О СКОЛЬЖЕНІИ РЕМНЯ

НА ШКИВАХЪ.

Н. Е. Жуковскаго.

Отдѣльный оттискъ изъ VII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества любителей Естествознанія.

МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Б. Черныш. пер., д. Пустошкина,
противъ Англійской церкви.
1894.

О СКОЛЬЖЕНІИ РЕМНЯ

НА ШКИВАХЪ.

Н. Е. Жуковскаго.

Отдѣльный оттискъ изъ VII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія.

МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Б. Черныш. пер., д. Пустошкина,
противъ Англійской церкви.
1894.

О скольженіи ремня на шкивахъ.

Н. Е. Жуковскаго.

(*Сообщено въ Политехническомъ обществѣ при Императорскомъ техническомъ училищѣ 20 ноября 1893*).

§ 1. Литература теоріи ременной передачи въ послѣднее время пополнилась работами русскихъ авторовъ: профессоровъ Н. П. Петрова *) и М. Н. Демьянова **), которые затронули нѣкоторыя интересныя стороны вопроса о скольженіи упругаго ремня на шкивахъ.

Результаты, полученные этими авторами, значительно между собою расходятся. Профессоръ М. Н. Демьяновъ предполагаетъ, что упругій ремень скользитъ на каждомъ шкивѣ вдоль всей дуги охвата и объясняетъ разнообразіе рабочихъ усилій, передаваемыхъ ременною передачею, зависимостью коэффиціентовъ тренія отъ силъ натяженія T и t обѣихъ свободныхъ частей ремня. Профессоръ же Н. П.

*) Н. П. Петровъ. „Вліяніе тренія при передачѣ работы упругимъ ремнемъ". Извѣстія с.-петербургскаго Технологическаго института 1893.

**) М. Н. Демьяновъ „О значеніи упругости ремня при передачѣ имъ работы". Извѣстія с.-петербургскаго Технологическаго института 1891 и 1892. Продолженіе той же статьи въ извѣстіяхъ за 1893.

Петровъ, оставаясь при обыкновенномъ представленіи о коэффиціентѣ тренія, объясняетъ вышеупомянутое разнообразіе измѣненіемъ скользящихъ частей упругаго ремня на шкивахъ, которыя, по его мнѣнію, менѣе дугъ охвата. Настоящая замѣтка посвящается разбору воззрѣній упомянутыхъ авторовъ.

§ 2. При нерастяжимомъ ремнѣ для всякаго элемента его, прикасающагося къ шкиву, должно быть удовлетворено неравенство, которое при отбрасываніи силъ инерціи пишется для ведущаго шкива такъ:

$$f_1 \tau\, d\alpha > -d\tau, \tag{1}$$

гдѣ f_1 коэффиціентъ тренія ремня на ведущемъ шкивѣ, τ натяженіе ремня въ разсматриваемомъ мѣстѣ, а $d\alpha$ элементъ дуги шкива, отсчитываемой въ сторону вращенія шкива.

Интегрируя это неравенство вдоль всей дуги охвата α, и разсуждая аналогичнымъ способомъ для рабочаго шкива, получимъ:

$$\frac{T}{t} < e^{f_1 \alpha_1}, \quad \frac{T}{t} < e^{f_2 \alpha_2}, \tag{2}$$

гдѣ $T > t$ представляетъ силы натяженій свободныхъ частей ремня, а f_2 и α_2 имѣютъ на рабочемъ шкивѣ значенія, аналогичныя f_1 и α_1.

Неравенство (2) допускаетъ передачу съ разнообразнымъ отношеніемъ $T:t$, не превосходящимъ меньшей изъ вторыхъ частей этихъ неравенствъ. Вмѣсто f_1 и f_2 мы можемъ разсматривать нѣкоторые иные коэффиціенты f_1' и f_2', называемые коэффиціентами сцѣпленія и удовлетворяющіе равенствамъ:

$$\frac{T}{t} = e^{f_1'\alpha_1} = e^{f_2'\alpha_2}. \quad (3)$$

Очевидно, что коэффиценты сцѣпленія менѣе соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ тренія и въ моментъ достиженія одного изъ коэффиціентовъ сцѣпленія до величины коэффиціента тренія ремень всѣми своими точками начинаетъ скользить по шкиву. Коэффиціенты сцѣпленія зависятъ отъ $T:t$ и выражаютъ суммарно эффектъ силъ тренія, развивающихся во всѣхъ элементахъ дугъ охвата.

Въ растяжимомъ ремнѣ измѣненія натяженія τ при переходѣ отъ одной точки шкива къ другой сопровождается непремѣнно скольженіемъ ремня по шкиву, а это обстоятельство требуетъ замѣны неравенства (1) равенствомъ. Такимъ образомъ, опуская силы инерціи, будемъ имѣть для ведущаго и рабочаго шкива слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\begin{aligned} f_1\tau d\alpha + d\tau &= 0. \\ -f_2\tau d\alpha + d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интеграція этихъ уравненій приводитъ насъ къ соотношенію:

$$\frac{T}{t} = e^{f_1\alpha_1} = e^{f_2\alpha_2}, \quad (5)$$

которое невозможно при постоянномъ значеніи f_1, f_2, α_1, α_2 и измѣняющемся для разныхъ случаевъ передачи отношеніи $T:t$. Профессоръ Н. П. Петровъ объясняетъ это обстоятельство тѣмъ, что ремень скользитъ не на всѣхъ дугахъ охвата, а только на частяхъ этихъ дугъ α_1' и α_2'. Формула (5) должна быть при этомъ замѣнена на:

$$\frac{T}{t} = e^{f_1\alpha_1'} = e^{f_2\alpha_2'} , \qquad (6)$$

гдѣ дуги скольженія α_1' α_2' опредѣляются по данному отношенію $T:t$. На остающихся частяхъ дугъ охвата ремень не скользитъ, сила тренія не развивается и натяженіе не измѣняется.

Профессоръ М. Н. Демьяновъ предполагаетъ, что величины α_1 и α_2 въ форм. (5) должны считаться за дуги охвата, вдоль которыхъ полностью совершается скольженіе; сами же коэффиціенты f_1 и f_2, по его мнѣнію, подобно вышеупомянутымъ коэффиціентамъ сцѣпленія измѣняются съ измѣненіемъ силъ натяженія T и t.

§ 3. Независимо отъ воззрѣнія на коэффиціенты тренія получается связь между угловыми скоростями шкивовъ и натяженіями T и t, которую указалъ Kretz.

Она является слѣдствіемъ условія сохраняемости массы ремня въ данномъ мѣстѣ пространства:

$$\rho v = \text{const.},$$

гдѣ ρ плотность ремня, отнесенная къ единицѣ его длины, а v скорость элемента ремня. Величина ρ по плотности ρ_0 нерастянутаго ремня и модулю его упругости ε (мы относимъ модуль ко всей площади сѣченія ремня) выражается формулою:

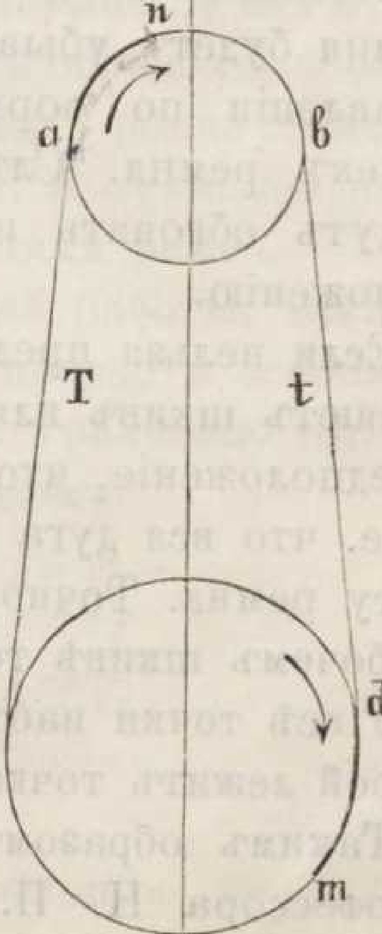
$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\tau}{\varepsilon}}$$

такъ что,

$$\frac{v}{1+\frac{\tau}{\varepsilon}}=\text{const.} \qquad (7)$$

Эта формула показываетъ, что скорость ремня въ тѣхъ точкахъ болѣе, въ которыхъ онъ болѣе растянутъ. Присоединяя къ этому, что натяженіе ремня на шкивахъ убываетъ въ ту сторону, въ которую дѣйствуетъ на элементъ ремня сила тренія, легко сообразимъ, гдѣ должны находиться нескользящія точки ремня.

Пусть (фиг. 1) ремень набѣгаетъ на ведущій шкивъ въ точкѣ *a* со скоростью, большею или меньшей нежели идетъ шкивъ, и въ точкѣ *n* получаетъ скорость, одинаковую со шкивомъ, т. е. точка *n* есть нескользящая точка. Считая, что во всѣхъ другихъ точкахъ дуги *an* ремень скользитъ по шкиву, мы должны предположить, что въ нихъ во всѣхъ ремень опережаетъ шкивъ или отстаетъ отъ него, потому что, если бы нѣкоторыя точки дуги *an* опережали шкивъ, а другія отставали отъ него, то между ними имѣлась бы кромѣ *n* другая точка, идущая со скоростью шкива.



Фиг. 1.

Теперь легко увидѣть, что предположеніе о томъ, что точки дуги *an* обгоняютъ шкивъ, равно какъ и предпо-

ложеніе о томъ, что онѣ отстаютъ отъ шкива, мо
жетъ быть опровергнуто.

Если точки дуги an обгоняютъ шкивъ, то сил
тренія будетъ дѣйствовать на нихъ противъ дви
женія шкива, а слѣдовательно сила натяженія ремн
будетъ возрастать отъ a до n, а это на основані
форм. (7) показываетъ, что скорость точекъ ремн
возрастаетъ отъ a до n, т. е., что всѣ точки дуг
an отстаютъ отъ шкива, что противно положенію

Такъ же опровергается предположеніе, что точк
дуги an отстаютъ отъ шкива. Въ этомъ предпо
ложеніи сила тренія на элементы ремня an будет
дѣйствовать по движенію шкива, а сила натяжені
ремня будетъ убывать отъ a до n. Въ томъ же на
правленіи по форм. (7) будетъ убывать скорост
точекъ ремня. Слѣдовательно всѣ точки ремня a
будутъ обгонять шкивъ, что противорѣчитъ пред
положенію.

Если нельзя предположить, что точки дуги an об
гоняютъ шкивъ или отстаютъ отъ него, то остаетс
предположеніе, что онѣ идутъ со скоростью шкива
т. е. что вся дуга an представляетъ нескользящу
дугу ремня. Точно такъ же, предположивъ, что н
рабочемъ шкивѣ точка m не скользитъ, докажемъ
что всѣ точки набѣгающей дуги dm, въ концѣ ко
торой лежитъ точка m, не скользятъ.

Такимъ образомъ приходимъ къ предположені
профессора Н. П. Петрова о существованіи н
скользящихъ дугъ. Въ частномъ случаѣ при совпа
деніи точекъ n съ a и m съ d мы бы имѣли пред
положеніе профессора М. Н. Демьянова.

Въ томъ и другомъ предположеніи ремень набѣ гаетъ на шкивы всегда со скоростью шкивовъ. Называя угловыя скорости ведущаго и рабочаго шкивовъ чрезъ w_1 и w_2, а ихъ радiусы чрезъ r_1 и r_2, найдемъ на основанiи сказаннаго изъ ур. (7) формулу:

$$\frac{r_1 w_1}{1+\frac{T}{\varepsilon}}=\frac{r_2 w_2}{1+\frac{t}{\varepsilon}}. \tag{8}$$

Это и есть соотношенiе, которое далъ Kretz.

§ 4. Мы разсмотримъ теперь изслѣдованiе профессора Демьянова. Считая коэффицiенты тренiя ремня на шкивахъ зависящими отъ силъ натяженiя, авторъ интегрируетъ ур. (4), принимая въ нихъ f_1 и f_2 за постоянныя величины. Такимъ образомъ, коэффицiентъ тренiя въ данномъ элементѣ ремня является, по его мнѣнiю, не функцiею τ, а функцiею натяженiй T и t въ свободныхъ частяхъ ремня.

Какъ въ первой части своей работы, такъ въ особенности во второй авторъ придаетъ особенное значенiе видоизмѣненному имъ уравненiю (5), которое онъ пишетъ такимъ образомъ:

$$\left(\frac{1+\frac{t}{\varepsilon}}{1+\frac{T}{\varepsilon}}\right)^{\frac{T}{t}}=e^{\frac{f_1\alpha_1}{1+\frac{T}{\varepsilon}}}=e^{\frac{f_2\alpha_2}{1+\frac{t}{\varepsilon}}}. \tag{9}$$

Это уравненiе получается съ помощью интегрированiя форм. (4), послѣ измѣненiя въ нихъ независимаго перемѣннаго α на α_0.

На ведущемъ шкивѣ $r\alpha_0$ представляетъ длину части набѣгающаго ремня при натяженiи T, которая, вступивъ на ведущій шкивъ и расположившись отъ точки a (фиг. 1), будетъ имѣть длину $r_1\alpha$; точно такъ же на рабочемъ шкивѣ $r_2\alpha_0$ представляетъ длину части набѣгающаго ремня при натяженіи t, которая, вступивъ на рабочій шкивъ и расположившись отъ точки d, будетъ имѣть длину $r_2\alpha$.

Для меня совершенно непонятна нужда въ такомъ измѣненіи независимыхъ перемѣнныхъ, такъ какъ всѣ установившіяся движенія обыкновенно разсматриваются, относя опредѣляемыя величины къ точкамъ пространства (Уравненія гидродинамики въ формѣ Эйлера). Сдѣланная авторомъ замѣна независимыхъ перемѣнныхъ тѣмъ болѣе неудачна, что ведетъ его къ ошибочному предположенію, что величины α_1 и α_2 въ форм. (9) представляютъ дуги охвата, между тѣмъ какъ это суть раздѣленныя на r_1 и r_2 длины частей набѣжавшаго ремня, которыя покрыли дуги охватовъ.

Если бы мы желали ввести въ форм. (3) дуги охвата, то должны бы были вмѣсто α_1, подставить величину:

$$\left(1+\frac{T}{\varepsilon}\right)\int_0^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{1+\frac{\tau}{\varepsilon}}=\left(1+\frac{T}{\varepsilon}\right)\left(\alpha_1-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\alpha_1}\frac{\tau d\alpha}{1+\frac{\tau}{\varepsilon}}\right)$$

или по форм. (4)

$$\left(1+\frac{T}{\varepsilon}\right)\left(\alpha_1-\frac{1}{f_1}lg\frac{1+\frac{T}{\varepsilon}}{1+\frac{\tau}{\varepsilon}}\right). \qquad (10)$$

Подобнымъ же образомъ вмѣсто α_2 надо подставить величину:

$$\left(1+\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\left(\alpha_2-\frac{1}{f_2}lg\frac{1+\frac{T}{\varepsilon}}{1+\frac{\tau}{\varepsilon}}\right). \tag{10'}$$

Но когда подобная замѣна была бы сдѣлана, то форм. (9) обратилась бы въ форм. (5).

Впрочемъ отличіе форм. (9) отъ форм. (5) не имѣетъ большаго вліянія на результаты изслѣдованія, такъ какъ обѣ формулы отличаются только на малые члены порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, Поэтому мы будемъ при дальнѣйшемъ изложеніи этого параграфа пользоваться форм. (5), что приведетъ насъ съ упомянутою степенью точности къ тѣмъ же результатамъ, какіе имѣются у профессора М. Н. Демьянова.

Пусть ремень первоначально имѣетъ во всѣхъ своихъ частяхъ постоянное натяженіе T_0, (постоянное натяженіе установится во всѣхъ точкахъ ремня, если, надѣвъ его на свободные шкивы, нѣсколько разъ повернемъ послѣдніе), а потомъ передаетъ рабочее усиліе $T-t$. По воззрѣнію профессора М. Н. Демьянова извѣстными задачи являются T_0, $T-t$ и дуги охвата α_1, α_2, а искомыми величины $T:t$, f_1, f_2. Для опредѣленія этихъ трехъ неизвѣстныхъ собственно было бы нужно три уравненія: два ур: (5) (по Демьянову (9)) и еще одно уравненіе, получаемое изъ разсмотрѣнія длины ремня. Но это послѣднее уравненіе профессоръ М. Н. Демьяновъ почему то разбиваетъ на два. Сравнивая длину ремня при постоянномъ натяженіи T_0 съ тою же длиною при натяженіяхъ T и t въ свободныхъ частяхъ ремня, найдемъ по форм. (10) и (10′) уравненіе:

$$l\left(\frac{2}{1+\frac{T_0}{\varepsilon}}-\frac{1}{1+\frac{T}{\varepsilon}}-\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}}\right)+\frac{r_1\alpha_1+r_2\alpha_2}{f}\frac{T_0}{1+\frac{T_0}{\varepsilon}}+$$

$$lg\left(\frac{1+\frac{T}{\varepsilon}}{1+\frac{t}{\varepsilon}}\right)\left(\frac{r_1}{f_1}+\frac{r_2}{f_2}\right)=0,$$

гдѣ l длина свободныхъ частей ремня.

Это уравненіе при отбрасываніи малыхъ членовъ порядка выше $\frac{1}{\varepsilon}$ приводитъ насъ къ формулѣ:

$$T_0-\frac{T+t}{2}+\frac{1}{2l}\Bigg((r_1\alpha_1+r_2\alpha_2)\;T_0-$$

$$-(T-t)\left(\frac{r_1}{f_1}+\frac{r_2}{f_2}\right)\Bigg)=0. \tag{11}$$

Эту формулу профессоръ М. Н. Демьяновъ преобразуетъ на основаніи соотношенія Poncelet:

$$T_0=\frac{T+t}{2} \tag{12}$$

и получаетъ: *)

$$(T-t)\left(\frac{r_1}{f_1}+\frac{r_2}{f_2}\right)=(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2)\;T_0. \tag{13}$$

---

*) Извѣстія за 1891 и 1892, стр. 318.

Такимъ образомъ для рѣшенія упомянутой задачи къ ур. (5) вмѣсто одного уравненія прибавляются два: ур. (12) и (13).

Вѣрность соотношенія (12) профессоръ М. Н. Демьяновъ доказываетъ въ первой части своей работы геометрически. Замѣтивъ, что длины свободныхъ частей ремня при переходѣ отъ натяженій T и t къ натяженію T_0 не измѣняютъ своей суммы при существованіи соотношенія (12), онъ утверждаетъ, что при этомъ соотношеніи не должны измѣняться и длины ремня на дугахъ охвата, когда онѣ переходятъ отъ состоянія, опредѣленнаго крайними натяженіями T и t, къ постоянному натяженію T_0. Онъ утверждаетъ это на томъ основаніи, что часть ремня дуги охвата, въ которой натяженіе измѣняется отъ T до t и которая должна имѣть въ какой-нибудь промежуточной точкѣ натяженіе T_0, можно разбить на соотвѣтственные элементы, лежащіе съ двухъ сторонъ этой точки, натяженія τ и τ' которыхъ удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\tau+\tau'}{2}=T_0.$$

Для каждыхъ двухъ такихъ соотвѣтственныхъ элементовъ сумма длинъ при переходѣ отъ натяженій τ и τ' къ натяженію T_0 не измѣнялась бы, если бы длины самихъ соотвѣтственныхъ элементовъ были бы между собою равны, но это обстоятельство, которое авторъ почему то считаетъ очевиднымъ, въ разсматриваемомъ случаѣ и не имѣетъ мѣста.

Во второй части своей работы профессоръ М. Н. Демьяновъ доказываетъ соотношеніе (12) аналитически.

Онъ говоритъ, что ур. (11) должно быть удовлетворено въ частномъ случаѣ при $T=t=T_0$, и такъ какъ это положеніе сокращаетъ первыя два члена уравненія, то множитель при $\frac{1}{2l}$ долженъ для всякихъ T и t обращаться въ нуль. Это оправдываетъ заразъ и ур. (12) и ур. (13).

Я думаю, что обращеніе въ нуль суммы двухъ первыхъ членовъ ур. (11) при упомянутомъ предположеніи требуетъ только, чтобы множитель при $\frac{1}{2l}$ обращался въ нуль въ томъ же предположеніи. Это послѣднее обстоятельство сейчасъ же замѣчается, когда на основаніи форм. (5) представимъ ур. (11) въ видѣ:

$$T_0-\frac{T+t}{2}+\frac{r_1\alpha_1+r_2\alpha_2}{2l}\left(T_0-\frac{T-t}{lg\,\frac{T}{t}}\right)=0, \quad (14)$$

такъ какъ при $T=t=T_0$

$$\frac{T-t}{lg\left(1+\frac{T-t}{t}\right)}=T_0\ .$$

Я думаю, что съ точки зрѣнія профессора М. Н. Демьянова соотношеніе Poncelet надо все-таки считать приближеннымъ, имѣющимъ мѣсто, какъ это видно изъ форм. (14), при большомъ l сравнительно съ r_1 и r_2. При этомъ любопытно замѣтить, что при малости $T-t$ сравнительно съ $T+t$ соотношеніе Poncelet тоже оправдывается на основаніи форм. (14). Мы можемъ при сдѣланномъ предположеніи воспользоваться приближенною формулою:

$$lg\frac{T}{t}=lg\left\{\frac{\frac{T+t}{2}+\frac{T-t}{2}}{\frac{T+t}{2}-\frac{T-t}{2}}\right\}=lg\left(1+2\frac{T-t}{T+t}\right)=2\frac{T-t}{T+t}\tag{15}$$

и преобразовать на основанiе ея ур. (14). Это даетъ намъ:

$$\left(T_0-\frac{T+t}{2}\right)\left(1+\frac{r_1\alpha_1+r_2\alpha_2}{f}\right)=0\,.\tag{16}$$

Въ такомъ же смыслѣ приближенны и основныя форм. профессора М. Н. Демьянова, полученныя имъ изъ неправильно составленнаго ур. (13). Написавъ ур. (5) въ видѣ:

$$f_1=\frac{1}{\alpha_1}lg\frac{T}{t},\quad f_2=\frac{1}{\alpha_2}lg\frac{T}{t}$$

и преобразовавъ ихъ на основанiи форм. (15) и (12), получимъ выраженiя коэффицiентовъ тренiя:

$$f_1=\frac{T-t}{\alpha_1 T_0}\,,\quad f_2=\frac{T-t}{\alpha_2 T_0}\,,\tag{17}$$

отличающiяся отъ данныхъ профессоромъ М. Н. Демьяновымъ *) только на члены порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

§ 5. Переходимъ къ изслѣдованiю профессора Н. П. Петрова. Счититая коэффицiенты f_1 и f_2 постоянными, зависящими отъ природы трущихся веществъ, онъ приходитъ наоснованiи форм. (5) къ необходимому заключенiю, что тренiе упругаго ремня о шкивы совершается только на нѣкоторыхъ частяхъ α_1' и α_2' дугъ охвата. Остающiяся части дугъ охва-

*) Извѣстiя за 1891 и 1892, стр. 320.

та представляютъ нескользящія дуги съ постоянными натяженіями T и t. Эти дуги, какъ было объяснено въ § 3, должны лежать съ тѣхъ сторонъ шкивовъ, съ которыхъ ремень набѣгаетъ.

Такое объясненіе явленія вполнѣ раздѣляетъ и Grashof *). При этомъ никакой неопредѣленности, о которой упоминаетъ профессоръ М. Н. Демьяновъ во второй части своей статьи, при рѣшеніи задачи о ременной передачѣ не получается. Данными задачи должны считаться f_1, f_2, T_0, $T-t$, а искомыми величинами α_1, α_2, $T:t$. Для опредѣленія этихъ трехъ неизвѣстныхъ имѣются два ур. (6) и уравненіе, полученное изъ разсмотрѣнія длины ремня, которое на основаніи форм. (10) и (10') (замѣняя въ этихъ формулахъ α_1 и α_2 на α_1' и α_2' мы получимъ длины, въ которыя обратятся скользящія дуги при переходѣ къ натяженіямъ T и t) и форм. (6), можетъ быть написано въ такомъ видѣ, даннomъ Н. П. Петровымъ **):

$$\frac{l+r_1\left(\alpha_1-\frac{1}{f_1}lg\frac{T}{t}\right)}{1+\frac{T}{\varepsilon}}+\frac{l+r_2\left(\alpha_2-\frac{1}{f_2}lg\frac{T}{t}\right)}{1+\frac{t}{\varepsilon}}$$

$$+\left(\frac{r_1}{f_1}+\frac{r_2}{f_2}\right)lg\left(\frac{T}{t}\frac{1+\frac{T}{\varepsilon}}{1+\frac{t}{\varepsilon}}\right)=\frac{2l+r_1\alpha_1+r_2\alpha_2}{1+\frac{T_0}{\varepsilon}}. \quad (18)$$

Преобразуемъ это уравненіе, отбрасывая въ немъ члены порядка ε^{-2} и высшихъ порядковъ:

*) Grashof. Maschinenlehre, Bd. II, § 84.

**) Извѣстія за 1893, стр. 36.

$$T_0 - \frac{T+t}{2} + \frac{1}{2l}\left(T_0(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2) - (T-t)\left(\frac{r_1}{f_1} + \frac{r_2}{f_2}\right)\right.$$

$$\left. - r_1\left(\alpha_1 - \frac{1}{f_1} lg \frac{T}{t}\right) T - r_2\left(\alpha_2 - \frac{1}{f_2} lg \frac{T}{t}\right) t \right) = 0. \quad (19)$$

Ур. (19) показываетъ, что при l большомъ сравнительно съ r_1 и r_2 соотношенiе Poncelet приближенно удовлетворяется. Если мы имѣемъ случай малой разности $T-t$ сравнительно съ суммою $T+t$, то на основанiи форм. (15) ур. (19) можно привести къ виду:

$$T_0 - \frac{T+t}{2} = \frac{(r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2)(T-t)}{2(2l + r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2)} \quad (20)$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ сдѣланномъ предположенiи начальное натяженiе будетъ болѣе полусуммы рабочихъ натяженiй при большемъ ведущемъ шкивѣ и наоборотъ.

Напишемъ теперь формулы, данныя профессоромъ Н. П. Петровымъ для опредѣленiя влiянiя скольженiя ремня на скорость рабочаго шкива и на передаваемую работу. Эти формулы мы напишемъ въ приближенномъ видѣ, ограничиваясь членами порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

Изъ форм. (8) получимъ:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}\left(1 - \frac{T-t}{\varepsilon}\right). \quad (21)$$

Отсюда видно, что скорость рабочаго шкива, передаваемая упругимъ ремнемъ, мѣнѣе своей кинематической величины и тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе модуль упругости ремня и чѣмъ болѣе передаваемое рабочее усиліе $T-t$. Пользуясь форм. (20) мы можемъ опредѣлять ε по угловымъ скоростямъ шкивовъ и разности $T-t$. Что касается до работы, потерянной при скольженіи ремня, то она опредѣляется по форм. (7), пользуясь которою получаемъ соотношеніе между угловою скоростью ω_1 точки нескользящей дуги ведущаго шкива и угловою скоростью ω точки скользящей дуги того же шкива:

$$\frac{\omega}{1+\frac{\tau}{\varepsilon}}=\frac{\omega_1}{1+\frac{T}{\varepsilon}}.$$

Отсюда съ точностью до членовъ порядка $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$\omega_1-\omega=\frac{\omega_1}{\varepsilon}(T-\tau). \tag{22}$$

Умножая скорость скольженія $r_1(\omega_1-\omega)$ на силу тренія $\tau f_1 d\alpha$ будемъ имѣть секундную работу тренія на элементѣ $r_1 d\alpha$ ведущаго шкива, которая по форм. (22) и (4) напишется такъ:

$$r_1(\omega_1-\omega)\, f_1\tau d\alpha=-\frac{\omega_1 r_1}{\varepsilon}(T-\tau)\, d\tau.$$

Суммируя элементарныя работы по всей скользящей дугѣ, найдемъ работу Q, потерянную на преодолѣніе тренія скольженія ремня по ведущему шкиву:

$$Q=\frac{\omega_1 r_1}{2\varepsilon}(T-t)^2. \tag{23}$$

Также найдемъ для потерянной работы на рабочемъ шкивѣ:

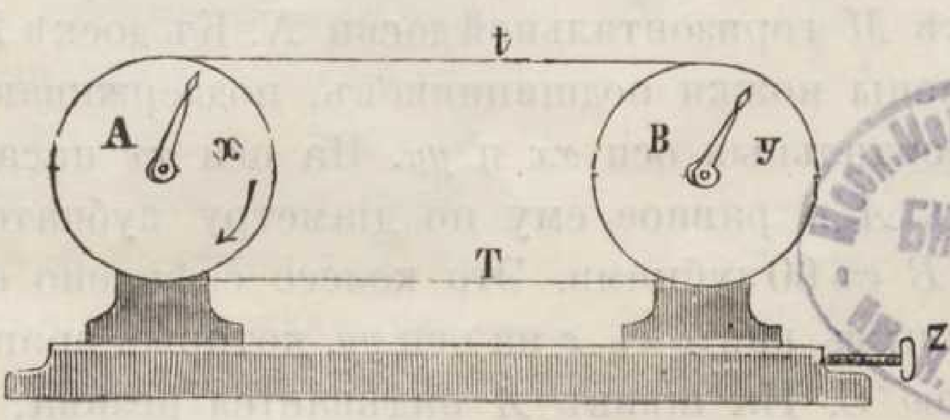
$$Q_1=\frac{\omega_2 r_2}{2\varepsilon}(T-t)^2 \tag{24}$$

Такимъ образомъ обѣ работы между собою равны, что представляетъ интересный результатъ, указанный Н. П. Петровымъ.

§ 6. Профессоръ М. Н. Демьяновъ въ концѣ своей статьи говоритъ по поводу существованія нескользящихъ дугъ, что „окончательный приговоръ въ данномъ случаѣ принадлежитъ опыту». Хотя, оставаясь при обыкновенномъ представленіи о коэффиціентѣ тренія, едва ли можно найти объясненіе возможности передачи упругимъ ремнемъ различныхъ рабочихъ усилій иное чѣмъ то, которое дали Grashof и профессоръ Н. П. Петровъ, но тѣмъ не менѣе подтвержденіе существованія нескользящихъ дугъ прямымъ опытомъ не лишено интереса. Этотъ послѣдній параграфъ моей статьи будетъ посвященъ объясненію небольшаго прибора, построеннаго мною для упомянутой цѣли.

Но прежде этого я опишу здѣсь модель для демонстраціи скольженія растяжимаго ремня, находящуюся въ механическомъ кабинетѣ Московскаго Университета (изъ коллекціи Рело).

Она состоитъ (фиг. 2) изъ двухъ равныхъ шки-



Фиг. 2.

вовъ A и B, охваченныхъ резиновымъ ремнемъ. На осяхъ шкивовъ придѣланы съ одной стороны ручки, а съ другой—стрѣлки x и y. Начальное натяженіе ремня можетъ быть измѣняемо посредствомъ передвиженія шкива B винтомъ z. Поставивъ стрѣлки x и y параллельно и натянувъ ремень, начинаемъ вращать ручку шкива A, причемъ передаваемое рабочее усиліе $T-t$ идетъ на преодолѣніе силы тренія въ подшипникѣ шкива B. Сдѣлавъ нѣсколько оборотовъ, увидимъ, что стрѣлки перестанутъ быть параллельны, причемъ стрѣлка рабочаго шкива отстанетъ отъ стрѣлки x — ведущаго. Если поворачивая винтъ z, увеличимъ натяженіе T_0, то замѣтимъ, что отъ этого отставаніе стрѣлки увеличивается.

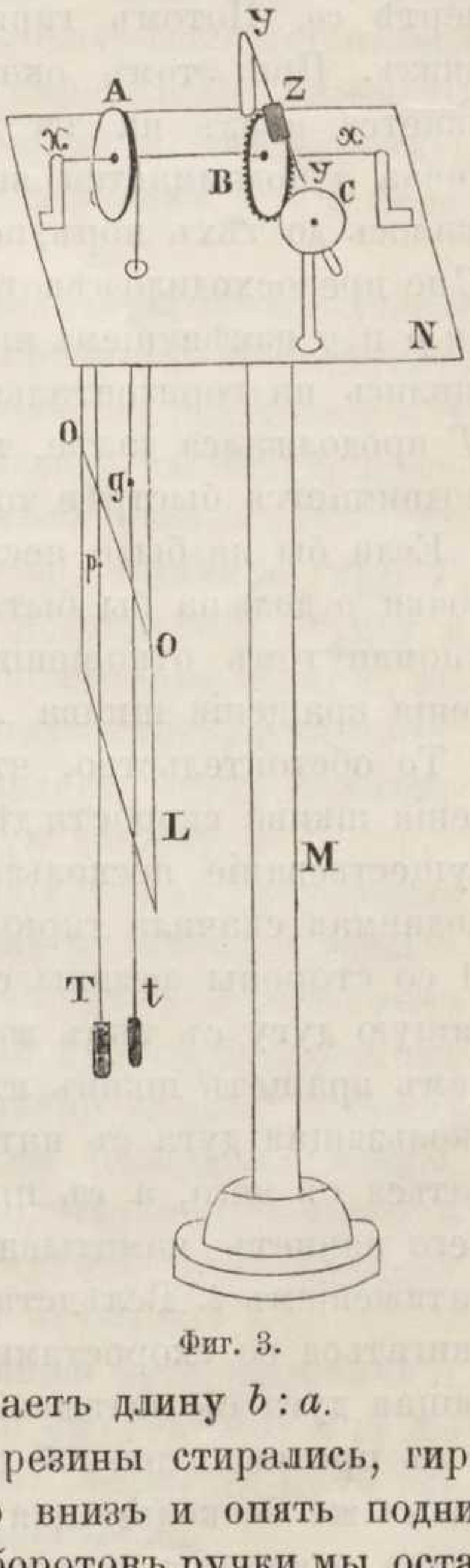
На первый взглядъ это кажется парадоксальнымъ, ибо представляется, что увеличиванье натяженія должно уменьшать скольженіе. Причина въ томъ, что съ возрастаніемъ T_0 возрастаетъ треніе въ подшипникѣ шкива B, а это увеличиваетъ передаваемое рабочіе усиліе $T-t$ и согласно форм. (21) уменьшаетъ ω_2.

Приборъ, устроенный мною для опытнаго доказательства существованія нескользящихъ дугъ, *) состоитъ (фиг. 3) изъ укрѣпленной на вертикальной стойкѣ M горизонтальной доски N. Къ доскѣ N прикрѣплены ножки подшипниковъ, поддерживающихъ горизонтальныя оси xx и yy. На оси xx насажены: шкивъ A и равное ему по діаметру зубчатое колесо B съ 60 зубцами. Это колесо сцѣплено съ безконечнымъ винтомъ z на оси yy, который вращается ручкою C. На шкивъ A надѣвается резина, обре-

---

*) Этотъ приборъ демонстрированъ въ засѣданіи Физическаго отдѣленія О. Л. Е. 1894 г. мая 13.

мененная на концахъ грузами T и t. Передъ свободными частями резины помѣщается прикрѣпленная къ N вертикальная дощечка L, на которой отъ горизонтальной черты oo идутъ дѣленія вверхъ и внизъ. Опытъ производился нижеописаннымъ способомъ.



Фиг. 3.

Сначала отмѣчались бѣлою краскою на резинѣ съ меньшимъ натяженіемъ t двѣ точки: одна на чертѣ oo, другая выше черты на разстояніе b. Потомъ медленнымъ вращеніемъ ручки C гиря T опускалась внизъ и обѣ отмѣченныя точки переводились на сторону съ натяженіемъ T такъ, чтобы вторая точка вступила на черту oo. При этомъ разстояніе между точками удлиннялось и обращалось въ a. Отсюда слѣдуетъ, что при переходѣ отъ натяженія T къ натяженію t каждая единица длины резины принимаетъ длину $b:a$.

Послѣ этого отмѣтки съ резины стирались, гиря T опускалась значительно внизъ и опять поднималась. Сдѣлавъ болѣе 60 оборотовъ ручки мы останавливались и отмѣчали на обѣихъ резинахъ двѣ бѣлыя точки *p* и *g* такъ, чтобы онѣ пришлись на чертѣ *oo*. Потомъ гиря *T* медленно опускалась внизъ. При этомъ оказывалось, что точка *p* опускается внизъ на тѣ же разстоянія, на которыя точка *g* поднимается вверхъ. Это явленіе продолжалось до тѣхъ поръ, пока число оборотовъ ручки *C* не превосходило нѣкотораго предѣла. Когда же точки *p* и *g* измѣненіемъ направленія вращенія возвращались на горизонтальную черту и подъемъ гири *T* продолжался далѣе, то замѣчалось, что точка *p* поднимается быстрѣе точки *g* въ отношеніи $a:b$.

Если бы не было нескользящей дуги, то скорость точки *p* должна бы быть болѣе скорости точки *g* въ упомянутомъ отношеніи, независимо отъ направленія вращенія шкива *A*.

То обстоятельство, что съ измѣненіемъ направленія шкива скорости дѣлаются равны, доказываетъ существованіе нескользящей дуги. Дѣйствительно, поднимая сначала гирю *T*, мы образуемъ на шкивѣ *A* со стороны резины съ натяженіемъ *T* нескользящую дугу съ тѣмъ же натяженіемъ. Когда начнемъ вращать шкивъ въ обратную сторону, то нескользящая дуга съ натяженіемъ *T* будетъ сматываться съ него, а съ противоположной стороны на него начнетъ наматываться нескользящая дуга съ натяженіемъ *t*. Вслѣдствіе этого точки *p* и *g* будутъ двигаться со скоростями шкива. Когда вся нескользящая дуга съ натяженіемъ *T* смотается со шкива, а съ противоположной стороны на него намотается такая же нескользящая дуга съ натяженіемъ *t*, то точка *p* начнетъ опускаться быстрѣе нежели точка

g подниматься въ отношеніи $a:b$. Этимъ объясняется существованіе упомянутаго предѣльнаго числа оборотовъ ручки C. Можно бы было воспользоваться этимъ обстоятельствомъ для опредѣленія величины нескользящей дуги, но довольно трудно замѣтить моментъ, въ который скорости точекъ p и g перестаютъ быть равны.

Поэтому для опредѣленія величины нескользящей дуги я пользовался инымъ пріемомъ. Я замѣтилъ, что, отводя точки p и g на большое разстояніе отъ черты oo и возвращая ихъ назадъ къ чертѣ, получается два положенія равновѣсія резины. Если мы приведемъ точку p на черту oo, поднимая гирю T, то одновременно съ этимъ вступаетъ на черту и точка g; если же, значительно поднявъ гирю T, мы станемъ ее опускать и приведемъ точку p на черту, то точка g при этомъ переходитъ черту и поднимается выше ея на нѣкоторую высоту h.

Эти два различныя положенія резины получаются потому, что въ первомъ случаѣ на шкивѣ A лежитъ нескользящая дуга съ натяженіемъ T, а во второмъ на немъ лежитъ нескользящая дуга съ натяженіемъ t. Во второмъ случаѣ на шкивѣ лежитъ большая масса резины, и поэтому на свободные концы, считая до точекъ p и g приходится меньшая масса резины. Она то и соотвѣтствуетъ недостающему столбику резины высоты h и натяженія t.

Такъ какъ длина нескользящей дуги на шкивѣ A радіуса r въ обоихъ случаяхъ имѣетъ одну и ту же величину $r\beta$ (это слѣдуетъ изъ форм. (6)), то для опредѣленія β получаемъ уравненіе:

$$r\beta - \frac{b}{a} r\beta = h,$$

изъ котораго

$$\beta = \frac{ah}{(a-b)\,r}. \tag{25}$$

При моихъ начальныхъ опытахъ я имѣлъ въ виду демонстрировать явленіе только съ качественной стороны, поэтому пользовался тонкою резиновою нитью въ 1, 3 *mm* толщины и обременялъ ея концы сравнительно довольно большими грузами (100 *gr*, 50 *gr*, 20 *gr*). При этомъ всѣ описанные факты получались весьма рѣзко.

Я пробовалъ опредѣлять β по форм. (25) при трехъ нижеслѣдующихъ расположеніяхъ гирь (каждое расположеніе провѣрялось нѣсколькими наблюденіями).

1) $T = 100gr$ и $t = 20gr$. При этомъ получилось $a = 5cm$, $b = 2{,}5cm$, такъ что

$$\frac{a}{a-b} = 2.$$

$\frac{h}{r}$ опредѣлялось какъ дуга на шкивѣ A (діаметръ его $= 5cm$) прямо въ градусахъ. Для этого, получивъ высоту h, мы продвигали вращеніемъ ручки точку g на линію oo и сосчитавъ число оборотовъ ручки умножали ихъ на 6 (каждый оборотъ винта продвигаетъ нашъ шкивъ на 6^0). Мы нашли, что

$\frac{h}{r}$ соотвѣтствуетъ 9 об. $= 9.6 = 54^0$.

Откуда по фор. (25)

$$\beta = 54.2 = 108^0.$$

$$\alpha' = 180 - 108 = 72^0.$$

Такова дуга скольженія. Выраженная въ доляхъ радіуса она будетъ 1,257.

Беря согласно форм. (6) неперовъ логариѳмъ отъ $\frac{T}{t}=5$, найдемъ

$$lg\ 5=1,609.$$

Такимъ образомъ коэффиціентъ тренія нашей резины изъ этого опыта есть

$$f=\frac{1,609}{1,257}=1,28.$$

2) $T=100,\ t=50.$

$a=5,\ \ b=3,4,\ \ \frac{a}{a-b}=\frac{50}{16}.$

$\frac{h}{r}$ соотвѣтствуетъ 8 об. $=8.6=48^0$.

$\beta=48.\frac{50}{16}=150^0.$

$\alpha'=180-150=30^0$, α' въ доляхъ радіуса$=0,523$.

$lg\frac{T}{t}=lg\ 2=0,693.$

$f=\frac{0,693}{0,523}=1,32.$

3) $T=50,\ t=20.$

$a=5,\ b=4,\ \frac{a}{a-b}=5.$

$\frac{h}{r}$ соотвѣтствуетъ 4,5 об. $=4,5.6=27$.

$\beta=27.5=135^0.$

$$\alpha' = 180 - 135 = 45^0,\ \alpha' \text{ въ доляхъ радіуса} = 0{,}785.$$

$$lg\frac{T}{t} = lg5 - lg2 = 1{,}609 - 0{,}693 = 0{,}916.$$

$$f = \frac{0{,}916}{0{,}785} = 1{,}17.$$

Эти вычисленія показываютъ, что уже при первоначальныхъ приближенныхъ наблюденіяхъ величина f получается въ разныхъ случаяхъ довольно близкая. Мы надѣемся указанною методою произвести наблюденія надъ ремнями надлежащаго размѣра.