клина и дающаго при остріи критическую точку нулевой скорости, сдѣлаемъ конформное преобразованіе (19) надъ теченіемъ жидкости, представленнымъ форм. (12).

Вмѣсто ур. (22) мы получимъ въ этомъ случаѣ на основаніи форм. (15) нижеслѣдующее равенство:

$$\frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_1{}^\mu)\ \zeta_1{}^\mu} - \frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_2{}^\mu)\zeta_2{}^\mu}\right\}\zeta^{2\mu-1}. \tag{27}$$

Здѣсь вторая часть обращается въ нуль при $\zeta = 0$ вслѣдствіе $\mu > \frac{1}{2}$, а также обращается въ нуль при $\zeta = \infty$ вслѣдствіе $\mu < 1$. Кромѣ этого на сторонѣ клина имѣется еще нѣкоторая критическая точка нулевой скорости, потому что вторая часть форм. (27) обращается въ нуль при

$$\zeta^\mu = 2\rho_1{}^\mu cs\mu\theta_1 .$$

Преобразуя линіи токовъ, изображенныя на фиг. (2), съ помощью соотвѣтствія (20), получимъ линіи токовъ, изображенныя на фиг. (4). Одна критическая точка нулевой скорости будетъ въ вершинѣ клина o, чрезъ нее пройдетъ линія тока въ направленіи биссектора угла клина.

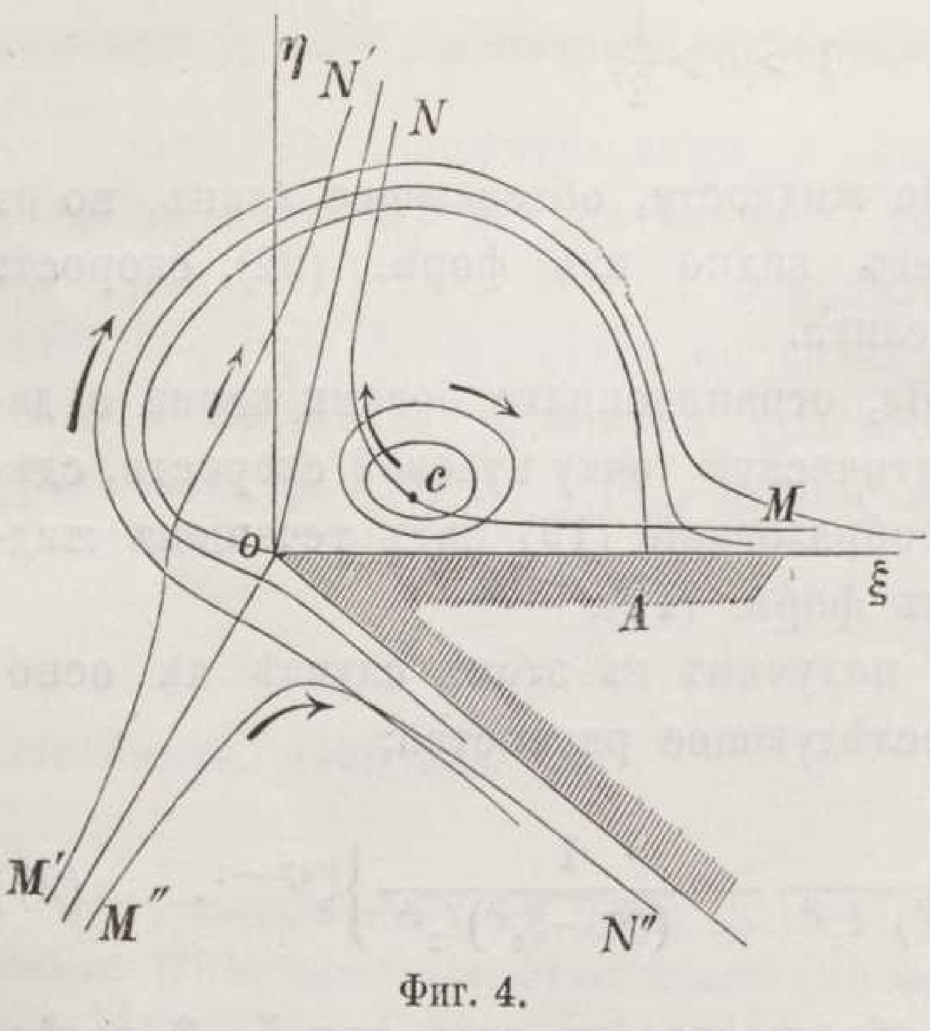
Другая критическая точка A нулевой скорости будетъ лежать на сторонѣ клина и отстоять отъ его вершины на разстояніе:

$$\delta = \rho_1 (2cs\mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}} .$$

Здѣсь слѣдуетъ взять абсолютную величину косинуса. При этомъ, если

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2\mu},$$

то точку A надо взять на верхней сторонѣ клина, а если имѣетъ мѣсто обратное неравенство, то—на нижней.



Фиг. 4.

Обращаемся къ изслѣдовіянію движенія центра вихря C. Основная форм., опредѣляющая это движеніе, будетъ отличаться отъ форм. (23) добавочнымъ членомъ, зависящимъ отъ w. Приписывая этотъ членъ и выражая w по форм. (14), найдемъ:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}-i\frac{d\theta_1}{dt}\right)=-\frac{k\mu i}{\pi}\left(\frac{\zeta_1^{\mu-1}}{\zeta_1^{\mu}-\zeta_2^{\mu}}+\frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right)$$

$$+\frac{k\mu i}{\pi}\zeta_1^{\mu-1}\left(\frac{1}{\zeta_1^{\mu}}-\frac{1}{\zeta_2^{\mu}}\right). \tag{29}$$

Вводя сюда полярныя координаты и дѣлая нѣкоторыя простыя преобразованія, получаемъ:

$$\frac{d\rho_1}{dt}-i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{k}{2\pi\rho_1}\left\{\left(-\frac{\mu cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}+4\mu cs\mu\theta_1\, sn\mu\theta_1\right)\right.$$

$$\left.-(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)\,i\right\},$$

откуда:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_1}{dt}&=\frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}(1-4sn^2\mu\theta_1),\\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt}&=\frac{k}{2\pi\rho_1}(1-4\mu sn^2\mu\theta_1).\end{aligned}\tag{30}$$

Послѣдняя изъ этихъ форм. показываетъ, что при положительномъ k уголъ θ_1 возрастаетъ со временемъ всякій разъ, какъ уголъ θ_1 заключенъ между 0 и β, причемъ β опредѣляется изъ уравненія:

$$sn\mu\beta=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}.$$

Если уголъ θ_1 заключенъ между β и $\frac{\pi}{\mu}-\beta$, то онъ убываетъ со временемъ; наконецъ, если онъ заключенъ между $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ и $\frac{\pi}{\mu}$, то онъ опять возрастаетъ со временемъ.

Умножаемъ первое ур. (30) на $\rho_1 d\theta_1$, второе на $d\rho_1$ и складываемъ:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1}(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)+\frac{(1-4sn^2\mu\theta_1)dsn\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}=0.$$

Раздѣляемъ перемѣнныя и дѣлаемъ нѣкоторыя преобразованія:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1}+\frac{dsn\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}-\frac{4(1-\mu)sn\mu\theta_1 dsn\mu\theta_1}{1-4\mu sn^2\mu\theta_1}=0.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$\rho_1 sn\mu\theta_1(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)^{\frac{1-\mu}{2\mu}}=\lambda, \tag{31}$$

гдѣ λ произвольное постоянное.

Ур. (31) показываетъ намъ, что радіусъ ρ_1 убываетъ отъ ∞ и потомъ опять возрастаетъ до ∞ три раза: на промежуткѣ измѣненія θ_1 отъ 0 до β, отъ β до $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ и отъ $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ до $\frac{\pi}{\mu}$. Это соотвѣтствуетъ тремъ вѣтвямъ траекторій MN, $M'N'$, $M'N'$. Асимптомами этихъ траекторій являются стороны клина и прямыя, наклоненныя къ сторонамъ клина подъ угломъ β.

На основаніи сказаннаго выше объ измѣненіи угла θ_1 со временемъ видно, что центръ вихря, вращающагося по солнцу, движется по упомянутымъ вѣтвямъ въ направленіи указанномъ на фиг. (4) стрѣлками.

Для опредѣленія связи между угломъ θ_1 и временемъ исключаемъ ρ_1 изъ втораго ур. (30) съ помощью ур. (31):

$$dt=\frac{2\pi\lambda^2}{k}\frac{d\theta_1}{sn^2\mu\theta_1\,(1-4\,\mu sn^2\mu\,\theta_1)^{\frac{1}{\mu}}}.$$

Вводя новое перемѣнное

$$ctg\mu\theta_1=\gamma,$$

получаемъ:

$$t+\tau=\frac{2\pi\lambda^2}{k}\int\frac{d\gamma}{\left(1-\frac{4\mu}{1+\gamma^2}\right)^{\frac{1}{\mu}}}. \tag{32}$$

Вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ центра вихря C будетъ перемѣщаться по сторонѣ клина критическая точка A. При этомъ мѣсто ея будетъ всякій разъ находиться по форм. (28).

Если центръ вихря C движется по траекторіи $M'N'$, то при прохожденіи чрезъ биссекторъ клина, т. е. при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, величина δ проходитъ черезъ нуль и точка A переходитъ съ одной стороны клина на другую.

Разсматривая траекторіи MN, $M'N'$, $M''N''$ центра вихря, замѣчаемъ, что вихревой шнуръ уклоняется отъ подносимаго къ нему острія клина.

§ 7. Отъ клина легко перейти къ случаю весьма тонкаго ножа. Для этого стоитъ только въ форм. предыдущаго параграфа положить $\mu = \frac{1}{2}$.

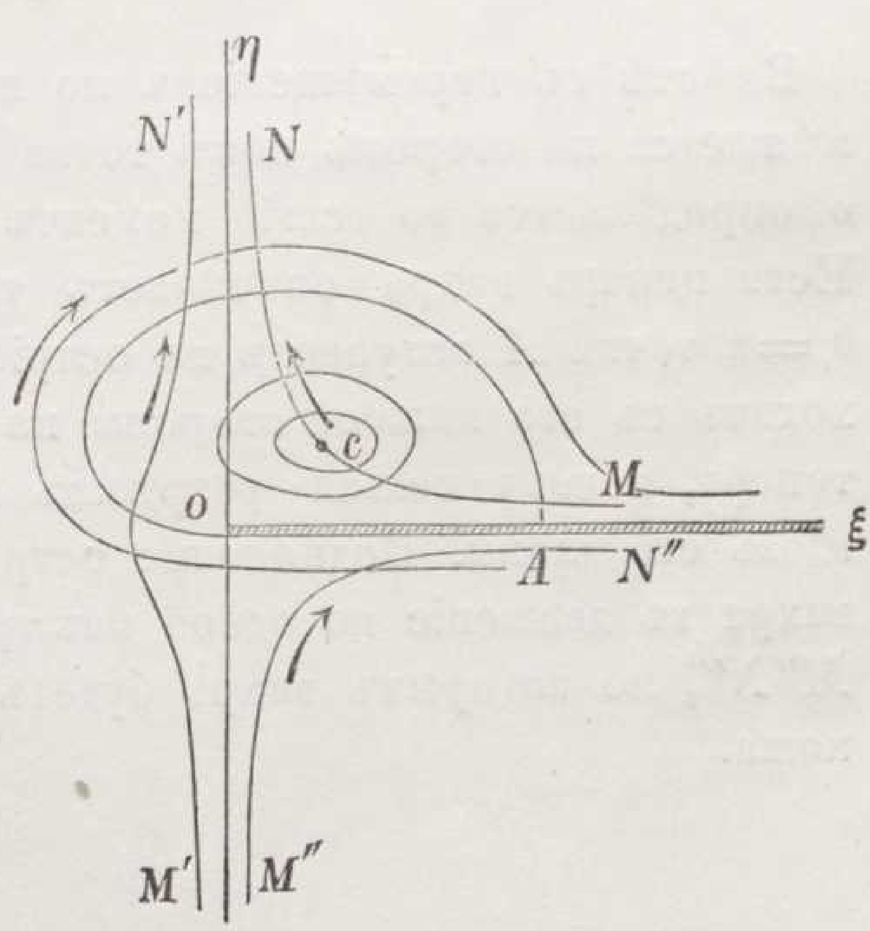
При такомъ положеніи фом. (27) принимаетъ видъ:

$$\frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{ki}{2\pi}\left[\frac{1}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta_1})\sqrt{\zeta_1}} - \frac{1}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta_2})\sqrt{\zeta_2}}\right]. \tag{33}$$

Мы видимъ отсюда, что скорость въ безконечности и въ критической точкѣ A (фиг. 5), отстоящей отъ острія ножа на разстояніе

$$\delta = 4\rho_1 cs^2 \frac{\theta_1}{2}, \tag{34}$$

равна нулю; скорость же на остріи ножа есть конечная величина, ибо при $\zeta = 0$, вторая часть форм. (33) обращается въ



Фиг. 5.

$$-\frac{ksn\,\theta_1}{\pi\rho_1}.$$

Отрицательный знакъ показываетъ, что при $k>0$ и $\theta_1<\pi$ скорость жидкости въ точкѣ o направлена по оси $o\xi$ отъ ξ къ o.

Ур. (31) въ нашемъ частномъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$\rho_1 \, sn \frac{\theta_1}{2} \sqrt{cs\theta_1} = \lambda. \tag{35}$$

Это даетъ намъ вѣтви траекторій центра вихря: MN, $M'N'$, $M''N''$, имѣющія асимптотами оси $o\xi$ и $o\eta$.

Связь между временемъ и угломъ θ_1, выраженная форм. (32), упрощается для предѣльнаго случая такъ:

$$t+\tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \int \left(\frac{\gamma^2+1}{\gamma^2-1}\right)^2 d\gamma$$

или по совершеніи интегрированія:

$$t+\tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \left\{ \gamma - \frac{2\gamma}{\gamma^2-1} + lg \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\} \tag{36}$$

гдѣ τ произвольное постоянное, а

$$\gamma = ctg \frac{\theta_1}{2}.$$

Вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ по плоскости точки C перемѣщается по сторонѣ ножа точка A, разстояніе которой отъ o опредѣляется во всякій моментъ времени по форм. (34). Если центръ вихря описываетъ траекторію $M'N'$, то при $\theta_1=\pi$ точка A вступаетъ на остріе ножа и потомъ переходитъ съ его нижней стороны на верхнюю. Намъ понятно теперь, почему нельзя разрѣзать ножомъ вихревой шнуръ вдоль его длины. Подношеніе острія ножа приведетъ центръ вихря въ движеніе по одной изъ трехъ траекторій MN, $M'N'$ $M''N''$, по которымъ вихрь будетъ всегда убѣгать отъ острія ножа.

Сочиненія Н. Е. Жуковскаго:

1. Кинематика жидкаго тѣла.
2. Случай движенія жидкой площади по инерціи.
3. Sur la percussion des corps
4. Къ вопросу о наибольшемъ ударѣ.
5. Sur un cas particulier de mouvement d'un point materiele.
6. Связь между вопросами о движеніи матерьяльной точки и о равновѣсіи гибкой нити.
7. Къ вопросу о движеніи матерьяльной точки подъ притяженіемъ одного и двухъ центровъ.
8. Описаніе инструмента Кемпе для рѣшенія уравненій высшихъ степеней.
9. О реакціи втекающей и вытекающай жидкости.
10. О прочности движенія.
11. О вліяніи колебаній штатива на время качанія маятника.
12. О характеристическихъ функціяхъ Якоби и Гамильтона.
13. Приложеніе теоріи центровъ ускореній высшихъ порядковъ къ направляющему механизму Чебышева.
14. Упрощенное изложеніе Гауссова способа опредѣленія планетныхъ орбитъ.
15. Объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ въ жидкости.
16. О графическомъ рѣшеніи основнаго уравненія при вычисленіи планетныхъ орбитъ.
17. Геометрическое разъясненіе нѣкоторыхъ вопросовъ теоріи уравненій съ частными производными.
18. О началѣ наименьшаго дѣйствія.
    Sur le principe de la moindre action.
19. Sur une démonstration nouvelle du théorème de Lambert.
20. Sur la construction des courbes syndynamiques et synchroniques.
21. Рѣшеніе одной задачи изъ теоріи кометъ.
22. Выводъ основныхъ формулъ теоріи упругости.
23. Объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ.
24. Объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ (статья вторая).
25. О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородною капельною жидкостью. (Удостоено Московскимъ Университетомъ въ 1886 г. преміи профессора Брашмана).

26. О реакціи втекающей и вытекающей жидкости (статья вторая).
27. О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ тѣлъ.
28. О движеніи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями.
29. Элементарная теорія гироскоповъ.
30. Теоретическое изслѣдованіе о движеніи подпочвенныхъ водъ.
31. О вліяніи давленія на насыщенные водою пески.
32. О формѣ судовъ.
33. Объ артиллерійскихъ снарядахъ Шапеля.
34. Ueber den mittelwerth des kinetischen Potentials.
35. Къ теоріи летанія.
36. Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа для опредѣленія движенія жидкости въ двухъ измѣреніяхъ при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока.
37. О парадоксѣ Дюбюа.
38. Приборъ для опредѣленія коэффиціента вязкости маслъ.
39. Sur un appareil nouveau pour la determination des moments de l'inertie des corps.
40. Условія конечности интеграловъ уравненія $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$.
41. О пареніи птицъ.
42. Опредѣленіе движенія жидкости при какомъ-нибудь условіи, данномъ на линіи тока.
43. Рѣшеніе одной задачи гидростатики.
44. Локсодромическій маятникъ Гесса.
45. О гироскопическомъ шарѣ Д. К. Бобылева.
46. Къ вопросу о давленіи діэлектрическаго газа въ электрическомъ полѣ.
47. О скольженіи ремня на шкивахъ.
48. Къ вопросу о разрѣзаніи вихревыхъ шнуровъ.