

Р 1244

Александръ Карловичу
Эммануилу

Отъ Н. Шапошникова



124404
Провер. 1935 Н. А. Шапошниковъ.

Разборъ статьи Ермакова

„О преподаваніи алгебры“.

Выпускъ первый.

ПРОВЕРЕНО
945

ПРОВЕРЕНО
1952

Дозволено цензурою. Москва, Ноября 3 дня 1893 года.

Н. А. Шапошниковъ.

**Разборъ статьи Ермакова
„О преподаваніи алгебры“.**

Выпускъ первый.

Въ сферѣ нашей отечественной, элементарно-математической литературы проявилось недавно рѣзкое обстоятельство, обратившее на себя вниманіе многихъ. Это обстоятельство настолько характерно съ разныхъ сторонъ, что объ немъ нельзя не поговорить гласно.

Всѣмъ извѣстно, что за послѣдніе годы педагогическая литература по отдѣлу математики представила слѣды обширной дѣятельности. Появилось много сочиненій — методикъ, учебниковъ, задачниковъ. Педагогическіе журналы вмѣстили въ себя рядъ статей по очень разнообразнымъ вопросамъ, рядъ критическихъ рецензій на вышедшія отдѣльными изданіями сочиненія. Объемистые томы общаго содержанія и увѣсистыя книжки повременныхъ изданій дополнялись еще системой мелкихъ, разнородныхъ брошюръ.

Наличный сложный хоръ литературныхъ голосовъ звучалъ вообще не согласно. Однако сказывалась въ немъ нѣкоторая общность направленія, выяснялась довольно опредѣленная характеристика современныхъ педагогическихъ воззрѣній.

Но вотъ, среди этого многоголоснаго, хотя всетаки не шумливаго, хора, особо громкими аккордами прозвучали нѣсколько статей о преподаваніи математики. Авторъ этихъ статей съ необычной энергіей, съ своеобразной проницательностью и съ крайней рѣзкостью поголовныхъ обвиненій разнесъ весь строй современнаго преподаванія арифметики и алгебры. Не ограничиваясь указаніемъ частныхъ недостатковъ, онъ съ ясной откровенностью призналъ ничтожнымъ многое, сдѣланное педагогами раньше. Въ заключеніи своей твердой атаки на корпорацію педагоговъ авторъ съ самодовольствіемъ, нѣсколько неделикатнымъ, объявилъ себя публично руководителемъ всѣхъ преподавателей элементарной математики.

Разумѣется подобный дебютъ, въ виду общеизвѣстнаго разнообразія индивидуальностей, не обратилъ бы на себя общественнаго вниманія. Но въ данномъ случаѣ связалось съ наличнымъ фактомъ одно, побочное, однако важное обстоятельство.

Нельзя не придать особаго значенія тому сопоставленію, что авторъ упомянутыхъ статей, В. П. Ермаковъ — профессоръ матема-

тики университета Св. Владиміра и членъ-корреспондентъ С.-Петербургской академіи наукъ. Званіе, носимое авторомъ, слишкомъ авторитетно для того, чтобы громкія заявленія отъ лица съ такимъ званіемъ могли быть приняты не серьезно.

Вышеуказанное обстоятельство обусловило то, что я внимательно прочелъ эти статьи. Оно же въ связи съ подлиннымъ матеріаломъ статей послужило причиной того, что я счелъ себя вынужденнымъ писать подробно объ этихъ статьяхъ.

Сдѣлаю немедленно одну оговорку. Читателямъ извѣстно, что въ своихъ статьяхъ, отчасти обличительныхъ, г. Ермаковъ съ особой рѣзкостью отзывался о нѣкоторыхъ изъ моихъ сочиненій, затрогивая высказанныя мною въ разное время идеи—частью явно, а преимущественно неявно. Отнюдь не это обстоятельство служить для меня поводомъ къ отвѣту на упомянутыя статьи. Мотивы для этого болѣе общи и въ значительной степени безличны.

Прошу вообще читателей не заходить впередъ въ сужденія и въ интересахъ важности дѣла почтить меня приличной дозой вниманія. На дѣло настоящей рецензіи я смотрю широко и, какъ выяснится во второй части рецензіи, имѣю для этого достаточно вѣскія основанія.

Условія, которыми обставляется достиженіе профессорской кафедры, приучаютъ обыкновенно лицъ, стремящихся къ подобной цѣли, знакомиться съ дѣйствительными данными всякаго вопроса, о которомъ имъ представляется надобность или дается поводъ судить. Тѣ же условія вызываютъ у лицъ академическаго званія сознаніе цѣнности ихъ мысли и слова, а въ силу этого имъ приписывается обыкновенной публикой обязательство думать о томъ, что они говорятъ или пишутъ.

Статьи г. Ермакова представляютъ характерный образецъ совершенно иныхъ качествъ. Эти статьи очень интересны, но не по существу развитыхъ въ нихъ соображеній, которыя, какъ не трудно доказать, представляютъ сочетаніе нѣсколькихъ общеизвѣстныхъ истинъ съ длиннымъ рядомъ очевидныхъ и притомъ не остроумныхъ парадоксовъ, а по имѣющей мѣсто въ наличности, хотя и странной, повидимому, связи этихъ соображеній съ формальной авторитетностью автора.

Читатели вообще и въ особенности представители математики вправѣ требовать того, чтобы сдѣланныя мною заявленія были оправ-

даны съ полной опредѣленностью. Я замѣчу съ своей стороны, что и передъ обширнымъ кругомъ читателей можно въ данномъ случаѣ говорить кратко. Да будетъ позволено мнѣ, ради именно опредѣленности и краткости, и въ виду множества замѣчаній, которыя придется сдѣлать по поводу разсматриваемыхъ статей, уклониться отъ обыкновенной формы полного разсужденія на мотивы анализируемой темы. Такая форма привела бы къ необходимости отвѣчать на каждую изъ разбираемыхъ статей обширными трактатами. Допуская, что лица, интересующіяся моими замѣчаніями на статьи г. Ермакова, могутъ имѣть подъ рукой подлинныя экземпляры разсматриваемыхъ статей, я буду дѣлать отдѣльные изъ нихъ выписки, помѣщая обозначеніе словъ автора для отличія въ скобкахъ или же изрѣдка между кавычками, и буду сопровождать эти выписки краткими замѣчаніями, достаточными однако для яснаго сужденія о правильности того или другого взгляда.

На первый разъ ограничусь одной статьей г. Ермакова „О преподаваніи алгебры“. Она напечатана въ нѣсколькихъ изданіяхъ, между которыми я располагаю теперь изданіемъ Педагогическаго Сборника за 1892 годъ.

Въ этой статьѣ, какъ и въ другихъ того же автора, г. Ермаковъ сначала ведетъ рѣчь объ общихъ вопросахъ философіи и дидактики математики, а затѣмъ переходитъ въ частности къ методологіи алгебры. Я буду слѣдовать за нимъ, придерживаясь почти безъ исключеній точно его собственнаго порядка изложенія. Предупреждаю читателей, что центръ тяжести моихъ замѣчаній будетъ заключаться не въ общихъ мѣстахъ, по поводу которыхъ всегда можно говорить очень много, а въ опредѣленной сферѣ математики и ея философіи. Но, слѣдуя указанному порядку, мнѣ придется начать съ общихъ мѣстъ.

Замѣчаніе 1. (Въ обществѣ сложилось убѣжденіе, что алгебра есть символическая наука, доступная только избраннымъ натурамъ).

Замѣчу во-первыхъ, что, какъ извѣстно читателямъ, г. Ермаковъ называетъ алгебру ученіемъ о преобразованіяхъ рядовъ отвлеченныхъ дѣйствій надъ символами, по преимуществу буквенными, въ другіе ряды дѣйствій надъ тѣми же объектами, и потому, на мой взглядъ, именно самъ авторъ въ своей системѣ алгебры дѣлаетъ эту науку вполне символической, отрывая отъ нея, хотя въ основахъ, всякую конкретную подкладку. Недоумѣваю, съ дру-

гой стороны, въ какомъ и на сколько многочисленномъ обществѣ обнаружено убѣжденіе въ томъ, что алгебра доступна только избраннымъ натурамъ. Практики-преподаватели, надѣюсь, согласятся со мною въ томъ, что наоборотъ алгебра дается ученикамъ почти всегда легче, чѣмъ и арифметика, и геометрія, и тригонометрія. Я лично, производя около десяти лѣтъ пріемные экзамены въ Техническомъ училищѣ, куда ежегодно стремятся сотни учениковъ реальныхъ и другихъ среднихъ училищъ, могу засвидѣтельствовать то, что фактическія знанія и общій навыкъ въ рѣшеніи задачъ по алгебрѣ всегда превышали соотвѣтствующія качества подготовки молодыхъ людей по геометріи и тригонометріи.

Зам. 2. (Педагогическая литература основана на чистомъ умозрѣніи безъ участія опыта и наблюденія.... методики и учебники большею частью пишутся молодыми педагогами, подвизающимися на педагогическомъ поприщѣ два или три года).

Всѣмъ извѣстно наоборотъ, что педагогическія сочиненія Билибина, Буссе, Бычкова, Верещагина, Глаголева, Гика, Гольденберга, Давидова, Дмитріева, Евтушевскаго, Егорова, Киселева, Ломовскаго, Малинина, Мининыхъ, Острогорскаго, Пржевальскаго, Рыбкина, Симашко, Шохоръ-Троцкаго и многихъ другихъ еще авторовъ написаны послѣ долголѣтней и иногда обширной преподавательской практики. Я самъ двадцать лѣтъ уже непрерывно преподаю какъ элементарную, такъ и высшую математику. Было бы желательно знать, о какой педагогической литературѣ говоритъ г. Ермаковъ, потому что къ той, которая дѣйствительно существуетъ, его утвержденіе относится не можетъ. Такое утвержденіе свидѣтельствуетъ лишь о томъ, что дѣйствительныя данныя трактуемаго вопроса автору трактата неизвѣстны.

Зам. 3. (Необходимы наблюденія надъ дѣтьми въ семьѣ и школѣ.... причина, препятствующая подобнымъ наблюденіямъ,.... заключается.... въ самолюбіи.... Дѣти, не испорченныя еще домашнимъ воспитаніемъ,.... стараются употребить всѣ усилія, чтобы не раздражить учителя).

Г. Ермаковъ, выставляя самолюбіе причиной, препятствующей наблюденіямъ надъ дѣтьми, говоритъ однако о самолюбіи не въ смыслѣ самоуслажденія покоемъ и отсутствіемъ заботъ, и не въ смыслѣ горделиваго игнорированія препятствіями къ личной дѣятельности, что объясняло бы, такъ или иначе, умѣстность употребленнаго имъ

этического термина, а видитъ самолюбіе педагоговъ.... въ предпочтеніи каждымъ изъ нихъ своего собственнаго метода обученія. Признаюсь, такое сужденіе кажется мнѣ излишне своеобразнымъ. Не менѣе своеобразно, на мой взглядъ, то утвержденіе, что дѣтей портитъ.... домашнее воспитаніе и что дѣти, воспитанные, значить, въ школѣ,.... стремятся не раздражать учителей. Откуда же въ такомъ случаѣ возникло обыденное представленіе о „школьникѣ“, какъ о субъектѣ именно раздражающемъ преподавателей и воспитателей своими даже внѣшними манерами?

Зам. 4. (Педагогъ не долженъ раздражаться. Мало этого. Педагогъ долженъ наблюдать и записывать тѣ именно моменты, когда ученики чего либо не понимаютъ. Прежде всего нужно задать вопросъ: нельзя ли непонятое мѣсто изложить въ другой, болѣе ясной формѣ? Отвѣтъ на этотъ вопросъ всегда долженъ быть утвердительнымъ).

По существу выраженной мысли нельзя, конечно, ничего имѣть противъ нея, кромѣ развѣ того, что въ статьѣ, претендующей на серьезность и оригинальность, подобныя, уже совершенно избитыя, сужденія не вполне уместны. Но оригиналенъ здѣсь способъ выраженія мысли со стороны представителя науки, пріучающей, какъ извѣстно, къ точному и содержательному мышленію. Что значить, что педагогъ долженъ записывать.... моменты? Производительно ли въ сущности рекомендуемое авторомъ и очевидно частое по свойству педагогическаго дѣла возбужденіе вопросовъ, когда отвѣтъ на нихъ всегда единственный и притомъ заранѣе извѣстный?

Зам. 5. (При правильной постановкѣ учебнаго дѣла не должно быть неуспѣшныхъ учениковъ.... Успѣшное прохожденіе наукъ въ сильной степени зависитъ отъ первоначальной домашней подготовки).

Оставляю на авторитетности г. Ермакова категоричность перваго изъ цитируемыхъ заявленій. Оно указываетъ намъ то, что по отношенію къ дѣлу преуспѣянія учениковъ авторъ игнорируетъ всѣ факторы, за исключеніемъ методы обученія. Вообще говоря, однако, я съ нимъ согласенъ. Сошлюсь хотя на мой личный опытъ, удостоившій въ точности то, что за четырнадцать лѣтъ моего преподаванія въ старшихъ классахъ 4-й Московской гимназіи въ двухъ послѣднихъ изъ этихъ классовъ не бывало никогда учениковъ, неуспѣвавшихъ по математикѣ. Но во второмъ заявленіи я вижу только малую долю истины. Оно во-первыхъ стоитъ въ прямомъ противорѣчii

съ предыдущимъ утвержденіемъ г. Ермакова. Если принять второе заключеніе, то нужно отрицать регулирующее вліяніе школьнаго учебнаго дѣла. Да и слѣдуетъ замѣтить еще, что въ элементарной, хотя и средней, школѣ, о которой именно идетъ рѣчь, изучаются подробно самыя основы каждаго изъ элементарныхъ отдѣловъ математики, въ силу чего недостатки домашней подготовки отнюдь не могутъ вліять здѣсь въ сильной степени.

Зам. 6. (Необходимо еще дома развитъ мышленіе мальчика или дѣвочки рѣшеніемъ подходящихъ ариѳметическихъ задачъ.... Кромѣ того передъ поступленіемъ въ гимназію или реальное училище мальчикъ долженъ основательно знать родной языкъ—почти всю этимологию).

Предыдущее утвержденіе я признаю особо своеобразнымъ, не только съ точки зрѣнія, какъ мнѣ кажется, общепринятой, но и со стороны воззрѣній самого автора. Какъ скоро мышленіе мальчика или дѣвочки уже „развито“, къ чему тогда общеобразовательная школа? Для чего нужно „основательное“ знаніе „почти всей этимологій“ при самомъ началѣ школьныхъ занятій? Почему рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ считается необходимымъ для дѣтей обоего пола, а знаніе этимологій только для мальчиковъ? Г. Ермаковъ въ своихъ наставительныхъ статьяхъ признаетъ негодность всѣхъ существующихъ въ наличности учебныхъ пособій. Между прочимъ, одинъ алгебраическій задачникъ, который рекомендованъ ученымъ комитетомъ министерства народнаго просвѣщенія, оцѣненъ большою преміей Петра Великаго и въ самое непродолжительное время распространенъ наличными преподавателями въ десяткахъ тысячъ экземпляровъ, профессоръ называетъ „китайскою грамотой“. Если таково педагогическое значеніе учебнаго пособия, которое составлено двумя опытными преподавателями и принято къ руководству сотнями подобныхъ, то каково же должно быть развивающее вліяніе безмѣрно разнородныхъ педагогическихъ системъ частныхъ, совершенно неопытныхъ, лицъ? Не вытекаетъ ли изъ утвержденія автора то заключеніе, что наилучшими преподавателями математики должны считаться лица, наименѣе вкусившіе отъ плодовъ математическихъ знаній? Въ такомъ случаѣ г. Ермаковъ въ качествѣ профессора высшей математики и академика наукъ долженъ отказаться совершенно отъ руководства элементарнымъ преподаваніемъ. Между тѣмъ при соблюденіи, безъ сомнѣнія постоянныхъ, правилъ своего мышленія онъ дѣйствуетъ совершенно обратно.

Зам. 7. (Арифметическія задачи могутъ быть приведены въ двумъ типамъ. Задачи перваго типа надъ большими числами не требуютъ большой сообразительности, служатъ лишь примѣрами для упражненія въ четырехъ дѣйствіяхъ. Задачи втораго типа надъ небольшими числами требуютъ часто большой сообразительности и направлены къ развитію мыслительной способности дѣтей.... Задачи втораго типа съ успѣхомъ примѣняются въ народныхъ школахъ; но на такія задачи слишкомъ мало обращаютъ вниманія въ среднихъ школахъ).

Во всемъ текстѣ статьи, кромѣ одного примѣра на задачи втораго типа, не приведено сверхъ вышеизложеннаго никакихъ дополнительныхъ указаній объ отмѣчаемомъ авторомъ различеніи двухъ типовъ задачъ. Это обнаруживаетъ, на мой взглядъ, неаккуратность изложенія автора, потому что съ догматической точки зрѣнія вышеуказанная цитата возбуждаетъ странныя недоумѣнія: До сихъ поръ задачи не классифицировались по признаку относительнаго размѣра данныхъ чиселъ. Не было также извѣстно, что развивающее вліяніе задачъ и трудность ихъ для сознанія находятся въ обратномъ отношеніи къ размѣрамъ данныхъ чиселъ. Судя по единственному примѣру задачи втораго типа (десять яблокъ раздѣлить двумъ дѣвочкамъ такъ, чтобы одна получила однимъ яблокомъ болѣе другой) позволительно думать, что рѣчь идетъ о той классификаціи, которую можно представлять себѣ, по моему, въ формѣ раздѣленія задачъ на выводныя или синтетическія и разборныя или аналитическія. Если такъ, то невѣрно утвержденіе автора, что въ среднихъ школахъ на аналитическія задачи обращаютъ мало вниманія. Въ сборникахъ Верещагина, Евтушевскаго, Малнина, Мининыхъ, очень употребительныхъ въ такихъ школахъ, громадное большинство задачъ относится наоборотъ къ этому типу. Въ сборникѣ моемъ и Вальцова—арифметическомъ разобрано множество формъ подобныхъ задачъ.

Зам. 8. (Третья причина, вліяющая на малоуспѣшность занятій—несоотвѣтствіе между физическими и душевными силами. Дѣтямъ необходимы продолжительныя движенія на свѣжемъ воздухѣ.... Мой совѣтъ: если хорошій ученикъ начнетъ понижаться въ успѣшности своихъ занятій, то первымъ дѣломъ надо заставить такого ученика употребить болѣе продолжительное время на прогулки. Движеніе на открытомъ воздухѣ на столько укрѣпляетъ физическія, а вмѣстѣ съ тѣмъ и умственныя силы учениковъ,...).

Вполнѣ соглашаясь съ гуманными, но, надо сказать, не новыми и не оригинальными, взглядами автора на затруднительное въ гигиеническомъ отношеніи положеніе учащихся. Замѣчу только, что развиваемыя авторомъ соображенія свидѣлствуютъ не о несоотвѣтствіи, а именно о соотвѣтствіи физическихъ и духовныхъ силъ, т. е. доказываютъ прямо обратное тому, что онъ въ началѣ этихъ соображеній заявилъ.

Зам. 9. (Рѣдко встрѣчается обратное явленіе, когда мальчикъ слишкомъ упитанъ и выхоленъ; всѣ силы такого мальчика направлены не на науку, а на забавы, бѣганье и т. п. Такого мальчика полезно держать впроголодь: сытое брюхо къ ученію глухо).

Такимъ образомъ черезъ нѣсколько строкъ письма самъ авторъ признаетъ, что несоотвѣтствіе между физическими и душевными силами встрѣчаются рѣдко и на этотъ разъ въ разборѣ указываемаго примѣра оказывается вполнѣ послѣдовательнымъ: По его совѣту избытокъ физическихъ силъ, выражающійся, какъ объяснено профессоромъ, въ жизнерадостности молодого индивидуума, нужно ради педагогическихъ цѣлей лечить голодомъ.

Зам. 10. (Мнѣ могутъ, однако возразить, что дѣти уже рождаются съ разными способностями. На это я долженъ замѣтить, что (это) не доказано: нельзя проникнуть въ мозгъ живого ребенка, а потому и нельзя утверждать, чтобы мозги новорожденныхъ были разнообразны по устройству).

Предыдущее заключеніе автора было бы въ значительной степени правильно, если бы, не невозможный въ сущности, но, слава Богу, нигдѣ не позволительный, методъ проникновенія въ живой человѣческій мозгъ былъ единственнымъ соотвѣтствующимъ методомъ изслѣдованія въ фізіологіи и психологіи. Полагаю однако, что специалисты упомянутыхъ наукъ могутъ указать автору на другіе, извѣстные имъ и вполнѣ позволительные, приемы изслѣдованія, благодаря которымъ рассматриваемый вопросъ возбуждаетъ вниманіе ученыхъ, не сторонящихся отъ него.

Въ предыдущемъ я разсмотрѣлъ четыре первыя изъ тридцати страницъ статьи. Остановлюсь пока, чтобы сдѣлать новую оговорку. Читатели могутъ сказать, что я усматриваю въ статьѣ только одни и притомъ внѣшніе недостатки. Понимаю самъ, что въ своеобразномъ дѣлѣ разбора подобной статьи нужно быть осторожнымъ. Но я вижу требуемую осторожность въ стремленіи поддерживать

ясныя отношенія между собою и читателемъ. Мои заявленія также подлежатъ суду критики, какъ и сужденія, мною разбираемыя. Принимая это во вниманіе, говорю отчетливо, что и въ дальнѣйшемъ матеріалѣ интересующей меня статьи я, кромѣ избитыхъ истинъ, вездѣ однако заявляемыхъ авторомъ отъ его собственнаго лица, вижу однѣ только и притомъ существенныя ошибки мышленія. Я не былъ бы удивленъ, еслибъ въ трактатѣ серьезнаго ученаго встрѣтилъ одну или нѣсколько погрѣшностей. Мало ли историческихъ примѣровъ того, что глубочайшіе мыслители уклонялись отъ истины? Но матеріалъ, даваемый авторомъ, интересенъ въ иномъ, гораздо болѣе широкомъ, смыслѣ. Онъ раскрываетъ хотя отчасти довольно общій характеръ современнаго отношенія специалистовъ ученыхъ къ философіи наукъ вообще и къ философіи математики въ частности. Такое отношеніе знаменуетъ собою и нѣкоторыя прежнія времена, и настоящій періодъ развитія мысли. Оно косвеннымъ образомъ проливаетъ свѣтъ на ближайшее будущее науки. Изъ современныхъ профессоровъ математическихъ наукъ многіе думаютъ, что лицу, заявившему себя нѣсколькими спеціальными научными изслѣдованіями, позволительно судить авторитетно объ общихъ вопросахъ философіи и дидактики математики. Я и желаю именно на ясномъ примѣрѣ произвести оцѣнку этого мнѣнія.

Возвращаюсь къ принятому на себя дѣлу. На мой взглядъ предъидущія десять выписокъ даютъ уже ясное представленіе объ общихъ приѣмахъ мышленія автора и о способахъ его выражать свои сужденія рѣчью. На протяженіи слѣдующихъ четырехъ страницъ статьи авторъ разрѣшаетъ категорично нѣсколько глубокихъ вопросовъ общей философіи знанія. Онъ судитъ о примѣнимости математики къ изслѣдованію разнообразныхъ явленій природы, оцѣниваетъ вообще практическую годность матеріала математики, опредѣляетъ границы этого матеріала и подвергаетъ оцѣнкѣ самую непреложность законовъ науки. Считаю неумѣстнымъ теперь же на страницахъ статьи педагогической производить детальный анализъ всѣхъ высказанныхъ авторомъ заключеній. Упомяну кратко только о нѣкоторыхъ изъ нихъ и дамъ имъ оцѣнку, по возможности отчетливую.

Зам. 11. Въ самомъ началѣ своихъ общенаучныхъ соображеній г. Ермаковъ называетъ ложнымъ то мнѣніе, что „математика есть особая символическая наука, имѣющая свой особый языкъ, особую логику и особую грамматику“.

Оставимъ пока въ сторонѣ вопросъ объ особенностяхъ математической логики, но замѣтимъ то, что даже особенность языка символизма авторомъ совершенно отрицается. Приходится напомнить профессору, что напр. хотя фраза—произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ количествъ — пишется въ алгебрѣ такъ, что всякое лицо, знакомое хотя бы со всѣми литературными языками, но не знающее спеціального языка арифметики и алгебры, не можетъ этой фразы ни написать, ни прочесть.

Зам. 12. Происхожденіе указаннаго „ложнаго“ взгляда авторъ объясняетъ исторически тѣмъ, что математика со временъ Ньютона и Лейбница проявила въ своемъ развитіи особо быстрый успѣхъ.

Признаюсь, я совершенно не понимаю, гдѣ въ этихъ сопоставленіяхъ какая либо логическая связь? Какое отношеніе имѣетъ указаніе на успѣхи математики со времени открытій Ньютона и Лейбница къ сужденію о томъ, имѣетъ ли эта наука свой особый языкъ и особую грамматику, или же нѣтъ?

Зам. 13. Г. Ермаковъ говоритъ, что „облечь данное явленіе въ формулы“ значитъ то-же, что „составить дифференціальныя уравненія“, а „найти интегралы этихъ уравненій“ значитъ „раскрыть изучаемое явленіе вполнѣ“.

Помимо указанія разныхъ сторонъ неосновательности такого утвержденія, достаточно сказать объ этомъ то, что, значитъ, только одинъ анализъ безконечномалыхъ и только въ высшихъ его частяхъ приложимъ къ изслѣдованію явленій природы. Но такой неизбѣжный выводъ оказывается на дѣлѣ неправильнымъ.

Зам. 14. Авторъ заключаетъ о неприменимости математики къ изслѣдованію сложныхъ явленій природы на основаніи отсутствія общей теоріи интегрированія уравненій.

По этому поводу приходится замѣтить опять и спльнѣе, что далеко не въ одномъ анализѣ безконечномалыхъ сосредоточенъ весь матеріалъ математики. Прибавлю еще для нагляднаго примѣра, что невозможность общаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій нисколько не мѣшаетъ при практическихъ изслѣдованіяхъ рѣшать прекрасно и съ точностью, даже излишней, нужныя для дѣла числовыя алгебраическія уравненія.

Зам. 15. Задачу интегрированія уравненій авторъ считаетъ и въ будущемъ не разрѣшимой.

Нужно напомнить ему то, что до открытія анализа бесконечно-малыхъ многія математическія задачи также считались не разрѣшимыми. Я имѣлъ случай доказывать кружку математиковъ, что признанная невозможность интеграціи трехчленнаго уравненія Лапласа объясняется не существомъ дѣла, а тѣмъ, что къ этой интеграціи прилагали ошибочно алгебру плоскости вмѣсто подлежащей примѣненію алгебры пространства. Можетъ быть авторъ скажетъ, что такой особой алгебры не имѣется? Тогда придется поговорить съ нимъ объ этомъ отдѣльно.

Зам. 16. По мнѣнію автора въ самое послѣднее время пошатнулась до тѣхъ поръ крѣпкая вѣра въ непреложность математическихъ законовъ.

Замѣчу на это, что извѣстны старые софизмы и промахи математической мысли, давно уже колебавшіе въ умахъ многихъ вѣру въ непреложность математическихъ выводовъ. Напомню хотя бы сужденія математиковъ о природѣ и свойствахъ мнимыхъ количествъ. Если недостаточно этого указанія, отмѣчу почти цѣликомъ всю современную Ньютону метафизику исчисленія бесконечно-малыхъ. А если и этого мало, то не пойдѣмъ ли мы въ самую глубь вѣковъ, хотя бы до Зенона, отвергавшаго, повидимому, строго математически возможность акта движенія?

Зам. 17. Обстоятельствомъ, которое пошатнуло устои математики, авторъ считаетъ извѣстную Петербургскую задачу.

Здѣсь очевидно крупное недоразумѣніе. Полагаю, что знаменитая задача подрываетъ лишь практическую общность опредѣленія математическаго ожиданія, но она отнюдь не колеблетъ ни одного изъ законовъ математики. Извѣстны почтенные писатели, которые въ своихъ трактатахъ по теоріи вѣроятностей не усматриваютъ въ упомянутомъ обстоятельствѣ совершенно даже никакого парадокса. И, надо сказать, было бы не дурно, если бы нашъ авторъ съ меньшей авторитетностью судилъ о подобныхъ, довольно тонкихъ, вещахъ.

Зам. 18. Формула, говоритъ г. Ермаковъ, есть сокращенное мышленіе.

Приходится напомнить профессору, что мышленіе есть умственный процессъ, а математическая формула—символическій объектъ. Смѣшеніе же понятій о процессѣ и объектѣ непозволительно и съ точки зрѣнія обыкновенной, нематематической, логики. Не мудре-

но, въ виду замѣченнаго обстоятельства, объяснить себѣ то, что въ вопросахъ философіи математики сужденія автора отличаются нѣкоторыми странностями. Здѣсь еще больше, чѣмъ въ простой этимологіи, требуется отчетливая характеристика всякаго обсуждаемаго понятія.

Зам. 19. По мнѣнію автора „математическое разсужденіе при помощи символовъ должно сопровождаться и повѣряться обыкновеннымъ мышленіемъ“.

Заявленіе это, выписанное мною въ подлинныхъ словахъ, показываетъ то, что г. Ермаковъ самъ признаетъ наличность математическаго разсужденія, обособляющагося отъ обыкновеннаго мышленія, и, значитъ, послѣ двухъ страницъ письма, развиваетъ тотъ самый взглядъ на особенности математической логики, который онъ съ особой проницательностію порицалъ двѣ страницы назадъ. Кажется, что не легко согласить эти два обстоятельства.

Зам. 20. По заявленію автора, также выписываемому мною подлинно, — „если представители другихъ наукъ“.... кромѣ механики, астрономіи, физики, кристаллографіи и строительнаго искусства.... „мечтаютъ о примѣненіи математики, то такая мечта является положительнымъ безуміемъ и напрасною тратой времени“.

Ну, отчего не помечтать иногда, хотя профессоръ и сердится. Вѣдь вотъ Наполеонъ считалъ же безуміемъ проектъ ѣзды помощью пара, однако его не послушались.

Мышленіе автора на столько сложно со стороны его безотчетности, что оно почти на каждомъ шагу даетъ поводъ все къ новымъ и довольно солиднымъ возраженіямъ. Я вынужденъ ограничиться по каждой изъ главныхъ частей статьи какимъ нибудь небольшимъ числомъ замѣчаній и для круглаго счета выберу пока по десяти.

Мнѣ кажется притомъ, что ошибки такого мышленія слишкомъ очевидны для того, чтобы являлась надобность въ подробномъ ихъ разъясненіи. Буду опять сокращать дѣло отдѣльными выписками и самыми непосредственными комментаріями къ нимъ.

Зам. 21. (Только одна математика даетъ возможность повѣрить результаты нашего мышленія).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что мышленіе въ другихъ наукахъ представляетъ или напрасный трудъ, или безсодержательную забаву. Къ чему же мыслить всѣмъ нематематикамъ, если результаты ихъ мышленія не могутъ быть повѣряемы и потому, значитъ, не подлежатъ оправданію?

Зам. 22. (Результатъ мышленія можетъ быть провѣренъ опытомъ).

Это заявленіе выписано черезъ строчку отъ предыдущаго и однако авторъ не видитъ въ немъ прямого противорѣчія предыдущему заявленію. Развѣ мало есть гипотезъ естественно-историческихъ, не имѣющихъ къ математикѣ никакого отношенія, но опирающихся на опытную провѣрку?

Зам. 23. (Умъ нашъ склоненъ идти къ истинѣ не прямою дорогою, а извилистыми путями).

Такимъ образомъ колебанія человѣчества въ исканіи имъ истины авторъ объясняетъ природной склонностью ума удаляться отъ искомой истины. Но во первыхъ, раньше онъ отвергалъ всякія природныя склонности ума. А во вторыхъ, интересенъ выводъ изъ его заявленія при параллели такой: Можно ли утверждать, что лице, блуждающее въ неизвѣстной ему, напр., лѣсной мѣстности, затрудняется выходомъ изъ нея вслѣдствіе.... склонности къ блужданію?

Зам. 24. (Недостаточно открыть и доказать новую теорему: необходимо еще быть убѣжденнымъ въ томъ, что данное доказательство самое простое).

Для автора, пускавшаго неоднократно свои стрѣлы лично въ меня, я позволю себѣ еще разъ привести личный примѣръ, который послужитъ выводомъ изъ его заявленія. Въ теоріи уравненій съ частными производными я доказалъ много извѣстныхъ теоремъ проще, чѣмъ они доказывались кѣмъ либо раньше, и потому выходитъ, что я долженъ упрекнуть создателей теоріи Ампера, Лагранжа, Коши, Пфаффа, Якоби, Майера, Имшенецкаго, Коркина и другихъ въ томъ, что они занимались въ этой теоріи только тѣмъ, что не достаточно, и не позаботились сдѣлать то, что необходимо? Заявленіе автора, будь оно общепринято, могло бы стать источникомъ для установленія особаго соотвѣтствія между математикой и юриспруденціей. Напр., было бы важно опредѣлить, какое изъ сорока съ лишнимъ доказательствъ Пифагоровой теоремы есть самое простое, а на основаніи этого какое сочетаніе изъ геометровъ, дававшихъ доказательства, подлежатъ и въ какой мѣрѣ осужденію за неисполненіе ими ихъ непосредственныхъ обязанностей.

Зам. 25. (Изъ всего сказаннаго вытекаетъ слѣдующее положеніе: Математика учитъ правильному мышленію).

Не знаю, какимъ образомъ это вытекаетъ изъ того, что, какъ сказано авторомъ въ формѣ особаго, имъ подробно доказаннаго,

тезиса „математическіе законы и формулы могутъ привести къ ложнымъ результатамъ“, а между тѣмъ онъ же дополнилъ, что „всякая формула есть сокращенное мышленіе“. Но, какъ бы то ни было, нужно сказать, что противъ категоричности утвержденія автора найдется не мало возражателей.

Зам. 26. (Математики съ особой охотой занимаются теоріей чиселъ, которая не можетъ имѣть ровно никакихъ примѣненій.... нѣкоторые высшіе отдѣлы математики не могутъ имѣть никакого примѣненія).

Не вдаваясь въ подробности, можно замѣтить автору, что въ историческомъ развитіи математики теорія мнимыхъ количествъ не обѣщала сначала вовсе возможности примѣненій и многими считалась абсурдной. Теперь же эта теорія преобразовалась въ особо плодотворное ученіе, которому, между прочимъ, самъ авторъ посвящаетъ одно изъ своихъ, по крайней мѣрѣ полезныхъ, сочиненій.

Зам. 27. (Иной вопросъ кажется неразрѣшимымъ тѣми приемами, которые извѣстны въ математикѣ, но вотъ является ученый, который создаетъ новый приемъ и даетъ простое рѣшеніе вопроса).

Значить, свидѣтельство полного отчаянія, записанное авторомъ три страницы назадъ, можно теперь, во славу науки, вычеркнуть. Мечты, прежде напрасныя, преобразовываются, послѣ трехъ страницъ письма, въ надежду на розовую будущность. Нужно только терпѣливо ждать. Нужно разнообразить приемы изслѣдованія.

Зам. 28. (Лица, изучающія часть высшей математики съ цѣлью сдѣлать примѣненіе къ своимъ наукамъ, сильно ошибаются: Можно предсказать заранѣе, что никакихъ примѣненій они не сдѣлаютъ.... Представителямъ другихъ наукъ я совѣтую одно изъ двухъ: либо оставить вовсе математику, либо изучать ее вполнѣ, не заботясь о приложеніяхъ; приложенія найдутся впоследствии).

Такимъ образомъ и въ дѣлѣ примѣненія математики возникъ теперь утѣшительный факторъ. Однимъ словомъ послѣ быстрой расстановки ряда философскихъ задачъ настроеніе автора замѣтно улучшилось. Даже представители другихъ наукъ, буде помечтаютъ на досугѣ о приложеніи къ ихъ труду математики, не окажутся уже безумными. Было бы только стараніе съ ихъ стороны въ изученіи, между прочимъ, и тѣхъ частей математики, которыя завѣдомо бесполезны, а тогда, при отсутствіи заботъ о будущемъ, успѣхъ самъ собою явится.



Зам. 29. (Наши гимназіи даютъ неполное и непрочное знаніе: Неполное потому, что исключены естественныя науки, а непрочное потому, что многое забывается по выходѣ изъ гимназіи).

Выходить, значитъ, что ввели бы только программы гимназій соотвѣтствующій этимъ школамъ курсъ естественныхъ наукъ, и тогда абитуріенты гимназій выходили бы съ знаніемъ.... полнымъ. То то былъ бы золотой, въ смыслѣ просвѣщенія, вѣкъ.

Зам. 30. (было бы гораздо лучше, если бы гимназіи по всеѣмъ наукамъ давали лишь такія знанія, которыя потомъ никогда не забывались бы).

Но извѣстно вѣдь, что даже родной языкъ безъ практики въ немъ забывается. Слѣдовательно, авторъ требуетъ такихъ успѣховъ школы, которые, по простому здравому смыслу, должны считаться недо-стижимыми.

Однако рядъ моихъ замѣтокъ оказался уже слишкомъ длиннымъ. Пусть объяснятъ это читатели тѣмъ, что въ дѣлѣ подобнаго разбора нельзя не быть обстоятельнымъ. Статья, мною разсматриваемая, уже получила благопріятные отзывы въ печати. Нашлось даже лицо, скажу—очень почтенное, заявившее печатно объ этой статьѣ, какъ объ отраднѣйшемъ явленіи въ нашей педагогической литературѣ.

Не знаю, окажусь ли я въ большинствѣ, или въ меньшинствѣ цѣнителей, но считаю умѣстнымъ сказать мое личное мнѣніе твердо. На мой взглядъ, какъ эта статья, такъ и другія изъ упомянутыхъ того же автора, представляютъ крайне печальное литературное явленіе. Трактаты, подобныя разсматриваемому, кажутся мнѣ не проводниками просвѣщенія, а серьезными тормозами его. Къ такимъ трактатамъ нельзя относиться сочувственно.

Сдѣлаю краткое отступленіе въ сторону, чтобы отмѣнить значеніе сказаннаго.

Тѣмъ, что ниже слѣдуетъ, я начну вторую и важнѣйшую часть рецензіи.

Въ историческомъ развитіи математики двумъ основнымъ отдѣламъ ея — ариѳметикѣ и алгебрѣ — посчастливилось меньше всего. Эти отдѣлы до самого послѣдняго времени почти не удостоивались вниманія крупныхъ представителей мысли. Геометрія стала довольно точной наукой еще въ древнія времена. Тригонометрія возникла въ общемъ недавно, но подъ вліяніемъ работы серьезныхъ мысли-

телей она скоро вылилась, хотя и въ краткую, но значительно отдѣланную статью математики. Развитие арифметики началось въ глубинѣ вѣковъ, однако научное ея значеніе потонуло совсѣмъ въ широтѣ значенія практическаго, и первый отдѣлъ математики созданъ лишь въ формѣ искусства счисленія. Науки арифметики до послѣдняго времени не бывало вовсе. Также и алгебра, развиваясь вначалѣ легко, дала сразу такую массу средствъ для рѣшенія обыденныхъ задачъ, что въ увлеченіи ближайшими заботами почти всѣ позабыли о важномъ научномъ значеніи этого прямого ствола всей современной точной науки. Второй отдѣлъ математики обратился также въ одно безпорядочное искусство счисленія.

Можно указать еще другую причину слабаго до нынѣ развитія арифметики и алгебры. Первой изъ нихъ помѣшала своимъ возникновеніемъ геометрія древнихъ, второй еще больше анализъ Ньютона и Лейбница. Въ древнія времена научный матеріалъ арифметики былъ еще слишкомъ узокъ и простъ, чтобы привлекать къ себѣ вниманіе дѣятельной мысли, стремящейся по склонности человѣчества все больше и больше въ даль. Въ области геометріи пытливый умъ мыслителя находилъ для себя и больше разнообразія, и больше таинственной глубины. Еще сложнѣе были тѣ условія, которыя возникли изъ близкаго по времени зарожденія алгебры и анализа безконечномалыхъ. Слишкомъ простая вначалѣ и не требовавшая тогда глубокой обработки алгебра пассивала вполнѣ передъ могучимъ на дѣлѣ и величественнымъ въ своей туманности анализомъ безконечномалыхъ. Дѣло развитія арифметики и алгебры было свалено на плеча малосильныхъ. Корифеи науки, за очень малыми исключеніями, отвернулись отъ этого дѣла совсѣмъ.

Совокупность указанныхъ причинъ привела къ тому, что самый корень точной науки не только не укрѣплялся правильно, но началъ давно уже и сильно болѣть. Истиннымъ друзьямъ математики не оставалось ничего больше, какъ взяться серьезно за очистку этого корня и за энергичное леченіе его. Но такихъ заботливыхъ друзей науки оказалось очень немного. Да и важная дѣятельность ихъ проходила для большинства совершенно безслѣдно. Обширность наличнаго матеріала математики развиваетъ усиленно спеціализацію знаній. Кругозоръ современныхъ математиковъ до крайности узокъ. Современная научная мысль часто направлена на такія мелочи, которыя вообще не могутъ, а въ нѣкоторыхъ случа-

яхъ, ради экономіи умственныхъ силъ, даже не должны заслуживать общій интересъ. Привычка къ мелочной работѣ обуславливаетъ въ результатѣ печальное игнорированіе нѣкоторыхъ изъ тѣхъ дѣлъ, значеніе которыхъ по существу вещей несравненно выше ординарной дѣятельности.

Мелочные научные труды создаютъ и мелкихъ ученыхъ. Эти ученые только нанизываютъ на вѣтви математическаго дерева новыя и часто тяжелыя листья, но дерево отъ этого не цвѣтетъ, а истощается. Многіе догадываются уже теперь о такомъ истощеніи, но дѣйствуютъ различно. Одни лишь ставятъ временныя подпорки отъ бѣльшихъ вѣтвей на сосѣднія мелкія, другіе почти готовы рубить цѣлыя вѣтви. Только нѣсколько лицъ видятъ истинную причину зла и дѣлаютъ то, что и нужно теперь по преимуществу дѣлать. Но и этихъ немногихъ нѣкоторые изъ тѣхъ, что взобрались повыше, стремятся хотя какъ нибудь оттѣснить въ сторону. Такова, гг. читатели, на мой личный взглядъ, довольно общая картина современной литературно-математической дѣятельности, какъ въ писшихъ, такъ равно и въ высшихъ ея сферахъ. Таковъ же и уголокъ общей картины, освѣщенный передъ вами подлежащей моему разбору статьей.

Я возвращаюсь снова къ этой статьѣ и рассмотрю теперь ту ея часть, которая должна была привлечь наибольшее вниманіе преподавателей математики. Буду по прежнему располагать свои замѣтки по послѣдовательнымъ номерамъ.

Да не подумаютъ читатели, что вводя нумерацію указываемыхъ мною возраженій, я хочу повліять на публику самымъ числомъ такихъ возраженій. Дѣлаю это лишь для того, чтобы лица, желающія съ большей полнотою рассмотреть какой либо изъ намѣченныхъ пунктовъ, могли однимъ указаніемъ на номеръ такого пункта опредѣлить ясно то направленіе, въ сторону котораго они поведутъ свою согласную со мною, или несогласную рѣчь.

Зам. 31. „Въ настоящее время“, говоритъ г. Ермаковъ, „все заражено единствомъ: единство матеріи, единство силъ, единство законовъ и т. д.“

Итакъ глубочайшія теоріи естественныхъ наукъ, ведущія къ объединенію разрозненныхъ фактовъ, признаются нашимъ авторомъ

за очаги обширной заразы. Какъ увидимъ дальше, такая зараза считается для математики вредной. Оригинальность мышленія автора, начиная съ этого мѣста статьи, проявляется съ особой отчетливостью. Выводы этого мышленія требуютъ теперь широкой и твердой оцѣнки.

Зам. 32. (Педагоги также стремятся создать единую теорію, способную обнять всѣ мелочи данной науки).

По обнаруживающейсѣ передъ нами, крайне оригинальной, терминологіи, господа Галилей, Декартъ, Лапласъ, Лейбницъ, Монжъ, Ньютонъ суть именно подобные, скромные званіемъ, педагоги, потому что вѣдь имъ принадлежатъ наиболѣе сильныя объединеніемъ фактовъ теоріи математическихъ наукъ. Но, разумѣется, нашъ авторъ мѣтитъ не въ этихъ, уже защищенныхъ неприступными твердынями, рыцарей мысли. Можно усмотрѣть довольно ясно, что большинство изъ камней, метаемыхъ пращей автора, летятъ, съ прицѣлу или нѣтъ, нельзя рѣшить, — въ сторону позицій Арганда, Беллавитиса, Вейерштрасса, Гамильтона, Грасмана, Уэля. Да, что касается до этихъ господъ, то, пожалуй, они дѣйствительно пока педагоги, такъ какъ ближайшая задача ихъ трудовъ — научить мыслить нѣкоторыхъ современныхъ ученыхъ.

Зам. 33. (Но такой теоріи въ математикѣ не существуетъ, да и не можетъ существовать).

Безотчетныя прорицанія не входили до сихъ поръ въ программу точной науки. Но разъ нашъ авторъ уже далъ примѣръ такого введенія, то позволю себѣ и я сказать одно, подобное, прорицаніе. Возможно то, что лишь въ нѣсколько десятковъ лѣтъ всѣ наличныя факты и не одной чистой математики уже будутъ ясно и полно объединены. Возможно то, что исходнымъ пунктомъ такого объединенія послужить лишь представленіе особой матеріальной точки, начинающей свое движеніе прямолинейно, прерывно и равномерно.

Зам. 34. (Въ разнообразіи методовъ и приѣмовъ вся сила и прелесть науки).

Такое разнообразіе уместно лишь до тѣхъ поръ, пока наука еще не сложилась. Для всякаго положенія дедуктивной науки существуетъ лишь одинъ простѣйшій и нормальный способъ вывода. Значеніе такого способа устраняетъ конкуренцію всякихъ другихъ. Въ отчет-

ливой научной системѣ каждое положеніе можетъ имѣть только одно, ему соотвѣтствующее, мѣсто.

Зам. 35. (Единая теорія вредна, ибо она не даетъ возможности критически отнестись къ собственному мышленію).

Однако единая теорія Ньютона о притяженіи небесныхъ тѣлъ давала возможность провѣрять результаты мышленія. Не было ли открытіе планеты Нептунъ однимъ изъ блестящихъ обращеній торжества дедукціи? Не оказывается ли наоборотъ, что чѣмъ общѣе теорія, тѣмъ шире и сильнѣе подвергается критикѣ и она сама, и всѣ связанные съ нею факты. Ниже обнаружится ясно, какую критику понесетъ математическое мышленіе автора, благодаря отвергаемой имъ, но болѣе сильной, чѣмъ всѣ его средства, единой теоріи алгебры.

Зам. 36. (Но стремленіе къ единой теоріи вредно еще въ другомъ отношеніи. Замѣчая, что нѣкоторые факты не подходятъ подъ эту теорію, педагогъ для объясненія ихъ создаетъ все новыя и новыя правила).

Наоборотъ, такое обстоятельство обнаруживается тогда, когда къ единой теоріи не стремятся. Не въ томъ ли заключается объединеніе научныхъ фактовъ, что число отдѣльныхъ положеній уменьшается? Не объединилъ ли общій методъ Декарта множество частныхъ приемовъ изслѣдованія кривыхъ? Полагаю, что въ единой дифференціальной теоріи максимума и минимума гораздо меньше правилъ, чѣмъ сколько ихъ было до открытія этой теоріи.

Зам. 37. (Въ свое оправданіе педагоги утверждаютъ, что единая теорія дисциплинируетъ умъ. Подъ дисциплинированнымъ умомъ нужно подразумѣвать такой умъ, который способенъ сосредоточиваться надъ даннымъ вопросомъ, не разбрасываясь въ стороны).

Приходится по неволѣ замѣтить автору, что, въ увлеченіи своими нападками, онъ не щадитъ ни другихъ, ни себя. Вѣдь, что же усмотрятъ читатели изъ сравненія всего предыдущаго съ двумя настоящими, рядомъ сказанными, фразами? Самъ авторъ заявилъ вѣдь рѣчь о преподаваніи алгебры, а до сихъ поръ говоритъ объ очень многомъ, но никакъ не о томъ, чего мы ждемъ. Не подумалъ бы кто нибудь, что педагоги оправданы?

Зам. 38. (Но такую ли дисциплину даетъ гимназія? Нѣтъ, ибо умъ лица, получившаго аттестатъ зрѣлости, пасуетъ передъ каж-

дымъ вопросомъ, выходящимъ изъ узкой среды гимназическаго образованія).

Да, такой дисциплины не даютъ еще теперь наши гимназіи. Но даетъ ли ее всегда и наше высшее образованіе? Не бываетъ ли примѣровъ того, что и умы лицъ, получившихъ аттестаты учености, пасуютъ передъ каждымъ вопросомъ, выходящимъ изъ узкой среды ихъ личной спеціальности? Объ этомъ придется намъ дальше поведи сложную и пространную рѣчь.

Зам. 39. (Учебникъ долженъ содержать основныя положенія науки, изложенныя въ краткой формѣ).

На мой взглядъ учебникъ любой изъ математическихъ наукъ только тогда и заслужить свое названіе, когда онъ раскроетъ изучающему широкую связь между положеніями основными, очень немногими, и ихъ слѣдствіями, всегда многочисленными, а также научить хотя въ главныхъ чертахъ примѣненію добытыхъ знаній. При обязательной, что вѣрно, краткости изложенія, учебникъ однако долженъ содержать всю необходимую теорію и объясненіе всѣхъ главныхъ методовъ рѣшенія задачъ.

Зад. 40. (Различные методы и приемы рѣшенія могутъ быть выяснены на практическихъ задачахъ).

До сихъ поръ большею частью дѣлалось такъ, что ученикамъ не давали ни ясной теоріи, ни правильныхъ приемовъ для рѣшенія задачъ, а навязывали трудно измѣримую массу часто хаотическихъ упражненій. При такихъ условіяхъ осиливали дѣло только тѣ немногіе таланты, которые могли добыть себѣ сами хотя часть скрытаго отъ нихъ, да и такіе таланты нерѣдко потомъ только размѣнивались на мелочи.

Наконецъ, послѣ долгаго отвлеченія въ сторону разныхъ вопросовъ, мы приближаемся вмѣстѣ съ авторомъ къ началамъ алгебры. Но и дальше между прочимъ придется говорить о математикѣ вообще и объ ариѳметикѣ въ частности.

Слѣдую, какъ прежде, по стопамъ самаго автора. Онъ раскрываетъ намъ новую систему алгебры и знаетъ, конечно, самъ, что и въ какомъ порядкѣ разъяснить педагогамъ, а черезъ нихъ и ученикамъ.

Зам. 41. Развѣтіе упомянутой системы начинается съ вопроса „что такое алгебра?“ За нимъ слѣдуетъ указаніе того, что „на этотъ вопросъ нѣтъ яснаго отвѣта ни въ одномъ учебникѣ“.

Признаюсь, что, послѣ работъ новѣйшихъ „педагоговъ“ и послѣ отнесенія самимъ г. Ермаковымъ анализа безконечномалыхъ къ алгебрѣ, я не умѣю отвѣтить на этотъ вопросъ. Въ своемъ учебникѣ я дѣйствительно сказалъ неясно, что алгебра имѣетъ цѣлью обобщать какъ способы для рѣшенія ариѳметическихъ вопросовъ, такъ и самыя вопросы.

Зам. 42. Авторъ, углубляясь, какъ и всегда, въ самое существо дѣла, говоритъ прежде всего, что такое неясное представленіе объ алгебрѣ можетъ быть объяснено исторически. По его мнѣнію причина въ томъ, что „алгебра возникла не цѣликомъ, но постепенно“.

Сожалѣю очень, что не знакомъ съ науками, возникавшими цѣликомъ, въ полномъ ихъ составѣ. Можетъ быть тогда, разобравши, очевидно скоро, нѣсколько такихъ наукъ, я и сумѣлъ бы дать хотя болѣе научное опредѣленіе алгебры.

Естественно, что подъемъ новаго общаго вопроса вынудилъ автора сразу заговорить объ очень многомъ. Приходится довести краткость замѣчаній до высшей степени, чтобы слѣдить за нимъ хотя въ главныхъ чертахъ.

Зам. 43. Педагоги обвиняются въ томъ, что не знаютъ „окончательныхъ“ цѣлей алгебры. Изъ этого слѣдуетъ, что самому автору такія цѣли извѣстны. — Другое обвиненіе въ томъ, что педагоги, не зная опредѣленія алгебры и ея цѣлей, не даютъ „стройной“ теоріи этой науки. На это позволю себѣ замѣтить, что система начальной алгебры, обоснованная дидактическими трудами Шредера, Муррея, Мотковскаго и моими по отношенію къ стройности теоріи не допускаетъ конкуренціи никакихъ другихъ системъ. — Алгебра Эйлера признается неясной въ особенности со стороны ученія объ отрицательныхъ количествахъ. Между тѣмъ въ этомъ отдѣлѣ педагогическія достоинства знаменитаго курса выдѣляются съ особой рельефностью. — Теорія Грасмана, котораго авторъ называетъ представителемъ нѣмецкихъ педагоговъ, считается сложной и недоступной даже для взрослыхъ. Выходитъ, значитъ, что глубокій мыслитель писалъ для дѣтей свою алгебру пространства и измѣреній, положившую начало ряду капитальныхъ изслѣдованій.

Зам. 44. Авторъ выставляетъ себя противникомъ нѣмецкихъ учебниковъ, называя ихъ „тяжеловѣсными“. Соглашаюсь съ нимъ

въ общихъ чертахъ, но совмѣстно съ этимъ назову многіе изъ французскихъ учебниковъ легковѣсными. — Однако, съ своеобразной снисходительностью, авторъ отдаетъ справедливость нѣмецкимъ ученымъ въ томъ, что „они выяснили природу отрицательныхъ количествъ и показали, что въ математикѣ много условнаго“. Но въ этомъ дѣлѣ заслуга далеко не однихъ нѣмцевъ, а и французовъ Арганда, Коши и многихъ другихъ, и также ряда представителей другихъ націй. — По заявленію автора „теперь мы знаемъ, что въ математикѣ много условнаго, зависящаго отъ нашего произвола“. Казалось бы, что, говоря объ этомъ, всего ближе и вѣрнѣе помянуть не нѣмцевъ, а соотечественника Лобачевского. — „Давъ“, продолжаетъ авторъ, „другія опредѣленія и условія, мы можемъ получить многіе отдѣлы математики въ новой формѣ, отличной отъ теперешней“. Но приходится замѣтить, что именно подобную мысль прежде и отчетливѣе всѣхъ разъяснилъ не нѣмецъ, а англичанинъ Гамильтонъ.

Пропускаю длинный рядъ возможныхъ замѣчаній. Слишкомъ большое разногласіе мое съ авторомъ устраняетъ возможность говорить обо многомъ.

Зам. 45. По мнѣнію автора „вредно заблужденіе“ педагоговъ, стремящихся въ ариметикѣ знакомить учениковъ съ понятіями о скобкахъ и „формулахъ“.

На мой взглядъ, введеніе этихъ понятій въ связи съ общимъ развитіемъ арифметической теоріи преобразовываетъ арифметику изъ хаоса безотчетныхъ рецептовъ для производства дѣйствій надъ числами въ стройную и понятную теорію этихъ дѣйствій. Употребленіе скобокъ и разсматриваніе выраженій приучаютъ учащихся на первыхъ же порахъ къ мышленію ясному, отчетливому и сосредоточенному.

Зам. 46. Обвиняя педагоговъ въ неумѣніи объяснить цѣли алгебры, авторъ совѣтуетъ во введеніи къ этой наукѣ рѣшать разными способами задачи въ родѣ единственно приводимой имъ такой: „Куплено 280 зеркалъ по 19 рублей за зеркало; 5 зеркалъ разбилось; почему проданы остальные, если получено 730 рублей прибыли?“

Ученикъ, знакомый изъ арифметики съ понятіями о скобкахъ и выраженіяхъ, легко убѣдится въ томъ, что два способа рѣшенія задачи, указанные авторомъ, соотвѣтствуютъ равенству выраженій

$\frac{19 \cdot 280 + 730}{280 - 5}$ и $\frac{19 \cdot 5 + 730}{280 - 5} + 19$. Такой ученикъ можетъ сообразить и самъ, что подобное, только искусственно представимое логически и довольно исключительное въ математическомъ смыслѣ, преобразование выраженія имѣетъ ничтожно малое отношеніе къ простымъ и общимъ началамъ алгебры, а потому съ точки зрѣнія здоровой педагогій объясненіе такого преобразования должно считаться совершенно и неумѣстнымъ, и не своевременнымъ.

Зам. 47. Авторъ, возставаая противъ общихъ пріемовъ рѣшенія задачъ, рекомендуетъ каждую ариѳметическую задачу рѣшать, „если возможно“, разными пріемами.

Замѣчу, что сколько бы ученики автора не рѣшили задачъ, и сколько бы онъ самъ не придумалъ пріемовъ, они не догадаются, что обыкновенное сложеніе чиселъ 1, 2, 3 и 4 можно сдѣлать ста двадцатью способами. Между тѣмъ при употребленіи скобокъ и при разсматриваніи выраженій такое заключеніе дается ученикамъ легко и съ широкой пользой для ихъ мышленія.

Зам. 48. Рѣшеніе разными пріемами однѣхъ и тѣхъ же задачъ признается нужнымъ для того, чтобы ученики убѣдились въ возможности замѣнять „рядъ однихъ дѣйствій надъ числами рядомъ другихъ дѣйствій надъ тѣми же числами“.

Благоразумные преподаватели заботятся обыкновенно переводить учащихся отъ легчайшаго къ труднѣйшему. Нашъ авторъ совѣтуетъ начинать дѣло прямо съ конца.

Зам. 49. Наконецъ, г. Ермаковъ раскрываетъ давно ожидаемое опредѣленіе алгебры. Онъ выражаетъ его словами „алгебра даетъ правила для замѣны однихъ дѣйствій рядомъ другихъ дѣйствій надъ тѣми же числами“ и затѣмъ восклицаетъ: „вотъ точное опредѣленіе алгебры“.

Но если это опредѣленіе точно, то авторъ укажетъ намъ, о какомъ преобразованіи дѣйствій говорится въ алгебрѣ, когда поясняютъ напр., что $-3 > -5$, что уравненіе $6x + 8y = -11$ не имѣетъ ни цѣлыхъ, ни положительныхъ паръ рѣшеній, что $Lg_2 5$ несоизмѣримъ, что общій наибольшій дѣлитель выраженій $(a + b)^2$ и $a^2 - b^2$ есть $a + b$, что трехчленъ $x^2 + px + q$ при условіи $p^2 < 4q$ имѣетъ мнимые корни, что выраженіе a^x при a положительномъ, но не равномъ единицѣ, измѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до ∞ .

По отношенію къ высшей алгебрѣ авторъ докажетъ, что теорема Коши о существованіи корня цѣлой функціи говоритъ о преобразованіи дѣйствія, что тотъ же смыслъ имѣетъ теорема Ролля, свидѣтельствующая о томъ, что если функція при извѣстныхъ условіяхъ обращается два раза въ нуль, то ея производная въ соотвѣтствующемъ промежуткѣ также обращается въ нуль, что въ томъ же смыслѣ ученія о преобразованіи дѣйствій нужно понимать и теорему Абеля о невозможности общаго рѣшенія алгебраическаго уравненія, съ каковымъ обстоятельствомъ, впрочемъ, я съ особой точки зрѣнія согласенъ. Авторъ, включающій въ алгебру весь анализъ безконечномалыхъ, объяснитъ намъ, конечно, что напр. ученіе о непрерывности функцій, или же о максимумѣ и минимумѣ есть ученіе о преобразованіи дѣйствій. Онъ докажетъ и то, что изслѣдованія Арбогаста или Ампера о числѣ и видѣ произвольныхъ функцій интеграловъ уравненій съ частными производными относятся также къ теоріи преобразованія дѣйствій, съ чѣмъ опять таки, только при особой точкѣ зрѣнія, я не прочь согласиться.

Зам. 50. Убѣдившись въ томъ, что раскрытое опредѣленіе алгебры обнаружило педагогамъ ихъ собственное невѣжество, авторъ начинаетъ теперь поучать педагоговъ съ самыхъ азовъ и распространяется подробно о томъ, какъ въ алгебрѣ обозначаются числа, какъ обозначаются дѣйствія сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, какъ пишется дробь, что такое ариѳметическая и алгебраическая дробь и т. под.. Хотя на нѣкоторыя изъ такихъ поученій нельзя не обратить вниманія.

Авторъ говоритъ, что въ алгебрѣ „вмѣсто чиселъ употребляются буквы“. Обучаемый педагогъ, уже напуганный и желающій показать, что онъ понялъ профессора, согласится, конечно, что между алгеброй и каллиграфіей есть много общаго. „Впрочемъ“, продолжаетъ авторъ, „въ алгебрѣ вмѣстѣ съ буквами употребляются и числа“. Очевидно, что пугливая догадка педагога утвердится еще больше, потому что, по терминологіи автора, въ прописяхъ также содержатся „числа“ вмѣстѣ съ буквами. „Въ алгебрѣ“, говорится дальше, „дѣйствія не производятся, а только обозначаются“. Легкая однако эта наука алгебра и странно, что не цѣликомъ она возникла, если въ ней только стоитъ поставить знакъ и дѣйствіе кончено. „Дѣленіе въ алгебрѣ“, говорится еще, „принято обозначать

въ видѣ дробей". Не трудны, значитъ, и преобразованія алгебраическія, если они однимъ письмомъ превращаютъ процессы въ объекты.

Необходимо однако дать читателю хотя умственный отдыхъ. Полезно нарисовать передъ нимъ довольно ясную картину выводовъ предыдущаго. Мы видимъ, какъ патентованный ученый пронизываетъ надъ главными успѣхами современныхъ наукъ, надъ ихъ приобращеніями въ дѣлѣ обобщенія частныхъ. Мы видимъ, какъ односторонній, хотя и сильный въ своей средѣ специалистъ, рѣшаетъ безъ всякой усталости длинную серію общихъ вопросовъ. Онъ создаетъ науки цѣликомъ, видитъ сразу окончательныя цѣли наукъ, дѣлаетъ самыя отдаленныя предсказанія. Онъ третируетъ съ высока главные выводы математики, классифицируетъ представителей математики такъ, что выдающіеся ученые ставятся въ самый отдаленный, приниженный рядъ, раздаетъ патенты на мудрость и на невѣжество чуть не цѣлымъ націямъ. Въ глазахъ словоохотливаго корреспондента не только академіи конфузится за свою теорію функций глубокомысленный Вейерштрассъ, тотъ самый „педагогъ“ по терминологіи автора, который съумѣлъ недавно изъ общепризнаннаго слабымъ въ логическомъ развитіи ума женщины образовать крѣпкій умъ первокласснаго математика Ковалевской. Въ глазахъ ординарнаго профессора выставляется педагогомъ дѣтей капитальный мыслитель Грасманъ, создавшій теперь цѣлую школу и молодыхъ, какъ хотя бы нашъ Богуславскій, и многихъ пожилыхъ ученыхъ.

Но вникая серьезно, задумчиво въ такое пышное откровеніе автора, мы слѣдимъ осторожно, внимательно по его собственнымъ стопамъ и уличаемъ его шагъ за шагомъ. Намъ раскрывается мало по малу и небрежность изложенія автора, и легковѣсность подавляющаго большинства приводимыхъ имъ утвержденій и слабое знакомство его съ нѣкоторыми, имъ самимъ цитируемыми, данными. Мы видимъ, какъ легко смѣшиваетъ авторъ самыя несовмѣстимые, вообще хорошо извѣстные, термины и даже понятія, какой простой и краткой критикѣ подвергаются почти всегда безапелляціонно его самыя отчетливыя заключенія, какіе очевидные парадоксы возникаютъ сплошь и рядомъ на почвѣ тѣхъ данныхъ, которыми онъ прикрывается въ качествѣ якобы твердыхъ щитовъ. Мы видимъ, что общенаучныя соображенія автора не свидѣтельствуютъ о разносторонности его знаній, что философія математики не осѣняетъ

его своимъ покровомъ, что наконецъ мышленіе въ сферѣ самой математики проявляетъ замѣтно нѣкоторыя странности. Вспомнимъ, какой планъ указывается въ статьѣ для развитія мышленія учащихся и для доставленія имъ знаній полныхъ, чѣмъ объясняется спорность вопроса о врожденныхъ способностяхъ, какія наставленія даются представителямъ другихъ наукъ, напр., значить, Гельмгольцу, по скольку онъ фізіологъ, Мендѣлееву, какъ химику, и другимъ. Вспомнимъ, что признается импульсомъ, расшатавшимъ мышленіе математиковъ, каково сужденіе объ исключительности средствъ одной математики для повѣрки выводовъ мышленія, въ чемъ указана склонность человѣческаго ума, напр., слѣдовательно, классифицирующаго ума Конта, прямолинейнаго ума Спенсера и другихъ. Подумаемъ въ частности надъ планомъ введенія въ алгебру и надъ общимъ опредѣленіемъ этой науки. Подумаемъ надъ объясненіемъ перваго урока алгебры и надъ ея сравненіемъ съ арифметикой.

Однако, нашлись же читатели, принявшіе, я думаю, лишь по особой своей скромности, ученіе автора къ свѣдѣнію. Полагаю, что есть еще такіе, которыхъ авторитетное общественное положеніе автора заставляетъ и теперь по крайней мѣрѣ колебаться.

Отсюда заключаю, что мой трудъ, утомительный и скучный, я еще не въ правѣ окончить. Пойду снова за авторомъ и теперь уже прямо въ ту среду, съ которой авторъ ассимилировался давно и въ которой онъ вращался постоянно.

Зам. 51. (Выраженіе, состоящее изъ „чиселъ“ и буквъ, соединенныхъ разными знаками, называется алгебраическимъ выраженіемъ или „формулой“).

Сказанное опредѣленіе уместно лишь при хаотическомъ смѣшеніи понятій о числѣ—умственной абстракціи, о буквѣ—графическомъ знакѣ, о выраженіи, какъ символѣ математическаго объекта, и о формулѣ, какъ выразительницѣ математическаго соотношенія.

Зам. 52. („Каждая“ формула выражаетъ „рядъ“ дѣйствій, произведенныхъ надъ какими бы то ни было числами, выраженными буквами).

Но выраженіе $(-1)^2$ принимается въ алгебрѣ за обозначеніе одного дѣйствія и только надъ отрицательной единицей, подобно тому, какъ выраженіе $e^{2\pi i}$ считается въ теоріи мнимыхъ количествъ

обозначеніемъ одного дѣйствія и надъ числомъ, опять не произвольнымъ, а равнымъ основанію натуральныхъ логарифмовъ.

Зам. 53. (Но въ алгебрѣ есть тоже свои дѣйствія: такъ нѣсколько формулъ можно складывать, вычитать, умножать и дѣлить между собою).

Такимъ образомъ сложеніе, обозначенное въ выраженіи $a^2 + b^2$, гдѣ, положимъ, a и b дѣйствительныя количества, есть сложеніе алгебраическое.

Зам. 54. (Такія дѣйствія называются алгебраическими дѣйствіями въ отличіе отъ ариѳметическихъ дѣйствій, которыя совершаются надъ числами).

Значитъ вычитаніе въ выраженіи $3 - 10$ есть вычитаніе ариѳметическое.

Зам. 55. (Упростить формулу значитъ рядъ дѣйствій, указанныхъ этой формулой, замѣнить рядомъ возможно простѣйшихъ дѣйствій).

Выходитъ, что упростить $a . a$, гдѣ, положимъ, a есть цѣлое и положительное число, значитъ замѣнить это выраженіе такимъ $(1 + 1 + \dots + 1) + (1 + 1 + \dots + 1) + \dots + (1 + 1 + \dots + 1)$, потому что какое же дѣйствіе проще обыкновеннаго счета.

Зам. 56. (Рядъ дѣйствій, выражаемый „упрощенной“ формулой, даетъ самое простое рѣшеніе задачи).

Значитъ, суммируя безконечный рядъ $1 - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \dots$ въ форму простѣйшаго выраженія $S_n 1$, мы получаемъ самое простое средство для вычисленія синуса единицы.

Зам. 57. (Вся математика состоитъ изъ положеній, условій, опредѣленій и задачъ).

Судя по порядку распредѣленія матеріала математическихъ наукъ, въ каковомъ порядкѣ, замѣтимъ, на самомъ дѣлѣ распредѣлена авторская система алгебры, нужно думать, что основанія теоріи проекцій авторъ будетъ излагать такъ: сначала докажетъ, что проекція замкнутой ломаной равняется нулю, затѣмъ условится въ томъ, что проектированіе дѣлается черезъ проведеніе проектирующихъ линій или плоскостей параллельно, и наконецъ отчетливо опредѣлитъ самыя понятія о проекціи ломаной и прямой на прямую ось проекцій. Или начала дифференціальнаго исчисленія будутъ излагаться такъ: сначала будутъ доказаны разнообразныя теоремы о производныхъ,

потомъ раскроется постулатъ о равенствѣ предѣловъ равныхъ переменныхъ и наконецъ будутъ опредѣлены самыя понятія о производной и о предѣлѣ. Да, съ нѣкоторой точки зрѣнія, подобная мысль не дурна. Нѣчто схожее развилъ Эрмитъ, но только иначе.

Зам. 58. (Для „сокращенія нашихъ разсужденій“ мы часто вводимъ новыя названія-термины; въ такомъ случаѣ необходимо условиться, что мы будемъ подразумѣвать подъ вновь введеннымъ терминомъ. Это и будетъ „опредѣленіемъ“).

Такъ какъ точное объясненіе понятія даетъ основную характеристику этого понятія, исключаящую притомъ надобность въ другихъ характеристикахъ, то изъ словъ автора выводится, что опредѣленіе проекціи прямой на прямую служитъ лишь къ сокращенію разсужденій, а не къ построенію особаго, вполне изолированнаго, математическаго метода. Также опредѣленіе производной лишь сокращаетъ мышленіе, но не создаетъ особой математической науки, самой глубокой изъ современныхъ. Правда, и въ этомъ есть оттънокъ истины. Г. Ермаковъ видитъ кое что, скрытое отъ нѣкоторыхъ.

Зам. 59. (Основные положенія, очевидныя сами по себѣ, называются аксіомами. Таковы основные положенія геометріи).

Для многихъ очевидно, что предѣлъ ломаной, вписанной въ кривую, представляетъ длину кривой и это замѣчаніе является основнымъ въ вопросахъ опредѣленія криволинейныхъ длинъ. Слѣдуетъ ли считать такое утвержденіе аксіомой?

Зам. 60. (Нѣкоторыя математическія науки берутъ свои основныя положенія изъ другихъ наукъ. Такъ алгебра беретъ свои основныя положенія изъ ариѳметики).

Итакъ алгебра не имѣетъ даже своихъ собственныхъ основныхъ положеній. Зачѣмъ же при такихъ условіяхъ считаютъ ее особой наукой?

Предыдущія десять выписокъ относятся къ одной съ нѣсколькими строчками страницъ трактата.

Можно было бы и подольше остановиться на той же страницѣ, но лучше остановимся пока и рассмотримъ потомъ самую систему авторскаго курса алгебры.

(Окончаніе во второмъ выпускѣ).



Второй выпускъ выйдетъ
по истеченіи мѣсяца.

Цѣна 30 коп.

Р 124104

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



124104

Шапошников Н.А. Разбор статьи Ермакова О п