НАША УЧЕБНО-УЧЕНАЯ КРИТИКА.

(Разборъ статьи проф. Кояловича).

СТАТЬЯ

Н. А. Шапошникова.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1906.

Наша учебно-ученая критика.

(Разборъ статьи профессора Кояловича).

Было время, когда на дѣятельность нашей официальной педагогической критики, представленной Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, можно было смотрѣть, какъ на явленіе болѣе или менѣе нормальное. Хотя нерѣдко проявляемая дѣятельность не въ достаточной мѣрѣ опредѣляла соотвѣтствующую внѣшнему авторитету широту взглядовъ, но все же въ образцахъ критики обнаруживались признаки закономѣрности сужденій и внутренней порядочности полемическихъ пріемовъ. Разногласіе критикуемыхъ авторовъ и цѣнителей ихъ произведеній вело обыкновенно къ лучшему освѣщенію разбираемаго матеріала. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ нельзя было не признать, что официальная критика достигала плодотворныхъ результатовъ путемъ обуздыванія того крайняго невѣжества, которое еще недавно было широко распространено среди дѣятелей нашей педагогической литературы.

Но вредный по существу принципъ неприкосновенной авторитетности высшаго для этой литературы критическаго учрежденія не замедлилъ привести къ развитію на почвѣ этого принципа совершенно ненормальныхъ крайностей. Въ послѣднее время однимъ изъ представителей элементарно-математической критики въ Ученомъ Комитетѣ явился дѣятель въ лицѣ профессора Кояловича, которому въ подобномъ общественномъ учрежденіи не должно быть мѣста. Нельзя допускать, чтобы лицо, совершенно не компетентное въ дѣлѣ, нуждающееся само, несмотря на носимое имъ званіе, въ элементарномъ философско-математическомъ обученіи, вліяло на ходъ математическаго образованія въ нашемъ отечествѣ. Только незамѣченнымъ еще недоразумѣніемъ можно объяснить то, что подъ официальной санкціей появляются рецензіи, въ которыхъ не безъ труда отыскиваются даже малые слѣды пониманія дѣла, но которыя взамѣнъ того наполнены образцами крайняго недомыслія, прикрываемаго извнѣ тѣмъ особымъ литературнымъ апломбомъ, который не стѣсняется въ средствахъ пусканія пыли въ глаза.

Настоящимъ моимъ отвѣтомъ на выполненный г. Кояловичемъ разборъ моей новой тригонометріи я намѣреваюсь раскрыть въ ясной и неоспоримой формѣ дѣйствительную подкладку такой критики. Я берусь фактически воочію доказать полную некомпетентность критика въ вопросахъ элементарно-математической философіи и предлагаю любымъ авторитетамъ науки, если бы нашлись между таковыми желающіе стать на сторону указаннаго рецензента—попытаться опровергнуть эти доказательства, приводимыя мною отчетливо на судъ всей математической публики опредѣленнымъ литературнымъ путемъ. Въ настоящемъ отвѣтѣ я не буду дѣлать отдѣльныхъ выдержекъ изъ оцѣниваемой рецензіи, а приведу эту послѣднюю дословно цѣликомъ, такъ какъ рѣшительно вся она послужитъ матеріаломъ для обсужденія вопроса далеко не частнаго и не узкаго по его смыслу. Видя въ этой рецензіи фактическое показаніе объ уровнѣ современнаго намъ философскаго развитія даже въ средѣ спеціалистовъ науки, я придаю своей брошюрѣ значеніе историческаго протокола, свидѣтельствующаго о трудностяхъ реформаторской борьбы за идеалы дѣйствительной науки.

Мнѣ уже приходилось раньше отвѣчать длинными разборами на статьи критиковъ и выяснять при этомъ, повидимому, безспорно недостатокъ компетентности возражателей. Мнѣ не было сдѣлано по прежнимъ поводамъ никакихъ литературныхъ возраженій, а подтвержденій моей правдивости я слышалъ изустно не мало. Долженъ замѣтить однако, что въ упомянутыхъ случаяхъ я доказывалъ только некомпетентность моихъ оппонентовъ въ дѣлѣ, но не считалъ себя въ правѣ посылать упреки въ сознательныхъ подтасовкахъ, вь недопустимыхъ искаженіяхъ. Пріемы же новаго оппонента я вынужденъ оцѣнить по достоинству, называя ихъ подлинными терминами, и объявивъ это въ предварительномъ указаніи, я приступаю къ разбору статьи и назначаю при этомъ разные оттѣнки шрифта для отличія рѣчей моего критика отъ моихъ собственныхъ.

Въ своемъ предисловіи авторъ указываетъ тѣ цѣли, которыхъ онъ стремился достигнуть.

Изданіе предлагаемой книги, говоритъ онъ, имѣетъ первою цѣлью показать, что примѣненіе къ тригонометріи алгебраическаго метода изложенія, расширеннаго введеніемъ самыхъ простыхъ основъ плоскостнаго исчисленія, позволяетъ построить всю систему тригонометріи естественно и общѣе, чѣмъ достигалось это до сихъ поръ примѣненіемъ обычнаго геометрическаго метода. Вторая цѣль показать, что элементарный математическій анализъ можетъ быть совершенно обособленъ отъ высшаго, такъ какъ, благодаря новой постановкѣ вопроса о разложеніи всѣхъ элементарныхъ функцій въ ряды, эта труднѣйшая задача разрѣшается алгеброй самостоятельно и притомъ не менѣе просто и строго, чѣмъ достигалось это раньше средствами дифференціальнаго исчисленія.

Разсмотрѣвъ книгу г. Шапошникова, мы не можемъ одобрить ни цѣлей его, взятыхъ сами по себѣ, ни осуществленія ихъ.

Прежде всего г. Кояловичу не слѣдовало бы такъ начинать свою критику. Онъ долженъ былъ бы понять, что книги, подобныя моей новой тригонометріи, пишутся вовсе не съ цѣлью заслужить одобреніе гг. Кояловичей и комп.. Цѣль книги, какъ сказано въ предисловіи, показать всей математической публикѣ, что имѣется совершенно новая система изложенія этого отдѣла математики, охватывающая все его содержаніе и представляющая много преимуществъ передъ обычной. Критикъ могъ бы оспаривать только послѣднее, но и для такой цѣли онъ долженъ былъ бы, конечно, обладать достаточной суммой образовательныхъ средствъ.

Остановимся нѣсколько на вопросѣ о томъ, какое значеніе имѣетъ система изложенія какого-либо отдѣла элементарной математики. Нужно принять во вниманіе ту роль, какую проявляетъ изученіе математики въ дѣлѣ воспитанія мысли. Араго, какъ извѣстно, называлъ математику логикой въ дѣйствіи. Гельмгольцъ считалъ изученіе математики лучшимъ средствомъ противъ неподвижности и невѣрности мышленія, и такихъ мнѣній высказано вообще не мало.

Но только при условіи строгой систематичности изложенія можно уподоблять части математическаго изученія формальной логикѣ. До сихъ поръ такого уподобленія заслуживала одна геометрія, но никакъ не основы общаго элементарнаго анализа. Ариѳметика, алгебра и тригонометрія только въ отдѣльныхъ главахъ общаго ихъ ученія, а зачастую даже только въ отдѣльныхъ теоремахъ приближались къ типу научнаго построенія. Полная же схема этихъ отдѣловъ математики представляла съ философской стороны хаосъ понятій и процессовъ мысли, наслоенный цѣлыми вѣками малограмотной компиляторской работы составителей учебниковъ.

Я уже имѣлъ случай указывать историческую причину такого явленія. Теоретическая разработка основъ математическаго анализа возникла почти одновременно съ открытіемъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Огромныя перспективы, раскрывавшіяся этими исчисленіями, привлекли къ нимъ всѣ крупныя научныя силы. На долю элементарнаго анализа, развиваемаго лишь слабыми работниками мысли, пришлись всѣ послѣдствія недостатка знаній и широты взглядовъ такихъ работниковъ.

Только въ послѣднее время труды Грасмана въ алгебрѣ положенія и Гамильтона въ теоріи кватерніоновъ освѣтили истинные принципы научнаго построенія основъ. Для нашихъ спеціалистовъ, не имѣющихъ къ указаннымъ трудамъ никакого прикосновенія, реформаторская дѣятельность въ вопросѣ освобожденія элементарнаго курса отъ хаоса представляется не только не заслуживающей одобренія, но и прямо дикой. Иначе и не можетъ быть, такъ какъ она заставляетъ ихъ переучиваться. Но переучиваться нужно именно для того, чтобы школы, руководимыя спеціалистами, создавали бы людей дѣйствительной мысли, а не профанаціи ея.

Плоскостное исчисленіе автора представляетъ собою пеструю и весьма слабо изложенную смѣсь основныхъ понятій теоріи проекцій и теоріи комплексныхъ чиселъ.

Для того, чтобы мыслящее лицо могло выразиться такимъ образомъ, оно должно было бы попытаться найти недостатки въ опредѣленіяхъ, въ доказательствахъ теоремъ, въ послѣдовательности ихъ, въ точности языка. Для оцѣнки моего изложенія слѣдовало бы сравнить его съ прежними Арганда, Франсе, Варрена, Муррея. Ниже я докажу ясными для всякаго читателя свидѣтельствующими признаками, что съ этими трудами лицъ, основывавшихъ научную теорію комплексныхъ количествъ, мой критикъ совершенно не знакомъ. Не имѣя на самомъ дѣлѣ средствъ сказать о моемъ изложеніи что либо дѣльное, онъ прибѣгаетъ прежде всего къ нижеслѣдующему образцу литературной казуистики:

Изложеніе настолько неудовлетворительно, что, напр., нѣтъ опредѣленія понятія о направленіи отрѣзка, а, слѣдовательно, и объ углѣ между двумя отрѣзками.

Критикъ не доволенъ тѣмъ, что, приступая къ изложенію теоріи векторовъ, я начинаю такъ: Всякое направленіе прямой *OM* на плоскости можно различать вполнѣ отчетливо. Для этого достаточно указывать уголъ α, какой эта прямая дѣлаетъ съ какимъ либо извѣстнымъ направленіемъ, напр., съ горизонтальной осью OA. По мнѣнію критика, въ серединѣ курса тригонометріи, изложивъ уже значительную часть этого отдѣла математики и поговоривъ тамъ о всякихъ углахъ, острыхъ и иныхъ, а также о разнообразныхъ направленіяхъ тригонометрическихъ линій, нужно начать говорить объ основныхъ понятіяхъ — прямой линіи и углѣ между двумя прямыми. Такая система, видно, не была бы пестрой и слабой. Напротивъ, она заслужила бы лестное одобреніе. Аналогично этому можно, разумѣется, негодовать на то, что, напр. въ геометріи при доказательствѣ Птоломеевой теоремы, проводятъ во вписанномъ многоугольникѣ діагонали и приступаютъ прямо къ разсмотрѣнію подобныхъ треугольниковъ, а упускаютъ изъ виду дать опредѣленія такихъ относящихся къ вопросу понятій, какъ окружность, многоугольникъ и т. под.. Въ самомъ дѣлѣ, какой промахъ въ системѣ изложенія! А какой широкій открывается горизонтъ возраженій у того, кто чувствуетъ себя способнымъ различать такіе промахи! Нельзя не поздравить изобрѣтателя такого метода оппонированія.

Знающіе дѣло легко представятъ себѣ, какова должна быть теорія проекцій, въ которой нѣтъ этихъ основныхъ понятій.

Очевидно, сдѣланное открытіе приподняло нравственныя силы критика. Онъ мнитъ себя особымъ знатокомъ теоріи проекцій, выведенной непосредственно изъ метафизики основныхъ геометрическихъ понятій. Но въ такомъ случаѣ нужно жалѣть о томъ, что публикѣ не разъяснено, для чего собственно понадобились въ разсматриваемой теоріи опредѣленія этихъ понятій. Несомнѣнно, что рѣчь здѣсь именно о метафизикѣ понятій, а не о томъ видѣ усвоенія ихъ, которое всякому изучающему тригонометрію уже принадлежитъ всецѣло. Нужно принять во вниманіе, что въ нашихъ учебныхъ системахъ основанія теоріи проекцій излагаются или въ старшихъ классахъ реальныхъ училищъ, или на спеціальныхъ высшихъ курсахъ. Всегда предполагается, что приступающій къ изученію теоріи проекцій знакомъ съ элементарной геометріей почти въ полномъ ея учебномъ объемѣ. Такимъ образомъ заявленіе г. Кояловича оказалось бы безпочвеннымъ, если бы оно не объяснялось прямѣе особой цѣлью. Нужно втереть очки маловнимательному читателю рецензіи, внушивъ ему средствами литературнаго апломба сомнѣніе въ достоинствахъ авторскаго изложенія. Но по данному вопросу для знающихъ дѣло интереснѣе то, что, какъ ниже будетъ доказано, г. Кояловичъ не понимаетъ истиннаго смысла Декартоваго правила знаковъ, прилагаемаго между прочимъ самымъ существеннымъ образомъ въ теоріи проекцій. Интересно поэтому было бы видѣть въ его собственномъ изложеніи оцѣниваемую имъ теорію, построенную безъ объясненія и соблюденія упомянутаго правила.

Естественность изложенія проявляется въ томъ, что авторъ извратилъ естественный (и строгій) ходъ мысли и построилъ тригонометрію на свойствахъ комплексныхъ чиселъ, въ то время какъ сами эти свойства должны быть выведены изъ тригонометріи, какъ это (казалось бы) всѣмъ извѣстно.

Дѣйствительно, всѣмъ, кто, какъ нашъ критикъ, не имѣетъ ни малѣйшаго понятія о трудахъ созидателей единственно вѣрной теоріи комплекснаго количества, извѣстенъ только выводъ свойствъ комплексныхъ количествъ изъ тригонометріи. А кто, вдобавокъ, какъ тотъ же критикъ, совершенно безграмотенъ въ дѣлѣ математической философіи, тотъ и считаетъ упомянутый выводъ строгимъ. Знающимъ дѣло извѣстно, что строгая математическая теорія какого-либо вопроса должна прежде всего вытекать изъ опредѣленныхъ, соотвѣтствующихъ содержанію вопроса понятій и изъ минимальнаго числа истинъ, положенныхъ въ основаніе вывода. Затѣмъ строгая математическая теорія должна представлять логическую цѣпь положеній, точно формулированныхъ и отчетливо доказанныхъ. Съ этой неоспоримой точки зрѣнія старая алгебраическая теорія мнимыхъ количествъ, включающая въ себѣ и всѣ тригонометрическіе выводы свойствъ этихъ количествъ, представляетъ самое слабое изъ всѣхъ математическихъ ученій и давно уже признана таковой. Крупнѣйшіе авторитеты науки, издавна уже понимавшіе отсутствіе въ указанной теоріи какихъ-либо признаковъ научности, стремились поставить на мѣсто ея хотя практически полезное орудіе исчисленія и потому установили безъ точнаго анализа чисто рецептурную систему соглашеній и правилъ. Всѣ такія положенія, имѣющія характеръ именно предписанныхъ напередъ рецептовъ исчисленія, не оправдывались никакими доказательствами, а провѣрялись лишь нѣкоторымъ ихъ взаимнымъ согласованіемъ. Въ этой алгебраической въ связи съ тригонометріей теоріи мнимаго количества не дается даже необходимаго для характеристики ученія указанія на то, что разсматриваемое исчисленіе относится къ пространству не одного, а двухъ измѣреній. Преобразованія $x+yi=r(\mathrm{Cs}\varphi+i\mathrm{Sn}\varphi)$ и $i^2=-1$, способныя раскрыть такую характеристику, разсматриваются совершенно невѣрно, какъ чисто числовыя. Ни одно алгебраическое дѣйствіе въ этой теоріи не опредѣлено, такъ какъ правила этихъ дѣйствій переносятся съ пространства одного измѣренія въ пространство двухъ бездоказательно и безъ всякаго анализа новыхъ обстоятельствъ, съ упоминаніемъ лишь о замѣчаемомъ исключеніи изъ правила умноженія корней. Попытки же доказывать правила дѣйствій представляютъ очевидный ложный кругъ. Такъ, начиная доказывать правило умноженія комплексовъ $r(\mathrm{Cs}\varphi+i\mathrm{Sn}\varphi)$ и $r_1(\mathrm{Cs}\varphi_1+i\mathrm{Sn}\varphi_1)$, предполагаютъ напередъ и наобумъ, что дѣйствіе это соотвѣтствуетъ обыкновенному умноженію, подчиняется его свойствамъ и, такимъ образомъ, идя въ разсмотрѣніи дѣйствія, только еще подвергаемаго анализу, вопреки логикѣ отъ конца къ началу, примѣняютъ свойства перемѣстительности и распредѣлительности и получаютъ выводъ $rr_1[\mathrm{Cs}(\varphi+\varphi_1)+i\mathrm{Sn}(\varphi+\varphi_1)]$. Знающіе дѣло понимаютъ, конечно, что упомянутое разсужденіе не можетъ считаться доказательствомъ правила умноженія, а есть лишь согласованіе двухъ преобразованій на почвѣ принятыхъ безсвязно и бездоказательно условій.

Такъ вотъ именно такую теорію, единственно знакомую г. Кояловичу, онъ и считаетъ по наивности своей строгой, а ту новую теорію реальныхъ векторовъ, въ которой каждый пунктъ всѣхъ разсужденій точно опредѣленъ и доказанъ, онъ признаетъ извращеніемъ науки. Полагаю, что эта послѣдняя теорія въ ея современномъ развитіи не нуждается въ какой-либо защитѣ. Для проявленія таковой требовалось бы сначала, чтобы нашлись критики, сумѣвшіе обнаружить какіе-либо недостатки этого одного изъ наиболѣе строгихъ математическихъ ученій. Примѣръ же г. Кояловича нуждается лишь въ протокольномъ занесеніи его въ исторію математическаго образованія, какъ безспорный образчикъ профессорскаго недомыслія.

Чтобы судить о томъ, какъ г. Шапошниковъ достигаетъ общности своихъ выводовъ, разсмотримъ, напримѣръ, выводъ теоремы сложенія тригонометрическихъ функцій.

Именно предыдущими словами г. Кояловичъ самолично и воочію начинаетъ расписываться въ удостовѣреніе того, что ему совершенно неизвѣстны даже простѣйшіе труды лицъ, созидавшихъ геометрическую теорію комплекснаго количества. Становится яснымъ, что съ этой теоріей онъ впервые знакомится изъ моей тригонометріи и знакомится все-таки плохо, такъ какъ не понимаетъ основныхъ деталей. Прежде всего достойно вниманія то обстоятельство, что критикъ приписываетъ мнѣ то доказательство теоремы сложенія, которое дано ровно сто лѣтъ назадъ Аргандомъ, а впослѣдствіи самостоятельно воспроизведено Мурреемъ. Мемуаръ Арганда подвергался, къ счастью, оцѣнкѣ не г. Кояловича, а Огюстена Коши, Гаусса, Гамильтона и Уэля, а потому указанные математики не только не нашли въ изслѣдованіяхъ Арганда научныхъ нелѣпостей, но признали автора этихъ изслѣдованій основателемъ истинной теоріи комплекснаго количества и, ставъ на его точку зрѣнія, создали своими трудами грандіозные отдѣлы математики—теорію функцій такъ называемаго мнимаго перемѣннаго и теорію кватерніоновъ. Упомянутое доказательство теоремы сложенія есть одинъ изъ замѣтныхъ плюсовъ геометрической теоріи комплекснаго количества и не допускаетъ конкуренціи никакихъ иныхъ доказательствъ со стороны простоты, общности, философской непосредственности и математической строгости. Возраженіе же противъ этого способа со стороны нашего критика даетъ такой минусъ для оцѣнки математическаго образованія этого критика, что фактъ такого возраженія и помимо указанной исторической справки заслуживаетъ разбора, который я и даю ниже.

Установивъ на стр. 62 понятіе объ умноженіи комплексовъ (модули перемножаются, аргументы складываются), авторъ на стр. 77—78 беретъ два комплекса $1_\alpha = \mathrm{Cs}\alpha + \mathrm{I}\,\mathrm{Sn}\alpha$, $1_\beta = \mathrm{Cs}\beta + \mathrm{I}\,\mathrm{Sn}\beta$ и перемножаетъ ихъ въ лѣвой части „по правилу комплекснаго умноженія", а въ правой части обыкновеннымъ алгебраическимъ способомъ съ замѣной $\mathrm{I}^2 = -1$. Конечно, у него и получается сейчасъ же теорема сложенія, но откуда же авторъ взялъ, что комплексное умноженіе можно считать равносильнымъ обыкновенному алгебраическому при условіи $\mathrm{I}^2 = -1$.

Итакъ, вотъ въ чемъ усматриваетъ критикъ дефектъ доказательства, принадлежащаго, напомню опять, не критикуемому вновь автору, а давно уже и авторитетно оцѣненному Арганду. На мою долю приходится, значитъ, только выяснить, правъ ли этотъ старинный мыслитель, или профессоръ новѣйшей формаціи. Замѣчу въ виду этого, что критикъ, хотя и впервые знакомящійся по моей тригонометріи съ геометрической теоріей комплекснаго количества, долженъ былъ бы однако принимать на себя отвѣтственность за это знакомство. Поэтому онъ долженъ былъ бы понять, что въ указанной теоріи комплексное умноженіе ничуть не обособляется отъ обычнаго алгебраическаго, а разсматривается какъ естественное и полное представленіе послѣдняго, обладающее въ силу не условныхъ соглашеній, а приведенныхъ строгихъ доказательствъ всѣми основными свойствами таковаго умноженія. Въ той же теоріи равенство $I^2 = -1$ разсматривается не какъ обычно принимаемое бездоказательное числовое условіе, а доказывается въ общей логической послѣдовательности выводовъ изъ опредѣленій. Если и употребляются термины комплексное умноженіе и алгебраическое, то различіе относится лишь къ формѣ преобразованія, а не къ существу дѣйствія, строго для обѣихъ формъ согласованному. Выраженіе „откуда взялъ“ является, такимъ образомъ, только признакомъ невмѣняемости вопрошающаго. На этотъ вопросъ можетъ быть единственный отвѣтъ: „разберите, да только съ пониманіемъ, излагаемую теорію, въ частности стр. 62-ю и слѣдующія, и тогда увидите, откуда взято непонятое вами“.

Вѣдь въ этомъ то все и дѣло и доказать это можно не иначе, какъ ссылаясь на ту же теорему сложенія. Немудрено, конечно, что у автора доказательство этой теоремы выходитъ простымъ и общимъ, когда при этомъ доказательствѣ онъ скрытымъ образомъ пользуется самою доказываемою теоремой.

Здѣсь уже мнѣ приходится спросить у критика, и, надѣюсь, съ дѣйствительнымъ правомъ, а не съ показнымъ только для невнимательныхъ читателей, откуда онъ взялъ, что въ упомянутомъ доказательствѣ теоремы сложенія приходится, какъ бы то ни было скрытно, пользоваться той же теоремой. Лично мнѣ вполнѣ извѣстно, что въ основномъ, нужномъ для разсматриваемаго доказательства, построеніи геометрической теоріи комплексовъ тригонометрія вовсе не примѣняется, а если попутно заимствуютъ оттуда одни только понятія о синусѣ и косинусѣ, то опять же дѣлается это не для построенія теоріи, а для перевода ея выводовъ на разсматриваемую попутно тригонометрическую форму комплекса. Было бы желательно, чтобы г. Кояловичъ ухитрился объяснить дѣйствительныя основанія сдѣланнаго имъ возраженія, хотя для установки одного неизбѣжнаго изъ двухъ мнѣній. Вѣдь возраженіе только и можетъ быть объяснено или совершенно безсознательнымъ отношеніемъ къ дѣлу, или сознательной ложью.

Авторъ говоритъ: (модули) перемножаются ариѳметически. А какъ же можно ихъ перемножить инымъ способомъ? Вѣдь они всегда положительныя числа.

Замѣчу на это критику, что модули никогда не бываютъ при обычныхъ взглядахъ математическаго анализа положительными числами, а только абсолютными, и что профессору непристойно смѣшивать такія понятія по существу, а не ради допустимой въ извѣстныхъ случаяхъ, но отнюдь не въ данномъ случаѣ, простоты рѣчи. Вѣдь положительное число соотвѣтствуетъ только единственному вектору, обыкновенно принимаемому горизонтально проведеннымъ, а абсолютное число разсматривается всегда безъ отношенія къ какому бы то ни было направленію, точность же научной рѣчи въ томъ и заключается, чтобы все различимое различать. По мнѣнію критика выходитъ, что ариѳметика занимается изученіемъ положительныхъ чиселъ. Странно однако, что терминъ положительный никогда не встрѣчается въ этомъ отдѣлѣ математики, а появляется впервые въ алгебрѣ, гдѣ, насколько мнѣ извѣстно, также впервые получается понятіе о положительномъ количествѣ, какъ о числѣ со знакомъ, отмѣчающимъ его роль. Но объ этомъ придется еще поговорить дальше. Тамъ критикъ снова подтвердитъ принципіальное смѣшеніе имъ двухъ различимыхъ и подлежащихъ различенію понятій. Теперь же замѣчу, что, употребляя слова „перемножаются ариѳметически", я только слѣдую тому принципу точной научной рѣчи, въ силу котораго въ редакціи правилъ объясняемое, болѣе сложное сводится на объясненное, болѣе простое. Иначе пришлось бы употреблять не совсѣмъ научную фразу: „Для того, чтобы перемножить, нужно перемножить", при чемъ различіе математическое двухъ одинаковыхъ словесныхъ терминовъ не было бы отмѣчено. Да и не безполезно въ педагогическомъ отношеніи напоминать изучающему, что дѣйствія съ модулями суть только ариѳметическія и иными быть не могутъ. Вѣдь, если бы модули были, какъ думаетъ критикъ, положительными количествами, и если бы при извлеченіи корня не было упомянуто и воспріято по привычкѣ, что дѣйствіе съ модулемъ есть только ариѳметическое, то въ примѣненіи правила вышелъ бы курьезный сумбуръ ложнаго круга мысли.

Замѣтимъ еще, что авторъ обѣщаетъ дать въ приложеніяхъ геометрическое доказательство теоремы сложенія, но это доказательство мы такъ и не могли найти въ книгѣ.

Въ предисловіи къ книгѣ сказано, что въ первомъ ея изданіи опускаются проектированныя раньше нѣкоторыя приложенія и также отвѣты задачъ. Казалось бы, что послѣ такого заявленія претензія по поводу опущенія должна быть чѣмъ нибудь мотивирована. Критикъ такихъ мотивовъ не приводитъ. Я же имѣлъ въ виду привести извѣстное геометрическое доказательство вмѣстѣ съ его алгебраическимъ обобщеніемъ главнымъ образомъ для записи его въ протоколъ исторіи, чтобы указать насколько неестественно и сложно доказывалась до сихъ поръ одна изъ основныхъ теоремъ тригонометріи. Между прочимъ я также имѣлъ въ виду расширить нѣсколько въ интересахъ большей ясности разсужденія геометрическую сторону доказательства, указавъ въ частности примѣненіе Декартоваго правила знаковъ, до сихъ поръ еще остающагося, несмотря на важность его, для многихъ неизвѣстнымъ или непонятнымъ. Кстати, мой критикъ ниже свидѣтельствуетъ самъ о непониманіи того же правила, а въ виду этого опущеніе съ моей стороны лишняго случая разъяснить это злополучное правило, пожалуй, и можетъ вызвать претензію.

Что касается до второй цѣли г. Шапошникова, то мы должны признаться, что не вполнѣ ее понимаемъ. Какая же заслуга въ томъ, чтобы обособить элементарный математическій анализъ отъ высшаго, да и развѣ трудно это сдѣлать?

Критикъ считаетъ нормальнымъ, чтобы изложеніе тригонометріи обходилось безъ строгаго и практически удобнаго разрѣшенія вопроса о вычисленіи тригонометрическихъ функцій при произвольномъ значеніи аргумента. Извѣстно однако, что этотъ вопросъ для тригонометріи есть самый главный, что именно для его разрѣшенія вся тригонометрія и была создана и что и въ современномъ состояніи тригонометріи теорія ея въ значительной мѣрѣ для того и строится, чтобы объяснить то же рѣшеніе. Если бы задача обособленія элементовъ не заслуживала вниманія, то надо думать что Декартъ, Эйлеръ и другіе математики не дѣлали бы попытокъ къ ея рѣшенію. Извѣстно, что способы вычисленія элементарныхъ функцій, указанные этими учеными, не совсѣмъ удовлетворительны или по недостатку строгости анализа, или по сложности его. Вслѣдствіе этого рѣшеніе насущныхъ задачъ теоріи элементарныхъ функцій по необходимости относилось къ высшему анализу. А такое отнесеніе знаменовало не иное что, какъ слабость и неестественность системы элементовъ математики. Аргандъ, порѣшивъ съ помощью раскрытой имъ нормальной теоріи комплесныхъ количествъ рядъ капитальныхъ вопросовъ математики, указалъ также и способы разложенія элементарныхъ функцій въ ряды. Но способы эти, хотя и объединены методомъ одной теоріи, имѣютъ однако разные исходные пункты и все-таки недостаточно строго обоснованы. Что бы ни говорили мои критики, я признаю своей существенной заслугой передъ философіей математики то, что, давъ новый элементарный выводъ формулы аналогичной формулѣ Эйлера и совершенно въ духѣ идей Арганда, я пріурочилъ къ этой единственной формулѣ всѣ разложенія и обосновалъ ихъ такъ, что всѣ раньше извѣстныя замѣчанія объ этихъ разложеніяхъ получаются естественно и самыми простыми путями. Такая постановка вопроса о разложеніи, охватывая все содержаніе этого вопроса, по этой самой причинѣ совпадаетъ въ деталяхъ и съ извѣстными выводами, и съ знакомыми пріемами. Но изъ этого не слѣдуетъ, чтобы самое обоснованіе выводовъ и объединяющій ихъ методъ не считались въ достаточной мѣрѣ самостоятельными и новыми.

Стоитъ только расположить теоремы такъ, чтобы послѣдующія вытекали изъ предыдущихъ, потомъ въ любомъ мѣстѣ поставить черту, назвать то, что до этой черты, элементарнымъ анализомъ, остальное высшимъ и—дѣло сдѣлано. Казалось бы, что до сихъ поръ считалось заслугою установить связь между научными дисциплинами, а не разъединять ихъ.

Предыдущее замѣчаніе критика, объясняющее заявленную имъ раньше легкость раздѣленія всей математики на отдѣлы, особо характерно для оцѣнки философско-математическаго развитія профессора. Очевидно, во-первыхъ, что нашъ критикъ видитъ во всемъ математическомъ анализѣ однѣ только взаимно связанныя теоремы, не усматривая того, что естественными гранями для систематизаціи ученія является отнюдь не теоремы, зачастую и не имѣющія ни малѣйшей связи, а опредѣленія постепенно вводимыхъ понятій.

Полагаю, что не послѣдовательность однородныхъ теоремъ, а различіе существа понятій изолируетъ ариѳметику, алгебру, тригонометрію, дифференціальное исчисленіе, интегральное, варіаціонное. Между анализомъ конечныхъ съ одной стороны и анализомъ безконечно малыхъ съ другой грань ставится не по произволу систематизатора, а по внутренней сущности какъ объектовъ анализа, такъ и его методовъ. Слѣдуя въ точности принципу новаго систематизатора науки, какимъ заявилъ себя нашъ профессоръ, и только замѣняя терминъ „теорема" болѣе общимъ, какъ и должно быть, терминомъ „положеніе", можно поставить черту между опредѣленіемъ умноженія дробей и правиломъ такого умноженія, отнеся первое въ элементарный анализъ, а второе въ высшій. На томъ же основаніи можно и опредѣленіе производной отнести къ элементарному анализу, а правила дифференцированія къ высшему. Конечно, если бы вопросы классификаціи наукъ разрѣшались законодательными предписаніями заурядныхъ педагоговъ, то такъ бы это и выходило. Такіе педагоги привыкли разграничивать свѣдѣнія и свои, и преподаваемыя—рубриками „отселева и доселева", а потому имъ и не приходится утруждать свою мысль вопросами о системахъ.

Что касается до второго замѣчанія критика о полезности связыванія научныхъ дисциплинъ, то здѣсь онъ, по своему обыкновенію, смѣшиваетъ понятія разнаго рода. Несомнѣнно нужно считать заслугой установленіе связи между, напр., математикой и химіей, или между математикой и психологіей, потому что это ведетъ къ расширенію методовъ изслѣдованія истинъ. Но, вѣдь, въ данномъ случаѣ рѣчь идетъ совершенно объ иномъ. Обособленіе отдѣловъ математики, о которомъ именно и говорится, увеличиваетъ также число методовъ. Послѣдователи синтетической геометріи Шаля не считали заслугой объединеніе этого отдѣла математики съ аналитической геометріей Декарта, а развивали свой методъ самостоятельно. Точно также Беллавитисъ въ своемъ исчисленіи эквиполенсъ не примыкалъ даже къ близкому по идеямъ барицентрическому исчисленію Мебіуса, а также развивалъ свои идеи самостоятельно. Но примѣры такого обособленія отдѣловъ, законность котораго общепризнана, обусловливаются все же только роскошью въ методологическомъ богатствѣ математики. Обособленіе же элементарнаго анализа отъ высшаго является насущной надобностью, вызываемой и общей системой науки, и системами преподаванія общаго и спеціальнаго.

Насколько мы могли понять, все дѣло въ томъ, что автору непремѣнно хочется включить въ элементарную алгебру разложенія функцій въ ряды. Не знаемъ, зачѣмъ это нужно, но спорить противъ этого не будемъ, это дѣло вкуса.

Итакъ, дѣло вкуса изложить, напр., теорію логариѳмовъ съ указаніемъ способа вычисленія ихъ, или безъ этого указанія. А то обстоятельство, что логариѳмы только и вводятся въ науку ради признанной полезности вычисленія ихъ, не идетъ, видно, къ дѣлу. Съ такимъ же правомъ можно, значитъ, и теорію эллиптическихъ функцій излагать безъ указанія способа вычисленія ихъ. Хотя при этомъ теорія потеряетъ всю свою практическую цѣнность и сохранитъ лишь относительно малый теоретическій интересъ, но какое дѣло до этого тому, кто руководится лишь своимъ вкусомъ. Конечно, все это позволительно для профессора, считающаго умѣстнымъ въ серединѣ курса тригонометріи опредѣлять понятіе о направленіи прямой и объ углѣ между прямыми, смотрящаго на рутинную теорію мнимаго количества, какъ на идеально научную, видящаго во всемъ математическомъ анализѣ одну только цѣпь вытекающихъ одна изъ другой теоремъ и признающаго принципомъ научной классификаціи одну только способность движеній чертящей наобумъ руки. Думаю, однако, что все же болѣе позволительно считать подобныхъ мыслителей недостойными званія профессора, такъ какъ шатаніе мысли, связанное съ безцеремонностью рѣчи, скорѣе есть характерный признакъ недоучекъ, чѣмъ представителей науки. Дѣйствительные представители науки умѣли цѣнить свои мысли и слова. Нашъ же мыслитель не оцѣнитъ ихъ, вѣроятно, и послѣ нашего разбора, чѣмъ дастъ, конечно, новые поводы для выполненія подобныхъ же трудовъ.

Но не можемъ согласиться съ сужденіями автора по этому пункту. „Труднѣйшая", по мнѣнію автора, задача есть на самомъ дѣлѣ легчайшая, какъ извѣстно всѣмъ, знакомымъ съ дифференціальнымъ исчисленіемъ.

Въ приведенной псевдо-авторитетной тирадѣ критика я вижу второй послѣ указаннаго въ началѣ моего разбора образчикъ не иного чего, какъ безцеремонной діалектической казуистики. Очевидно, тирада эта написана въ расчетѣ на читателей, или не знакомыхъ съ дифференціальнымъ исчисленіемъ, или позабывшихъ его. Замѣчу сначала, что въ предисловіи моемъ я говорю о задачѣ разложенія, какъ труднѣйшей для элементарнаго анализа. Относительно же дифференціальнаго исчисленія тамъ же въ предисловіи упоминаю, что оно рѣшаетъ эту задачу просто и строго, подразумѣвая, конечно, что рѣчь идетъ объ элементарныхъ функціяхъ, къ каковымъ только и можетъ относиться заявленіе о простотѣ. Слѣдовательно, уже изъ объясненнаго видно, что критикъ, не имѣя возможности сдѣлать мнѣ серьезное возраженіе, выполнилъ передъ читателями подтасовку моихъ словъ. Но въ обсужденіи сказаннаго имъ я пойду дальше. Перенесемъ, какъ онъ желаетъ, вопросъ на почву дифференціальнаго исчисленія. Извѣстно, что задачи теоріи функцій, рѣшаемыя этимъ исчисленіемъ, всѣ наперечетъ и очень не многочисленны. Онѣ состоятъ въ утвержденіи нѣкоторыхъ общихъ свойствъ функцій отдѣльными теоремами, какъ то теоремами Ролля или Лагранжа, въ разложеніи функцій по формуламъ Тейлора и Маклорена, въ раскрытіи неопредѣленныхъ видовъ, въ изысканіи максимумовъ и минимумовъ. Предлагаю любому студенту математику повѣрить г. Кояловичу на слово, что вывести теорему Ролля труднѣе, чѣмъ формулу Тейлора. Также предлагаю признать, что задача раскрытія неопредѣленныхъ формъ всякихъ функцій труднѣе задачи разложенія такихъ же функцій въ ряды, хотя на практикѣ никто не подумалъ бы о примѣненіи здѣсь принципа сведенія труднѣйшаго къ легчайшему, потому что всякое знающее лицо видѣло бы трудности составленія общаго вида производной высшаго порядка, изслѣдованія остаточнаго члена или наконецъ замѣтило бы непримѣнимость ряда къ безконечному значенію аргумента, съ каковымъ однако при раскрытіи неопредѣленностей обходятся обыкновенно безъ всякаго затрудненія. Итакъ, если г. Кояловичу угодно говорить о дифференціальномъ исчисленіи, то я свое заявленіе о труднѣйшей задачѣ не снимаю, а подтверждаю. Для оспариванія же прошу доводовъ, а не псевдо-авторитетныхъ словъ.

Новая постановка вопроса о разложеніи всѣхъ элементарныхъ функцій въ ряды есть на самомъ дѣлѣ не что иное, какъ давнымъ давно извѣстный способъ разложенія показательной функціи въ рядъ, при чемъ она разсматривается какъ предѣлъ степени, и затѣмъ отдѣленія четныхъ и нечетныхъ степеней перемѣннаго.

Предыдущее замѣчаніе г. Кояловича имѣло бы для автора книги серьезное значеніе, если бы оно не объяснялось.... такъ же, какъ всѣ предыдущія замѣчанія и какъ всѣ дальнѣйшія. Для профессора новѣйшей формаціи отнюдь не диковинка смѣшать по верхоглядству и нетвердости знаній два совершенно обратныхъ процесса исчисленія или, что звучитъ яснѣе, смѣшать прямое положеніе съ обратнымъ ему въ извѣстномъ смыслѣ. Первый примѣръ такого смѣшенія я обнаружу теперь же. А для того, чтобы фактъ этого смѣшенія не объяснялся случайностью, упоминаю одновременно о другомъ, который будетъ указанъ въ своемъ мѣстѣ. Давнымъ давно извѣстный способъ отдѣленія въ разложеніи показательной функціи четныхъ и нечетныхъ степеней дѣйствительно разсматривается во всѣхъ курсахъ анализа. Но только тамъ исходятъ изъ извѣстныхъ напередъ разложеній показательной функціи, синуса и косинуса и на основаніи такихъ разложеній, найденныхъ съ помощью дифференціальнаго исчисленія, выводятъ формулу Эйлера, связывающую три указанныя функціи. Въ моей же книгѣ указывается какъ разъ наоборотъ — способъ вывода разложеній синуса и косинуса изъ формулы аналогичной Эйлеровой. Послѣднюю же я для этой цѣли вывожу элементарно и такъ, что извѣстные способы подобнаго вывода и существенно отличны отъ моего, и не могутъ конкурировать по простотѣ и непосредственности. Г. Кояловичу слѣдовало бы хотя то замѣтить, что о разложеніи показательной функціи я говорю значительно позже того, какъ уже получены ряды синуса и косинуса, и говорю даже въ другой главѣ. Сверхъ того нужно замѣтить, что критикъ подразумѣваетъ частный способъ, которымъ были бы вновь получены разложенія только двухъ функцій и для котораго исходная формула все-таки должна быть выведена элементарнымъ путемъ, въ чемъ и заключается вся сущность задачи.

Стремясь къ нововведеніямъ, авторъ упустилъ изъ виду весьма скромныя, но и весьма важныя требованія хорошаго изложенія. Достаточно сказать, что онъ не опредѣлилъ, какъ слѣдуетъ, понятія о тригонометрическихъ величинахъ.

Однако, слѣдящей за литературой педагогической публикѣ извѣстно, что именно я ввелъ еще въ старомъ своемъ курсѣ тригонометріи единственно точныя опредѣленія основныхъ понятій этого отдѣла математики, которыя и стали теперь распространяться. Я, во-первыхъ, съузилъ и оформилъ сферу употребленія того самого, малограмотно употребляемаго въ многообразныхъ смыслахъ термина „тригонометрическія величины“, который звучитъ по рутинѣ въ устахъ критика. Введеніе необходимыхъ для отличія понятій терминовъ „геометрическій синусъ“ и т. п. сдѣлано именно мною. Прежде, вѣдь, говорили обыкновенно, что математическій синусъ есть перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги на начальный радіусъ. Стремясь установить въ наукѣ, претендующей на точность мысли и языка, прежде всего сознательное различеніе различимыхъ философски основныхъ понятій, я во всѣхъ своихъ сочиненіяхъ изолирую понятія — величина — въ смыслѣ конкретнаго представленія, размѣръ величины — въ смыслѣ одного изъ разнообразныхъ ея признаковъ, отношеніе къ другой величинѣ—существующее объективно, число—выражающее наше субективное понятіе о размѣрѣ величины, количество — выражающее совокупность разсматриваемыхъ математическихъ признаковъ величины, модуль количества—отнюдь не смѣшиваемый съ самимъ количествомъ даже въ простѣйшемъ случаѣ. Какъ ни надоѣло уже многолѣтнее разъясненіе мною различія этихъ понятій, усматриваемое наиболѣе отчетливо въ алгебрѣ трехмѣрнаго пространства, но объясню его еще разъ профессору точной науки, которому новѣйшія философско-математическія воззрѣнія должны быть извѣстны, а для того предлагаю ему вообразить обыкновенный тригонометрическій чертежъ окружности съ радіусомъ, наприм., въ 10 линейныхъ единицъ, и съ геометрическимъ синусомъ угла въ 210°. На этомъ чертежѣ самъ геометрическій синусъ есть линейная, представимая графически, т.-е. конкретно, величина, въ которой ради цѣлей собственно-элементарной тригонометріи мы разсматриваемъ два признака — размѣръ и линейное направленіе, хотя ради другихъ цѣлей могли бы разсматривать и другіе признаки, какъ-то направленіе въ плоскости, положеніе въ плоскости, направленіе въ пространствѣ, вращательный поворотъ въ сторону проходящаго черезъ эту линію меридіана. Длина этого синуса есть размѣръ величины; онъ выражается при первоначальномъ выборѣ единицы числомъ 5, установленнымъ субективно соотвѣтственно произвольно выбранной единицѣ. Отношеніе синуса къ радіусу существуетъ объективно и понятіе о немъ, уже абстрактное, такъ же сложно, какъ можетъ быть сложнымъ въ конкретномъ представленіи самый синусъ, даже оно въ алгебрѣ плоскости или же въ алгебрѣ трехмѣрнаго пространства можетъ выражаться въ символахъ, называемыхъ по рутинѣ мнимыми. Если мы будемъ разсматривать отношеніе въ ариѳметическомъ смыслѣ, то оно выразится числомъ $\frac{1}{2}$. Но, вѣдь, не таковъ будетъ въ данномъ случаѣ математическій синусъ; послѣдній, какъ извѣстно, выражается количественнымъ символомъ $-\frac{1}{2}$, а это показываетъ, что отношеніе къ радіусу разсматривается нами съ особой условной точки зрѣнія, въ смыслѣ алгебры такъ называемыхъ дѣйствительныхъ количествъ, имѣющихъ каждое свой модуль и одинъ изъ двухъ только, допустимыхъ по условію, направляющихъ знаковъ. Остановлюсь нѣсколько на понятіи отношенія тригонометрической линіи къ радіусу, принимаемомъ обыкновенно за опредѣленіе соотвѣтствующей тригонометрической отвлеченной функціи. Извѣстно, что терминъ отношеніе чрезвычайно употребителенъ, но именно только въ ариѳметическомъ смыслѣ, алгебраическій же смыслъ его указывается лишь мимолетно въ теоріи алгебраическихъ пропорцій и нигдѣ на всемъ протяженіи элементарной алгебры не примѣняется къ сравненію конкретныхъ величинъ, почему и остается, можно сказать, совершенно не утвержденнымъ въ сознаніи изучающихъ. А такъ какъ надобность въ широкомъ пониманіи его возникаетъ только въ тригонометріи, то всякому мыслящему и знающему дѣло автору соотвѣтствующаго курса представляется на выборъ одинъ изъ двухъ путей: или, слѣдуя плану Гамильтона въ его кватерніонахъ, установить сначала новый, болѣе широкій смыслъ алгебраическаго отношенія конкретныхъ величинъ и отсюда вывести новое понятіе о количествѣ, или, вовсе не встрѣчая въ этомъ надобности и располагая уже въ алгебрѣ прекрасно развитымъ въ духѣ Коши и вполнѣ знакомымъ изучающему курсъ понятіемъ о дѣйствительномъ количествѣ, свести нужныя автору опредѣленія тригонометрическихъ функцій на это извѣстное понятіе. Вотъ причина, почему я устанавливаю извѣстныя нашей педагогической публикѣ опредѣленія, которыя однако г. Кояловичъ считаетъ, какъ увидимъ ниже, настолько дикими что, изъ привычки къ хорошему тону, говоритъ о нихъ ниже только восклицательно, не пытаясь разъяснить ихъ недостатки. Упоминаю о хорошемъ тонѣ въ виду того, что можетъ быть вслѣдствіе распространеннаго у насъ даже въ средѣ профессоровъ верхоглядства, стоять такъ упрямо, какъ я это дѣлаю, за интересы строгой науки, не совсѣмъ деликатно. Утверждаю, что въ опредѣленіяхъ моихъ можно претендовать только на нѣкоторую трудность языка, какая естественно связана съ полной точностью рѣчи. Но посмотримъ, какія дѣлаются возраженія противъ этихъ опредѣленій.

На стр. 9 и слѣдующихъ онъ (авторъ) опредѣляетъ ихъ (для острыхъ угловъ), предполагая, что радіусъ равенъ единицѣ, и сейчасъ же даетъ задачи (стр. 17—18) и примѣры (стр. 26—27), гдѣ радіусъ произволенъ.

Замѣчу по этому поводу, что какъ скоро геометрическій синусъ дуги радіуса равнаго единицѣ опредѣленъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги на начальный радіусъ, то нужна только крайне простая и естественная аналогія, чтобы составить понятіе о подобной же линіи при произвольномъ радіусѣ. Говорить о такихъ линіяхъ въ текстѣ теоріи, посвященной выясненію абстрактныхъ понятій, я считаю и лишнимъ, и нетактичнымъ. Задачи и примѣры для того и служатъ, между прочимъ, чтобы относить къ нимъ разъясненіе побочныхъ, болѣе или менѣе связанныхъ съ теоріей, но менѣе существенныхъ частностей. Отнесеніе къ задачамъ такого побочнаго матеріала справедливо считалось раньше и должно считаться скорѣе педагогическимъ достоинствомъ книги, чѣмъ ея недостаткомъ.

Общія опредѣленія даны на стр. 45—49 и достаточно привести одно изъ нихъ, чтобы судить объ изложеніи автора.

Синусъ дѣйствительнаго количества, представленнаго нормальной дугой, есть положительное или отрицательное количество, выражающее длину (по отношенію къ радіусу) и направленіе перпендикуляра, опущеннаго изъ конца дуги на первый діаметръ.

Недостатки этого опредѣленія такъ очевидны, что не считаемъ нужнымъ ихъ указывать.

Выхваченное изъ текста опредѣленіе, лишенное тѣхъ предварительныхъ поясненій, которыя послѣдовательно и издалека пріучаютъ и сознаніе, и рѣчь изучающаго къ установленію такого опредѣленія, разумѣется, покажется обычному читателю трудно изложеннымъ, въ особенности при привычкѣ у насъ къ особому популяризаторскому языку. Но зато оно освобождено отъ обычной путаницы понятій, вводимой популяризаторами и приводящей впослѣдствіи къ серьезнымъ затрудненіямъ въ пониманіи выводовъ науки. Было бы желательно, чтобы г. Кояловичъ, которому профессорская рѣчь должна быть привычна, попытался бы словами этой рѣчи раскрыть воображаемые имъ недостатки приведеннаго опредѣленія. Нужно, вѣдь, принять во вниманіе, что книга, какъ указано въ предисловіи, назначена играть роль учебнаго курса не въ настоящее время, а въ болѣе или менѣе отдаленномъ будущемъ, когда на всемъ протяженіи излагаемой науки словесные термины будутъ дѣйствительно соотвѣтствовать научному содержанію соотвѣтствующихъ понятій. Извѣстно, что математическій синусъ есть отвлеченное количество такъ же, какъ и соотвѣтствующій ему аргументъ. Тригонометрія могла бы, вѣдь, быть построена безъ всякаго геометрическаго представленія, напр., по образцу Абелева или Якобіева исходнаго плана построенія эллиптическихъ функцій. Слѣдовательно, хотя и употребляется обычно выраженіе „синусъ дуги“, но буквальное пониманіе его неправильно и болѣе точнымъ можетъ считаться только выраженіе „синусъ количества, представленнаго дугой“. Но при этомъ должно быть еще указано, что дуга, соотвѣтствующая синусу въ конкретномъ его представленіи, берется при радіусѣ, равномъ единицѣ, т.-е., какъ опредѣлено раньше, есть нормальная.

Только въ примѣрѣ на стр. 26 мы нашли правильное опредѣленіе тангенса (и то неизвѣстно откуда взявшееся, ибо раньше было дано другое).

Опредѣленіе, какъ уже упоминалъ я, обычное и потому осчастливленное вниманіемъ критика, гласитъ, что математическій тангенсъ (рѣчь идетъ объ остромъ углѣ) есть отношеніе геометрическаго тангенса къ радіусу. Но, прежде всего, въ моей книгѣ это вовсе не является опредѣленіемъ понятія, а выводомъ изъ опредѣленія, даннаго раньше и притомъ только для остраго угла. Въ моей системѣ курса самое возникновеніе тригонометріи обусловливается разсматриваніемъ числовыхъ отношеній сторонъ прямоугольнаго треугольника. Когда уже обнаружено, что каждое изъ такихъ отношеній опредѣляетъ форму треугольника и что всѣхъ ихъ имѣется шесть, то отмѣченныя отвлеченныя числа конкретизируются для обычнаго ихъ изслѣдованія указаніемъ на то, что онѣ могутъ быть представлены, каждое особо, извѣстными линіями въ нормальной окружности. Понятно, что отношеніе катетовъ одного прямоугольнаго треугольника, въ силу теоремы о пропорціональности сторонъ при подобіи, равно отношенію соотвѣтствующихъ сторонъ другого подобнаго треугольника. Это и есть выводъ, прилагаемый въ примѣрѣ. Поэтому заявленіе критика о случайныхъ появленіяхъ въ моей книгѣ разныхъ опредѣленій есть безсознательная болтовня. Она, какъ и большинство замѣчаній, объясняется лишь непониманіемъ логическихъ тонкостей. Опредѣленія, какъ извѣстно, никогда не доказываются, а принимаются условно. Положеніе же, о которомъ идетъ рѣчь, является въ силу системы книги доказуемымъ, именно посредствомъ теоремы о пропорціональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ.

Но, оставивъ въ сторонѣ логическія тонкости, до которыхъ мѣстами нашей обычной математикѣ еще далеко тянуться, разсмотримъ затронутое опредѣленіе съ чисто математической стороны. Утверждаю, что, несмотря на его повсемѣстную распространенность, оно въ строгомъ строѣ мышленія прямо недопустимо, за исключеніемъ простѣйшаго исходнаго пункта тригонометріи. Напомню, во-первыхъ, сдѣланное уже мною выше указаніе на то, что терминъ—отношеніе конкретныхъ величинъ въ обычной математической литературѣ понимается только въ ариѳметическомъ смыслѣ, такъ какъ понятіе и притомъ первичное объ алгебраическомъ отношеніи лишь проскальзываетъ бѣгло въ теоріи пропорцій, но нигдѣ во всей области элементарнаго алгебраическаго ученія не прилагается къ сравненію конкретныхъ величинъ. Слѣдовательно, прежде чѣмъ давать общепринятое опредѣленіе тригонометрическихъ функцій, нужно было бы установить понятіе объ алгебраическомъ отношеніи. Но при этомъ ради точности термина слѣдовало бы указать непонятное для незнакомыхъ съ высшими частями математическаго ученія замѣчаніе о томъ, что устанавливаемое понятіе есть лишь первичное, съуженное въ смыслѣ алгебры однихъ дѣйствительныхъ количествъ. Иначе названіе отношенія алгебраическимъ повело бы впослѣдствіи къ непроизвольному, но совершенно нежелательному расширенію понятія. Несомнѣнно, вѣдь, что и теорія комплексовъ есть алгебраическая. А въ этой теоріи отношеніе вертикальнаго катета къ горизонтальному оказалось бы уже не тангенсомъ соотвѣтствующаго угла, напр., α, а произведеніемъ $\mathrm{Tg}\alpha . i$, гдѣ i есть такъ называемый мнимый знакъ. Существуетъ также, хотя въ зачаткахъ, алгебра терніоновъ, представляющая естественное развитіе обыкновенной. А въ этой алгебрѣ подобное же отношеніе выражалось бы символомъ $\mathrm{Tg}\alpha(\mathrm{Cs}\beta + i\mathrm{Sn}\beta)j$, гдѣ i и j аналогичные указанному знаки, а β долгота меридіана, въ сторону котораго обращена вращательнымъ движеніемъ вертикаль. Вотъ причина, почему я въ своихъ сочиненіяхъ настаиваю передъ читателями: Пріучитесь считать тангенсъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по обстоятельствамъ, количествомъ. Иначе пришлось бы говорить впослѣдствіи наиболѣе далеко ушедшимъ изъ этихъ читателей: Отучитесь пожалуйста отъ скверной привычки называть тангенсъ алгебраическимъ отношеніемъ, потому что понятіе объ алгебраическомъ отношеніи гораздо шире понятія о тангенсѣ.

Мы нашли много промаховъ и недостатковъ въ изложеніи. Укажемъ нѣкоторые изъ нихъ.

Полагаю, что уже прежній разборъ замѣчаній критика можетъ дать понятіе о томъ, откуда вытекаютъ эти замѣчанія. Я лично считаю ихъ доказательствомъ полнаго невѣжества г. Кояловича въ затрогиваемыхъ имъ вопросахъ. Дальнѣйшія его сужденія продолжаютъ выяснять, какъ докажу неоспоримо, то же самое. Но нѣкоторыя изъ этихъ сужденій отличаются еще особымъ, специфическимъ качествомъ.

Стр. 22. Обозначивъ, по числу сторонъ многоугольника.... Неизвѣстно какого, ибо ни о какомъ многоугольникѣ не говорилось.

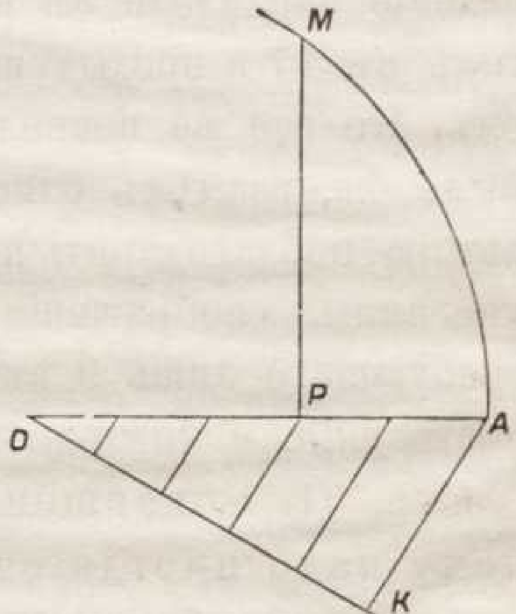
Замѣчаніе это при обычныхъ условіяхъ можно было бы отнести къ недосмотру. Но слишкомъ уже специфиченъ общій характеръ замѣчаній для того, чтобы такое объясненіе было исключительнымъ. Возможно, что болѣе вѣроятнымъ долженъ считаться разсчетъ критика на то, что читатель по поводу мелочного обстоятельства не станетъ провѣрять указанія рецензента. Дѣло въ томъ, что упомянутая критикомъ моя фраза взята изъ параграфа, который за пятнадцать строкъ до инкриминируемой фразы начинается словами: Зная изъ геометріи числовыя выраженія сторонъ нѣкоторыхъ правильныхъ многоугольниковъ.... Притомъ и весь параграфъ трактуетъ именно о правильныхъ многоугольникахъ, поскольку это имѣетъ извѣстное отношеніе къ вычисленію синусовъ нѣкоторыхъ угловъ. Выходитъ, что для нанизыванія трудно дающихся возраженій рецензентъ прибѣгаетъ къ особымъ, не совсѣмъ законнымъ средствамъ.

Стр. 26. Можно проложить, т.-е. спроектировать.... А что такое спроектировать, не сказано. Такой же промахъ на стр. 30 (о проекціи).

Напоминаю читателю, что въ обычной системѣ изложенія элементарнаго курса математики понятіе о проекціи прямой на прямую дается въ геометріи, изученіе которой предшествуетъ изученію тригонометріи. Въ указанныхъ же мѣстахъ моей книги только и упоминается самое понятіе о проекціи. Выходитъ приблизительно такъ, что заявляетъ авторъ о направленіи прямой, критикъ требуетъ опредѣленія этого понятія. Заявилъ авторъ объ углѣ, требуется опредѣленіе угла. Это очень удобный способъ нанизыванія возраженій. Можно было бы потребовать еще опредѣленій и числа, и умноженія, и мало ли еще чего подобнаго, ну а насколько подобныя выходки критика удовлетворяютъ самымъ элементарнымъ требованіямъ правды, объяснять, конечно, излишне.

Стр. 26. Приходится дѣлить радіусъ на равныя части, что не легко. (Н е у ж е л и?).

Сказано это по поводу рѣшенія авторомъ задачи о построеніи угла, котораго косинусъ равенъ $\frac{3}{5}$. Восклицаніе критика нужно отнести на счетъ его удовлетворенія тѣмъ, что онъ умѣетъ легко раздѣлить прямую на 5 равныхъ частей и потому игнорируетъ замѣчаніе автора о томъ, что дѣлить радіусъ не нужно. Неужели однако, скажу я въ свою очередь, хотя бы и такой пустяшный вопросъ настолько разработанъ въ нашихъ патентованныхъ учебникахъ, что при встрѣчѣ съ этимъ вопросомъ задумываться сколько-нибудь не стоитъ, а достаточно лишь выкинуть усмѣшку. Докажу въ такомъ случаѣ, что даже при разборѣ подобныхъ мелочей верхоглядство критика не совсѣмъ умѣстно. Воображаю себя въ положеніи ученика современной школы съ ея кладеземъ фактическихъ свѣдѣній и средствъ даваемаго умственнаго развитія. Если ученикъ достаточно прилеженъ и благовоспитанъ, т.-е. между прочимъ, довѣряетъ безъ критики, разумѣется, и не умѣстной, руководящему имъ преподавателю и еще скорѣе учебнику, то по отчетливому указанію таковыхъ онъ для дѣленія радіуса на пять частей прежде всего проведетъ черезъ центръ окружности произвольную прямую, отложитъ на ней пять выбранныхъ имъ



равныхъ длинъ и соединитъ конецъ отложеній съ концомъ радіуса. Произведя, такимъ образомъ 7 элементарныхъ манипуляцій, онъ по буквальному указанію руководителей выполнитъ, если не практически, то въ идеѣ, проведеніе четырехъ параллелей, а такъ какъ построеніе каждой изъ нихъ требуетъ проведенія сначала двухъ дугъ, потомъ одной дуги, отмѣтки при умѣломъ, все-таки единственномъ, раскрытіи циркуля сначала двухъ хордъ, а потомъ одной и соединенія, то къ прежнимъ манипуляціямъ будетъ присоединено еще $5+3.3=14$ новыхъ. Затѣмъ, наконецъ, будетъ построенъ перпендикуляръ, не считая двухъ готовыхъ засѣчекъ, проведеніемъ двухъ дугъ и соединеніемъ, и только послѣ всего этого, совершивъ $7+14+3=24$ акта, можно будетъ вспомнить о второй части пословицы „корень ученія горекъ, но....“.

Нужна уже, со стороны ученика, самобытная эволюція мысли, чтобы упростить рекомендуемый способъ дѣленія прямой отысканіемъ одной только части посредствомъ проведенія одной параллели и слѣдующимъ затѣмъ отложеніемъ этой части нѣсколько разъ, что и при усердіи ученика въ дѣленіи до конца замѣнило бы указанное число актовъ все-таки меньшимъ, именно 18. Такъ какъ въ нашихъ теоретическихъ школахъ о неточности построеній и о совокупномъ вліяніи ихъ ничего не говорятъ или упоминаютъ лишь вскользь безъ практической повѣрки указаній, то, разумѣется, только особо трудолюбивый и многократный опытъ могъ бы навести ученика на мысль о томъ, что неизбѣжная погрѣшность проведенія параллели будетъ при отложенія повторяться кратно въ одну сторону и потому послѣднее дѣленіе прямой не можетъ и не должно при такомъ выполненіи построенія равняться предъидущимъ. Допуская другія эволюціи мысли ученика, напр., проведеніе параллели въ концѣ третьяго дѣленія, сведемъ число актовъ къ 17 и предыдущую идею, къ вящшей славѣ геометріи, скроемъ. Но все же позволительно спросить критика, не лучше ли было бы, взамѣнъ блистанія иронической усмѣшкой въ сторону автора, поблагодарить послѣдняго за наведеніе учениковъ на вышеуказанныя соображенія и за предложеніе способа рѣшенія задачи, требующаго лишь 9 актовъ и устраняющаго хотя ту погрѣшность построенія, о которой выше упоминалось.

Стр. 31. Совершенно непонятно объясненіе автора, почему надо иногда считать секансъ отрицательнымъ. Подобное же объясненіе на стр. 35.

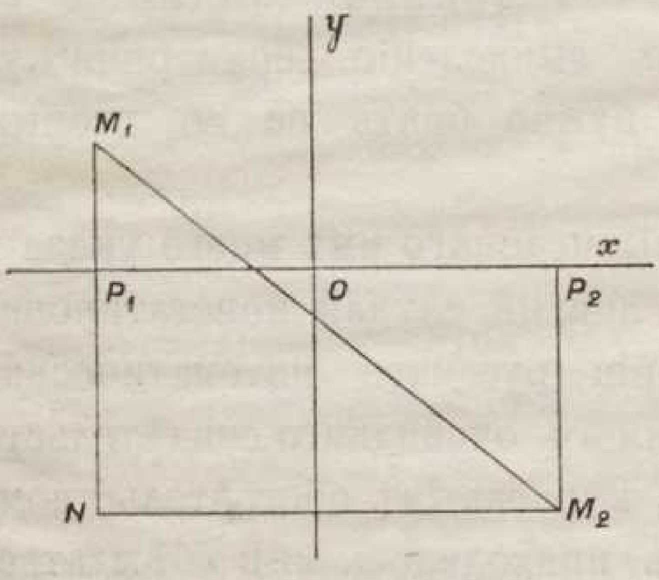
Разъ въ предыдущемъ доказано мною, что критикъ даже въ дѣлѣ построенія дуги по данному косинусу не вникъ въ тонкости дѣйствительной, а не показной только мысли, то новое недоразумѣніе, въ которомъ онъ скромно сознается, можно ему извинить, какъ относящееся къ разсужденію болѣе тонкому. Попробуйте тогда вы, читатель, понять, въ чемъ дѣло, для чего я вкратцѣ сообщу вамъ содержаніе вопроса. Переходя въ своей книгѣ отъ раньше разсмотрѣннаго остраго угла къ тупому и доказавъ, что тангенсъ этого новаго угла нужно считать отрицательнымъ, а синусъ, вслѣдствіе возникновенія идеи о направленіяхъ, уже не абсолютнымъ, а положительнымъ, я указываю изучающему, что раньше для остраго угла была выведена формула $Tg\alpha = Sn\alpha . Sc\alpha$, и предлагаю ему убѣдиться, что въ новомъ случаѣ абсолютныя величины линій удовлетворяютъ такому же равенству, вслѣдствіе чего, по правилу знаковъ умноженія, для распространенія формулы нужно только признать секансъ отрицательнымъ, а затѣмъ уже выясняю извѣстнымъ путемъ возможность такого условія. На стр. 35, указываемой критикомъ, дано не подобное, какъ онъ говоритъ, а совершенно иное объясненіе, относящеося къ совершенно другому обстоятельству. Разумѣется, если не понятно ни первое, ни второе обстоятельство, то можно съ личной точки зрѣнія относиться къ нимъ одинаково. Но изъ этого не слѣдуетъ, чтобы уподобленіе по существу считалось позволительнымъ. Допускаю возможность претензіи ко мнѣ въ томъ, что, работая надъ своимъ, совершенствующимъ изложеніе тригонометріи, курсомъ, я старался разъяснить каждую, какъ мнѣ казалось, не понимаемую обыкновенно деталь. При этомъ я забылъ случайно, что современнымъ критикамъ при чтеніи новыхъ книгъ некогда думать, такъ какъ имъ приходится много говорить и писать объ этихъ книгахъ.

По мнѣнію автора декартовское правило знаковъ состоитъ въ томъ, что, вводя въ вычисленіе геометрическую, завѣдомо отрицательную величину, нужно брать ее со вторымъ знакомъ минусъ (??!).

Критикъ, наставивъ по поводу выписаннаго имъ моего указанія рядъ знаковъ удивленія, далъ мнѣ лишній случай констатировать фактъ, описанію котораго въ исторіи русскаго математическаго образованія могли бы безъ приводимаго очевиднаго свидѣтельства и не повѣрить. Нельзя не считать курьезнымъ обстоятельствомъ, что не одинъ г. Кояловичъ, а, какъ приходилось мнѣ убѣждаться, многіе изъ спеціалистовъ математиковъ понимаютъ Декартовское правило знаковъ въ томъ его, нѣсколько наивномъ, освѣщеніи, какое вошло въ обиходъ нашей литературы съ легкой руки одного малосвѣдущаго, но многоизвѣстнаго составителя популярныхъ учебниковъ. Они подъ такимъ названіемъ подразумѣваютъ условіе Декарта о различеніи противоположныхъ длинъ знаками

$+$ и $-$. То обстоятельство, что условіе должно логически примыкать къ области опредѣленій, а не правилъ, разумѣется, еще не разъясняетъ дѣла, потому что путаница въ философскихъ терминахъ встрѣчается у нашихъ спеціалистовъ сплошь и рядомъ и потому съ ней уже и трудно считаться. Но важно то, что даже при опредѣленномъ и точномъ выраженіи правила и при отчетливомъ разъясненіи на примѣрахъ оно до сихъ поръ вызываетъ не сознаніе распространенной ошибки, а восклицательные знаки критики. Между тѣмъ упоминаемое правило есть основное въ геометріи Декарта, оно вмѣстѣ съ условіемъ ведетъ къ обобщенію всѣхъ формулъ этой геометріи въ смыслѣ распространяемости ихъ на точки любого координатнаго угла. Казалось бы, каждый студентъ математическаго факультета уже на первомъ курсѣ долженъ вполнѣ отчетливо представлять себѣ смыслъ этого широко примѣняемаго правила, безъ котораго сама аналитическая геометрія не имѣла бы значенія общаго ученія о плоскости и пространствѣ. Однако приходится констатировать, что даже профессоръ и, добавимъ опять, не единственный, не имѣетъ объ этомъ правилѣ яснаго представленія.

Переходя къ разъясненію дѣла, напомню, во-первыхъ, что правиломъ называется указаніе способа наиболѣе просто получать требуемый выводъ. Правило Декарта характерно именно въ этомъ смыслѣ, потому что оно указываетъ простѣйшій способъ оперированія, безъ лишнихъ и повторныхъ разсужденій, въ вычисленіяхъ аналитической геометріи съ координатами, завѣдомо отрицательными. Разсмотримъ для примѣра вопросъ о вычисленіи разстоянія двухъ точекъ, M_1 съ координатами x_1 и y_1 и M_2 съ координатами x_2 и y_2. Но выберемъ не тѣ условія этого вопроса, какія указываются въ популярныхъ учебникахъ аналитической геометріи,



гдѣ, говоря о первомъ координатномъ углѣ, нерѣдко забываютъ о существованіи другихъ угловъ. Пусть M_1 лежитъ во второмъ углѣ, такъ что x_1 отрицательно, а M_2 лежитъ въ четвертомъ углѣ, гдѣ y_2 отрицательно. Изъ извѣстнаго чертежа имѣемъ $M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_2N^2$ и затѣмъ $M_2N = OP_1 + OP_2$ и $M_1N = M_1P_1 + M_2P_2$.

Вводя по правилу вмѣсто входящихъ здѣсь абсолютныхъ величинъ направленныя координаты точекъ, имѣемъ $M_2N=-x_1+x_2$ и $M_1N=y_1-y_2$. Предоставляю теперь г. Кояловичу рѣшить, вводятся ли координаты x_1 и y_2 съ тѣмъ отрицательнымъ знакомъ, который они имѣютъ по условію о направленіи и который скрытъ въ буквенномъ обозначеніи, или именно со вторымъ, какъ у меня сказано, минусомъ. Думаю, что послѣ приведеннаго разъясненія слѣдуетъ не критиковать моего мнѣнія, а принять его къ свѣдѣнію и исполненію.

Разсужденія автора на стр. 33 представляются намъ крайне сбивчивыми и непонятными.

Критикъ и выписываетъ эти разсужденія, уснащая приводимыя выписки вопросительными знаками. Для того, чтобы имѣть право назвать разсужденія сбивчивыми, слѣдовало бы открыть въ нихъ какое либо противорѣчіе. На это не хватаетъ образовательныхъ средствъ. Компетентность критика ясна изъ того, что онъ считаетъ сбивчивымъ и непонятнымъ.

Выражаясь точно, говорю я въ книгѣ, и положительное количество не слѣдуетъ смѣшивать съ безусловнымъ числомъ (??)...

Постановка двухъ вопросительныхъ знаковъ свидѣтельствуетъ о томъ, что, какъ это уже было обнаружено выше, профессоръ никогда не представлялъ себѣ упомянутаго различія, въ частности, значитъ, различія понятій количества и его модуля. Въ дополненіе къ приведенному уже раньше моему разъясненію, предлагаю на разобранномъ примѣрѣ опредѣленія разстоянія между двумя точками замѣтить, что, если въ формулѣ $M_1N=M_1P_1+M_2P_2$ геометрическія обозначенія относятся къ абсолютнымъ величинамъ координатъ, то въ этихъ обозначеніяхъ можно произвольно ставить буквы въ томъ или обратномъ порядкѣ, если же первое слагаемое есть сама координата, въ данномъ случаѣ положительная, то при обычномъ выборѣ положительнаго направленія, нельзя писать, какъ въ формулѣ написано, а нужно писать P_1M_1, отмѣчая, что точка P_1 есть начало, а M_1 конецъ. Мы видимъ, слѣдовательно, что даже обозначенія абсолютной величины и равной ей положительной различаются, потому что мыслители не считаютъ математическое равенство однозначущимъ съ логическимъ тождествомъ. Такъ, общеизвѣстный мыслитель, Коши, обозначая положительное количество черезъ a, употребляетъ для обозначенія его модуля символъ $[a]$.

Это не будетъ, говорю я въ книгѣ, знакъ прежней отрицательности (?), а минусъ новый, формальный (?), дѣлающій вставляемое количество двояко отрицательнымъ, т.-е. по существу положительнымъ.

Опять наставлены вопросительные знаки, хотя ни одинъ ученикъ, изучающій мою алгебру, ихъ бы не наставилъ, а очень просто объяснилъ бы профессору, о чемъ тутъ говорится. Предполагаю, сказалъ бы ученикъ, что количество $a=-3$ отрицательно, и, условившись въ такомъ обозначеніи, беру другое количество $-a$, въ обозначеніи котораго, кромѣ прежней буквы, поставленъ еще знакъ —. Что же это второе количество будетъ, какъ и первое, существенно отрицательнымъ, или его нужно считать только формально отрицательнымъ, по совокупности же двухъ его знаковъ, ясныхъ изъ формы $-(-3)$, двояко отрицательнымъ, а по существу, какъ равное $+3$, положительнымъ? Какъ же, могъ бы добавить онъ, г. критикъ этого не понимаетъ и какъ же, въ такомъ случаѣ, онъ съумѣлъ бы доказать, напр., правило сложенія или вычитанія одночленовъ, да и множество другихъ теоремъ и правилъ алгебры и тригонометріи?

Отчетливость рѣчи должна сводиться къ ясному различенію не только линій отъ чиселъ, но и чиселъ отъ количествъ.

Эту мою фразу критикъ также выписываетъ изъ книги, какъ образчикъ дикой рѣчи. Дѣйствительно, она была бы дикой, если бы не вынуждалась малограмотностью нашихъ спеціалистовъ математиковъ и преподавателей этой науки въ дѣлѣ употребленія научныхъ терминовъ. Говорили вѣдь, и говорятъ еще, что математическій синусъ есть перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги на начальный радіусъ. Значитъ, смѣшиваютъ абстрактное понятіе количества съ геометрическимъ представленіемъ этого понятія линіей. Одинъ извѣстный спеціалистъ въ своей наукѣ о величинахъ, припоминая формулу площади, опредѣлялъ математическое дѣйствіе умноженія линіи на линію. Странно только, что, не дойдя до перемноженія четырехъ производителей, онъ не проникъ такимъ образомъ въ пространство четырехъ измѣреній. Странно и то, что такіе авторы не начали еще рѣшать чисто ариѳметическіе вопросы методами приложенія алгебры къ геометріи. Вѣдь, уподобляя понятія безусловнаго числа и направленнаго количества, слѣдовало бы объединять методы сходныхъ отдѣловъ науки.

На стр. 39 находится невѣрное опредѣленіе непрерывнаго измѣненія, а на стр. 41 невѣрное (слишкомъ узкое) опредѣленіе алгебраической функціи.

Сознавая, вѣроятно, не менѣе глубоко, чѣмъ критикъ, трудность перваго изъ упомянутыхъ опредѣленій, я его даю послѣ опредѣленія прерывнаго измѣненія и, наводя сначала изучающаго эмпирическимъ представленіемъ, выражаюсь такъ: Воображая реальныя или конкретныя величины, какъ, напр., протяженіе, температуру, время, можно представить себѣ иного рода измѣненіе, такъ называемое непрерывное, при которомъ величина переходитъ изъ одного значенія въ другое плавно, нечувствительно, такъ что, измѣняясь между нѣкоторыми границами, она проходитъ черезъ всякія промежуточныя значенія, какія только можно вообразить. Выражаясь математическимъ языкомъ, говорятъ, что непрерывное измѣненіе есть то, при которомъ всякое приращеніе перемѣнной величины безконечно мало, т. е. можетъ быть сдѣлано меньше всякаго заданнаго размѣра. Утверждаю, что это опредѣленіе, хотя и выражено обычнымъ, не совсѣмъ еще обработаннымъ, языкомъ, на что я намекаю словомъ „говорятъ", достаточно точно и согласно съ духомъ анализа. Г. Кояловичъ, ссылаясь лишь на свой голословный авторитетъ, отвергаетъ опредѣленіе, не давая никакихъ указаній. Возможно, что онъ подразумѣваетъ иную редакцію, приведенную въ нѣкоторыхъ новѣйшихъ курсахъ. Въ такомъ случаѣ заявляю ему напередъ, что опровергнуть таковую я не считаю большимъ трудомъ. Допуская возможность улучшенія своей редакціи замѣной двухъ словъ, я не жду однакоже ни такого указанія, ни иного полезнаго, какъ отъ наличнаго критика, такъ и отъ другихъ авторитетовъ, подобныхъ ему.

Другимъ невѣрнымъ (слишкомъ узкимъ) опредѣленіемъ признается то, которое дано мною для алгебраической функціи въ отличіе отъ трансцендентной. Какъ опредѣленіе, нормально широкое, г. Кояловичъ, очевидно, подразумѣваетъ то, которое дается въ курсахъ анализа и включаетъ понятіе о корнѣ алгебраическаго уравненія, коэффиціенты котораго представляютъ цѣлыя функціи аргумента. Признаюсь, если бы я въ какомъ либо курсѣ элементарной тригонометріи встрѣтилъ подобное опредѣленіе, совершенно не относящееся къ излагаемымъ сужденіямъ, то помѣщеніе таковего счелъ бы ни болѣе, ни менѣе, какъ удаленіемъ отъ здраваго, педагогическаго смысла. Извѣстно, вѣдь, что тригонометрія для установки отличительныхъ признаковъ разсматриваемыхъ ею функцій нисколько не нуждается въ самомъ общемъ опредѣленіи алгебраической зависимости.

Стр. 45. Прежде тригонометрическія функціи можно было разсматривать, какъ числа (?). Теперь будемъ ихъ считать алгебраическими (!) дѣйствительными **количествами**.

Постановка вопросительнаго знака у термина „числа" наводить на мысль, что критикъ отказался уже отъ разсмотрѣнія тригонометрическихъ функцій какъ отношеній, даже въ случаѣ остраго угла, когда такое разсмотрѣніе естественно. Съ другой стороны къ названію этихъ функцій алгебраическими количествами онъ приписываетъ восклицательный знакъ. Недоумѣніе можно объяснить двумя только путями. Нужно признать у г. Кояловича одинъ изъ двухъ видовъ смѣшенія понятій. Можетъ быть, критикъ понимаетъ тригонометрическія функціи въ ихъ геометрическомъ представленіи, какъ извѣстнаго рода линій въ кругѣ. Въ такомъ случаѣ разложеніе $\operatorname{Sn} x = x - \frac{x^3}{6}$, взятое, какъ иногда дѣлаютъ, до величинъ третьяго порядка, нужно понимать, какъ выраженіе линіи черезъ разность линіи и объема. Также разложеніе $\operatorname{Cs} x = 1 - \frac{x^2}{2}$, взятое до величинъ второго порядка, есть выраженіе линіи черезъ разность абсолютнаго числа и площади. Съ такой точки зрѣнія увеличеніе числа членовъ разложенія способно необъятно расширить горизонтъ извѣстныхъ конкретныхъ представленій.

Но, можетъ быть, критикъ, дѣлая въ названіи функцій удареніе на словѣ „тригонометрическія", въ силу этого не считаетъ упомянутыя функціи алгебраическими количествами. Высказавъ знакомство съ самымъ общимъ опредѣленіемъ алгебраической функціи, онъ справедливо вспоминаетъ, что синусъ и косинусъ, да и ни одна изъ остальныхъ разсматриваемыхъ функцій не оказываются корнями упомянутаго алгебраическаго уравненія. Но, г. Кояловичъ, вѣдь понятіе объ алгебраической функціи не имѣетъ, кромѣ словеснаго термина, ничего общаго съ понятіемъ объ алгебраическомъ количествѣ, которое въ своихъ измѣненіяхъ отъ $-\infty$ до $+\infty$ является независимымъ перемѣннымъ. Названіе этого количества дѣйствительнымъ алгебраическимъ употребляется лишь для отличія его съ одной стороны отъ безусловныхъ ариѳметическихъ чиселъ и съ другой отъ такъ называемыхъ мнимыхъ или иныхъ высшаго сорта количествъ. Одно дѣло понимать алгебру въ смыслѣ неточно названной высшей алгебры и другое въ смыслѣ общаго ученія объ основныхъ математическихъ операціяхъ. Послѣднимъ же могутъ подвергаться трансцендентныя выраженія любого сорта. Въ виду всего сказаннаго позволительно увѣрять критика, что даже всякое дѣйствительное значеніе какой-либо гиперсферической функціи содержится между значеніями алгебраическаго перемѣннаго, измѣняющагося независимо и непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$. Впрочемъ, такъ какъ опредѣленіе непрерывнаго измѣненія критикомъ еще не дано, то, можетъ быть, онъ дастъ его въ такой усовершенствованной формѣ, чтобы исключить возможность для алгебраическаго независимаго перемѣннаго проходить черезъ количественныя значенія, умѣстныя только для трансцендентныхъ перемѣнныхъ?

А можетъ быть можно считать ихъ и мнимыми?

Вопросъ критика, составляющій продолженіе его возраженія, относится опять-таки къ тригонометрическимъ функціямъ. Несмотря на видимое коварство этого вопроса, онъ только даетъ мнѣ лишній поводъ къ интереснымъ и не безполезнымъ разъясненіямъ. Замѣчу, во-первыхъ, что въ современномъ анализѣ знакъ $i=\sqrt{-1}$ представляющій, какъ можно, пожалуй, сказать, мнимую единицу, употребляется, какъ и самый терминъ „мнимый“ въ двухъ, совершенно не сходныхъ роляхъ. Хотя, для краткости письма, и я позволилъ себѣ въ книгѣ воспользоваться общепринятой буквой, замѣнивъ ею въ сложномъ вычисленіи введенный въ началѣ книги знакъ I вертикальной единицы, но я даю себѣ отчетъ въ отличіи мнимаго знака, указывающаго подлинную невозможность дѣйствія, отъ знака векторіальной перпендикулярности, отмѣчающаго лишь возможный переходъ въ пространство высшаго измѣренія. Ошибка современныхъ аналистовъ состоитъ въ томъ, что, смѣшивая произвольное и, нужно сказать, недопустимое условіе $i^2=-1$, съ доказуемымъ равенствомъ $I^2=-1$, они смѣшиваютъ также не имѣющую смысла теорію мнимаго количества, которая въ наукѣ и не можетъ существовать, съ совершенно реальной теоріей векторовъ. При математическихъ вычисленіяхъ съ количествами, соотвѣтствующими геометрическимъ протяженіямъ, нужно различать два случая. Если по условіямъ вопроса линейное протяженіе не можетъ или не должно переходить въ пространство высшаго измѣренія, то полученіе $\sqrt{-1}$ есть признакъ невозможности дѣйствія.

въ противоположномъ случаѣ тотъ же знакъ есть только указатель пути.

Пользуясь обычной ошибкой математической терминологіи и символизаціи, я на коварную выходку г. Кояловича отвѣчу подобной же, только не въ его, а въ моихъ интересахъ. Критикъ, силясь всѣми средствами затруднить движеніе моей книги въ публику, указываетъ только ея воображаемые имъ недостатки, считая достоинства не существующими. Но, если современные математики разрѣшаютъ себѣ непозволительныя дѣйствія съ величинами завѣдомо или условно несуществующими, то почему и мнѣ не поступить такъ же? Почему не объявить публикѣ особыя, мнимыя мною, достоинства книги?

Дѣло въ томъ, г. читатель, что критикъ, какъ нерѣдко бываетъ съ изслѣдователями новыхъ областей, разобравъ всю мою книгу, какъ разъ и не замѣтилъ того, что составляетъ главную основу отличія ея отъ всѣхъ извѣстныхъ курсовъ тригонометріи. Я именно и осуществилъ ту самую идею, на которую онъ теперь толкаетъ меня, какъ на особо, по его мнѣнію, пагубную. Обработкой книги подтверждено въ ясной для всѣхъ элементарной области мое давнишнее мнѣніе о томъ, что понятіе о количествѣ условно и зависитъ отъ того, какую совокупность признаковъ реальной величины мы стремимся выразить количествомъ. Если въ тригонометрическихъ линіяхъ разсматривать только линейныя ихъ направленія, то получается общеизвѣстная система тригонометріи, если же хотя для одной изъ нихъ отмѣтить плоскостное направленіе, то получается полная и радикальная реформа системы.

Моя новая тригонометрія именно и показываетъ не только возможность выраженія геометрическаго синуса мнимымъ, въ обычной рѣчи, количествомъ $\mathrm{Sn}\,\alpha . i$, гдѣ $i = \sqrt{-1}$, но и необычайную выгоду такого, считаемаго невозможнымъ, дѣйствія. Введеніе указаннаго мнимаго знака производитъ полное разрушеніе всѣхъ трудностей прежняго изложенія тригонометріи, поскольку такое изложеніе стремилось быть строго научнымъ. При этомъ большая часть накопленнаго издавна методологическаго балласта выметается сразу, какъ лишняя. Почти всѣ, иногда довольно простыя, иногда крайне сложныя доказательства замѣняются лишь мимолетными импульсами сознанія. Такъ, начиная съ формулъ приведенія, требовавшихъ, при геометрическомъ прежнемъ выводѣ ихъ, тонкихъ правилъ знаковъ Коши и Декарта и дополнявшихся еще теоретическимъ обобщеніемъ, требуемые результаты достигаются въ самомъ общемъ случаѣ моментальными умноженіями двухъ основныхъ формулъ на мнимую или же на отрицательную единицу, при чемъ сразу получаются выводы для синуса и косинуса. Самое полное доказательство теоремы сложенія, какъ указалъ уже Аргандъ, достигается однимъ перемноженіемъ двухъ простыхъ двучленовъ и также одновременно для синуса и косинуса. Упрощеніе въ выводѣ формулъ умноженія, отмѣченное еще Моавромъ, также осуществляется. За важнѣйшей формулой, раскрывающей связь тригонометрическихъ функцій съ показательными и осуществляющей разложенія функцій въ ряды, не приходится заходить въ дифференціальное исчисленіе къ Тейлору и Эйлеру, а достаточно, можно сказать, сдѣлать нѣсколько шаговъ отъ печки. Основныя соотношенія въ треугольникѣ получаются не изъ разныхъ исходныхъ пунктовъ, а почти механически списываются съ простого чертежа самаго треугольника. Сверхъ того въ другихъ деталяхъ обнаруживается рядъ упрощеній и обобщеній. Возвращаясь однако отъ ошибочной общепринятой рѣчи къ точному языку книги, нужно добавить, что на самомъ дѣлѣ никакой мнимости тамъ нѣтъ, какъ и не должно быть. Знакъ I, вводимый мною и опредѣляемый равенствомъ $I^2=-1$, есть знакъ не мнимой единицы, а вертикальной и изложенное всего на нѣсколькихъ страницахъ плоскостное исчисленіе есть не теорія мнимаго количества, каковой, повторяю, въ серьезной наукѣ и не можетъ быть, а теорія реальныхъ векторовъ.

На стр. 60 знакъ I опредѣляется, какъ символъ перпендикулярности, а на стр. 63 онъ уже оказывается числомъ ($I^2=-1$). Авторъ упускаетъ изъ виду, что вѣрное и очевидное при первомъ опредѣленіи символа I можетъ оказаться невѣрнымъ и уже во всякомъ случаѣ, не очевиднымъ при второмъ.

Итакъ, г. Кояловичъ потому только и признаетъ символъ I числомъ, что этотъ символъ удовлетворяетъ невозможному для числа равенству. Я такой ошибки не дѣлаю. Знакъ I опредѣленъ, во-первыхъ, не на 60-й стр., а на 57-й, какъ символъ вертикальнаго вектора, длиною равнаго единицѣ. А такъ какъ умноженіе I на $\mathrm{Sn}\alpha$ есть дѣйствіе, уже опредѣленное въ алгебрѣ, и можетъ измѣнить направленіе вертикали лишь въ прямо противоположное, то ясно, что произведеніе I на $\mathrm{Sn}\alpha$ выражаетъ прямую также вертикальную. Въ этомъ смыслѣ только и сказано, что знакъ I, уже опредѣленный раньше, можетъ считаться знакомъ перпендикулярности. Сказанное есть, значитъ, выводъ изъ опредѣленія, что съ самимъ опредѣленіемъ не тождественно. Въ моей системѣ изложенія нѣтъ двухъ опредѣленій одного и того же понятія. Чтобы убѣдиться въ этомъ, нужно только понять всю систему, достаточно строгую въ научномъ отношеніи.

Обращаясь ко второму возраженію критика, замѣчу, что символъ I, представляющій, какъ опредѣлено, символъ вертикальной единицы, есть, значитъ, частный видъ комплекснаго количества. На той же указанной стр. 57-й, значительно предшествующей стр. 63-й, установлено ясное понятіе о комплексной единицѣ и о комплексѣ вообще. Опредѣленіе этого понятія совершенно устраняетъ заявленіе о томъ, что „вѣрное и очевидное при одномъ опредѣленіи можетъ оказаться не вѣрнымъ и ужъ во всякомъ случаѣ не очевиднымъ при другомъ". Ни о какомъ другомъ въ моей системѣ и нѣтъ рѣчи. Повидимому, критикъ, встрѣтивъ въ числѣ моихъ символовъ количество —1, считаетъ, что, написавъ этотъ символъ, я уже удалился отъ векторовъ и комплексовъ. Тогда нужно ему напомнить, что —1 соотвѣтствуетъ вектору, направленному горизонтально влѣво. Комплексомъ называется, вѣдь, отвлеченное количество, выражающее векторъ по его размѣру и направленію. А такъ какъ векторы могутъ имѣть направленіе горизонтальное, вправо или влѣво, при каковыхъ направленіяхъ они, какъ уже давно принято, выражаются дѣйствительными количествами, то въ силу этого и принято также давно считать всякое дѣйствительное количество частнымъ видомъ комплекса.

Указывается, какъ надо извлекать корни изъ комплексныхъ чиселъ, и ни слова не говорится о множественности ихъ значеній.

Интересно было бы узнать, гдѣ на протяженіи всего курса элементарной тригонометріи критикъ нашелъ надобность въ понятіи о корнѣ изъ комплекса, какъ о функціи многозначной. Теорію двучленныхъ уравненій, гдѣ такое понятіе нужно, я имѣю основаніе относить не къ тригонометріи, какъ это нѣкоторые дѣлаютъ, а къ высшей алгебрѣ. Самый параграфъ моей книги, къ которому относится замѣчаніе, озаглавленъ не „теоріей" возведенія въ степень и извлеченія корня, а „замѣтками" объ этихъ дѣйствіяхъ, каковыя замѣтки и даны лишь въ объемѣ, соотвѣтствующемъ надобности въ нихъ. Странно, что критикъ, читая мою книгу, не замѣтилъ того, что я имѣю привычку говорить о всемъ въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ и говорить лишь то, что относится къ дѣлу.

Стр. 90—91. Оказывается, что только для *малаго* остраго угла дуга больше синуса и меньше тангенса.

Нѣтъ, при справкѣ по моей книгѣ оказывается не это, г. Кояловичъ. Тамъ, приступая къ отысканію указываемыхъ обычно предѣловъ синуса малой дуги, я заявляю, что дуга „всякаго малаго" остраго угла больше соотвѣтствующаго синуса и меньше соотвѣтствующаго тангенса, т.-е. говорю именно о томъ, что относится къ дѣлу. Въ приведенномъ же выше воспроизведеніи моего текста появились неожиданно слова „только для малаго", а это значитъ только, что воспроизведеніе и основанный на немъ упрекъ автору представляютъ образчикъ безцеремонной подтасовки. Кромѣ того несомнѣнно, что говорить въ тригонометріи объ общемъ видѣ неравенства между дугой и соотвѣтствующими ей линіями нѣтъ ни малѣйшаго основанія и смысла.

Стр. 103—104. Ряды для $\mathrm{Sn}x$ и $\mathrm{Cs}x$ выведены только при $\mathrm{Mod}x<1$.

Въ тригонометріи нѣтъ надобности разсматривать эти ряды иначе, какъ въ границахъ, даже болѣе стѣсненныхъ, именно $0<x<\frac{\pi}{6}$. Въ книгѣ условіе оговорено словами „при ограниченіи для насъ вполнѣ достаточномъ". Ограниченіе же позволяетъ замѣнить длинную и безцѣльную въ данномъ случаѣ болтовню при обработкѣ остатка разложенія однимъ простымъ замѣчаніемъ. Это въ сущности столь же законно, какъ и выводъ предѣловъ синуса и косинуса только для малой дуги.

Авторъ очень любитъ вводить новые и (лишніе) термины: колиніи (стр. 12), кофункціи (стр. 48), аркфункціи (стр. 120).

Термины колиніи и кофункціи, изъ которыхъ второй уже былъ введенъ Германомъ Шапирой, а мною лишь примѣненъ умѣстно, сокращаютъ и обобщаютъ рѣчь въ тѣхъ многочисленныхъ случаяхъ, когда приходится говорить о дополнительныхъ углахъ. Что касается до третьяго термина, то, имѣя уже распространенныя названія арксинусъ, арктангенсъ и т. под., мы въ нихъ же естественно заключаемъ и общее названіе такихъ функцій аркфункціями. Достойно вниманія, что г. Кояловичъ, упрекая меня въ излишнемъ уснащеніи математической рѣчи, самъ въ своей рецензіи алгебры Маракуева вводитъ небывалое еще въ математикѣ названіе лишнихъ корней ирраціональныхъ уравненій корнями.... паразитными. Въ виду этого нельзя не отмѣтить, что термины, вводимые мною, выгодно отличаются хотя чистоплотностью.

Стр. 135. Авторъ не замѣчаетъ, что онъ два раза повторяетъ одно и то же доказательство.

Наличность сдѣланнаго замѣчанія констатируетъ уже предуказанный мною второй образчикъ того, что критикъ способенъ смѣшивать положенія, въ извѣстной степени взаимно обратныя. На указанной страницѣ, говоря объ извѣстномъ простѣйшемъ признакѣ сходимости Дюгамеля, я разсматриваю сначала отношенія каждаго послѣдующаго члена ряда къ предыдущему и, имѣя при $k<1$ безконечную послѣдовательность неравенствъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k, \ldots,$$

могу заключить, конечно, что изъ этой послѣдовательности вытекаетъ $\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. Для вывода же самаго признака въ той формѣ, какая примѣняется въ практикѣ, доказываю, что, наоборотъ, изъ условія $\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ вытекаютъ предыдущія неравенства, опредѣляющія сходимость ряда. Вотъ эту-то необходимую вторую часть доказательства критикъ и понялъ, какъ повтореніе якобы первой.

Выводъ формулы бинома изложенъ весьма неудовлетворительно. Авторъ опирается на предположеніе, что извѣстный рядъ долженъ быть биноміальнымъ, потому что иначе онъ „не представлялъ бы простѣйшей функціи, характеризуемой этимъ свойствомъ“. Такими разсужденіями можно доказать все, что угодно.

Въ сказанномъ замѣчаніи имѣется, во-первыхъ, по крайней мѣрѣ четвертый образчикъ ложной подтасовки. Воспроизводя слова мои „этимъ свойствомъ“, но опуская указаніе на то, каково отмѣчаемое свойство, критикъ какъ бы относитъ его къ самой доказуемой биноміальности. При доказательствѣ теоремы о перемноженіи биноміальныхъ рядовъ я замѣняю крайне сложное заключеніе отъ n къ $n+1$ совершенно новой и потому, можетъ быть, не совсѣмъ ясно аргументированной, формой математической мысли. Если бы подобныя оригинальныя формы не допускались въ ихъ хотя бы и первичной конструкціи, то, пожалуй, и до сихъ поръ считался бы по примѣру древнихъ геометровъ единственно точнымъ способомъ разсужденія способъ приведенія къ нелѣпости, каковой я, между прочимъ, и примѣню сейчасъ, пользуясь любезно открытымъ мнѣ въ слѣдующемъ, послѣднемъ замѣчаніи поводомъ.

На стр. 149 авторъ замѣняетъ предѣлъ суммы суммой предѣловъ, не замѣчая, что число слагаемыхъ безконечно растетъ. То же самое на стр. 151.

Замѣчаніе относится къ замѣнѣ въ формулѣ $Lg_a x = Lx(La)^{-1}$ аргумента x черезъ $1+z$, а Неперова логариѳма его разложеніемъ

$$L(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}+\cdots,$$

что соотвѣтствуетъ простому умноженію предыдущей формулы разложенія на логариѳмическій модуль и переходу въ первой части отъ Неперова логариѳма къ новому. Насколько такая операція съ сходящимся знакопеременнымъ рядомъ грѣшитъ противъ принциповъ способа предѣловъ, предоставляю судить участвующимъ въ этомъ грѣхѣ авторамъ всѣхъ курсовъ анализа, но не могу не обратить вниманіе читателя на то, что критикъ, справедливо признавая первую часть формулы разложенія предѣломъ суммы, считаетъ вторую часть суммой предѣловъ, а изъ этого вытекаетъ неизбѣжно, что каждый членъ ряда есть предѣлъ отъ самаго себя, что перемѣнная величина равна постоянной, что всякій процессъ измѣненія устраненъ и что, значитъ, и способъ предѣловъ здѣсь не имѣетъ мѣста. Другое замѣчаніе критика, отождествляемое имъ съ первымъ, относится однако же къ совершенно иному обстоятельству. Не вдаваясь въ анализъ таковаго, отмѣчу, значитъ, еще разъ смѣшеніе обстоятельствъ совершенно разнаго свойства.

Итакъ, вотъ какова рецензія, устанавливающая центральный, формально авторитетный взглядъ на мою книгу. Подъ вліяніемъ этой рецензіи книга признана непригодной даже для библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній. Но, вѣдь, не изъ однихъ только подобныхъ цѣнителей состоитъ среда лицъ, интересующихся математикой. Поэтому я далекъ отъ мысли, что трудъ мой нужно считать потраченнымъ напрасно.

Между прочимъ, значеніе своей книги я вижу въ томъ, что она ясно рѣшаетъ вопросъ о мѣстѣ, гдѣ въ будущихъ учебныхъ системахъ можетъ утвердиться геометрическая теорія комплексовъ. Основы ея должны быть отнесены къ тригонометріи, такъ какъ именно здѣсь ученіе о комплексахъ получаетъ ближайшее полезное примѣненіе. Болѣе широкое развитіе теоріи можетъ быть дано уже въ анализѣ, въ качествѣ введенія въ высшую алгебру. Въ своемъ курсѣ анализа я такъ и сдѣлалъ это раньше.

Вынужденный ограничиваться личной рекомендаціей книги, позволю себѣ обратить еще вниманіе преподавателей и любителей математики на важную ея особенность, упомянуть о которой выше не представлялось случая. Особенность эта въ полной естественности развитія понятій. Читающему книгу не придется встрѣтить здѣсь никакихъ насильственныхъ скачковъ мысли. Онъ ясно увидитъ, что какъ возникновеніе понятій, такъ и ихъ послѣдовательныя обобщенія вызываются дѣйствительными надобностями и пути такихъ обобщеній выбираются нормально.

Недостатокъ перваго изданія книги — ея сравнительная массивность, объясняемая преимущественно включеніемъ дополнительныхъ статей. Но уже вскорѣ послѣ изданія сложная статья о рядахъ отнесена, какъ и должно быть, къ алгебрѣ. Въ будущемъ явится возможность внести и другія сокращенія. Общая же система оформлена и теперь достаточно.
