ПРОВЕРЕНО
1945

ВЫДАЕТС

Анатолию Ивановичу
Сидорову
От Н. Шапошникова

Н. А. Шапошниковъ.

Разборъ статьи Ермакова

„О преподаванiи алгебры“.

Выпускъ второй.

Дозволено цензурою. Москва 18 декабря 1893 г.

P 123549

НТБ МГТУ им.Н.Э.Баумана

123549

Шапошников Н.А. Разбор статьи Ермакова О п

Провер. 1935

БИБЛИОТЕКА

123949

ПРОВЕРЕНО 1945

1952

Н. А. Шапошниковъ.

Разборъ статьи Ермакова „О преподаваніи алгебры".

Выпускъ второй.

Система начальной алгебры, предложенная г. Ермаковымъ, вполнѣ соотвѣтствуетъ тому введенію къ ней, которому мы посвятили предъидущій рядъ довольно обстоятельныхъ, хотя и краткихъ замѣтокъ. По этой самой причинѣ эта система не требуетъ особо подробнаго и затруднительнаго разбора.

Авторъ упростилъ ознакомленіе съ предложенной имъ системой тѣмъ, что самъ отчетливо раздѣлилъ ее на положенія, условія и опредѣленія. Разсмотримъ въ подлинномъ видѣ всѣ эти элементы системы, позволивъ себѣ только занумеровать ихъ въ томъ порядкѣ, въ которомъ они даны въ самой статьѣ, а затѣмъ, обозрѣвъ систему въ общемъ, перейдемъ къ оцѣнкѣ ея по частямъ.

1. (*Положеніе первое.* Результатъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ порядка дѣйствій и отъ перестановки слагаемыхъ).

2. (*Условіе первое.* Если нѣсколько чиселъ соединены знаками сложенія и вычитанія, то условимся производить дѣйствія въ томъ порядкѣ, какъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны).

3. (*Положеніе второе.* При соблюденіи сказаннаго выше условія результатъ сложенія и вычитанія нѣсколькихъ чиселъ не измѣнится, если переставимъ числа вмѣстѣ со знаками, стоящими передъ ними).

4. (*Положеніе третье.* Чтобы вычесть послѣдовательно нѣсколько чиселъ, можно сразу вычесть ихъ сумму).

5. (*Положеніе четвертое.* Результатъ перемноженія нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ порядка дѣйствій и отъ перестановки множителей).

6. (*Условіе второе.* Если нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и дѣленія, то условимся производить дѣйствія въ томъ порядкѣ, въ которомъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны).

7. (*Положеніе пятое.* Результатъ перемноженія и дѣленія нѣсколькихъ чиселъ при соблюденіи указаннаго условія не измѣнит-

ся, если мы переставимъ числа вмѣстѣ со стоящими передъ ними знаками).

8. (*Положеніе шестое.* Раздѣлить послѣдовательно на нѣсколько чиселъ все равно, что раздѣлить на ихъ произведеніе).

9. (*Условіе третье.* Въ выраженіи, состоящемъ изъ чиселъ, соединенныхъ знаками всѣхъ четырехъ дѣйствій, математики условились прежде всего производить дѣйствія надъ числами, стоящими рядомъ и соединенными знаками умноженія и дѣленія).

10. (*Опредѣленіе первое.* Совокупность чиселъ, соединенныхъ знаками умноженія и дѣленія, принято называть членомъ или одночленомъ).

11. (*Опредѣленіе второе.* Нѣсколько членовъ, соединенныхъ знаками $+$ и $-$, составляютъ многочленъ).

12. (*Положеніе седьмое.* Два члена равные и съ противуположными знаками (впереди) взаимно уничтожаются).

13. (*Положеніе восьмое.* Чтобы умножить сумму чиселъ на какой-нибудь множитель, нужно каждое слагаемое умножить на этотъ множитель и полученныя произведенія сложить).

14. (*Опредѣленіе третье.* Вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію, гдѣ по данной суммѣ и одному слагаемому ищется второе слагаемое).

15. (*Положеніе девятое.* Чтобы умножить разность двухъ чиселъ на третье число, нужно уменьшаемое умножить на третье число, потомъ вычитаемое умножить на третье число и изъ перваго произведенія вычесть второе).

16. (*Положеніе десятое.* Разность двухъ чиселъ не измѣнится, если мы отъ каждаго числа отнимемъ поровну).

17. (*Положеніе одинадцатое.* Если одинъ изъ множителей равенъ нулю, то и все произведеніе равно нулю).

18. (*Положеніе двѣнадцатое.* Чтобы прибавить многочленъ, нужно приписать его члены со стоящими передъ ними знаками).

19. (*Положеніе тринадцатое.* Чтобы отнять многочленъ, нужно къ уменьшаемому приписать члены вычитаемаго съ обратнымъ знакомъ).

20. (*Положеніе четырнадцатое.* Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, нужно каждый членъ множимаго умножить на каждый членъ множителя).

21. (*Опредѣленіе четвертое.* Отрицательнымъ многочленомъ назовемъ такой многочленъ, въ которомъ, совершая дѣйствія, начиная съ лѣвой стороны, мы приходимъ къ невозможному вычитанію).

22. (*Опредѣленіе пятое.* Положительнымъ многочленомъ называется такой многочленъ, въ которомъ всѣ дѣйствія, начиная съ лѣвой стороны, возможны).

23. (*Условіе четвертое.* Распространимъ всѣ положенія, найденныя для положительныхъ многочленовъ, и на отрицательные многочлены).

24. (*Условіе пятое.* Въ выраженіи 0—5 условимся отбрасывать нуль и писать такъ: —5).

25. (*Опредѣленіе шестое.* Число со знакомъ минусъ впереди назовемъ отрицательнымъ числомъ).

26. (*Опредѣленіе седьмое.* Въ отличіе отъ отрицательныхъ чиселъ положительными числами назовемъ обыкновенныя числа употребляемыя въ ариѳметикѣ; передъ ними нужно подразумѣвать знакъ плюсъ).

27. (*Положеніе пятнадцатое.* Чтобы сложить положительное число съ отрицательнымъ, нужно на самомъ дѣлѣ ихъ вычесть и поставить знакъ бóльшаго количества).

28. (*Положеніе шестнадцатое.* Чтобы сложить отрицательныя числа между собою, нужно ихъ на самомъ дѣлѣ сложить и передъ суммой поставить знакъ минусъ).

29. (*Положеніе семнадцатое.* Чтобы вычесть отрицательное число, нужно прибавить равное ему по величинѣ положительное число).

30. (*Положеніе восемнадцатое.* Чтобы умножить два числа, каждое изъ которыхъ можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ, нужно ихъ на самомъ дѣлѣ перемножить и поставить знакъ плюсъ, если оба числа имѣютъ одинаковые знаки, и знакъ минусъ, если разные знаки).

Такимъ образомъ система алгебры г. Ермакова содержитъ въ себѣ при указанной послѣдовательности 18 положеній, 5 условій и 7 опредѣленій, а всего 30 элементовъ. То обстоятельство, что въ этой системѣ 30 элементовъ, а не 47, не 55 и т. п., съ одной стороны, вѣроятно, объясняется числовымъ вкусомъ автора, а съ другой, разумѣется, и тѣмъ, что система охватываетъ только случайную часть основаній алгебры, не достигая до дѣленія явныхъ количествъ и не затрогивая вовсе наиболѣе существенной для алгебры теоріи неявныхъ количествъ.

Какъ увидимъ дальше, авторъ, изложивъ такую систему, не отступаетъ отъ высказанной имъ раньше идеи о томъ, что въ учебникѣ должны быть включены только основныя положенія науки, и считаетъ, хотя съ педагогической стороны, переписанный нами учебникъ для учениковъ достаточнымъ, а для руководства педагоговъ необходимымъ. Мы разсмотримъ ниже, чему педагоги и ученики могутъ научиться по подобному учебнику, но прежде этого поговоримъ немного о современномъ преподаваніи вообще.

Во взглядахъ многихъ изъ нашихъ преподавателей твердо укоренились нѣкоторые совершенно ложные принципы. Одинъ изъ этихъ принциповъ заключается въ томъ, что будто ради облегченія педагогическаго дѣла слѣдуетъ излагать науку на языкѣ безграмотнаго дѣтскаго лепета, отчего въ результатѣ искажаются не только отдѣльныя выраженія, но и вся многообразная научная рѣчь. Преподаватели математики доходятъ до такого абсурда и послѣдовательно укрѣпляютъ его въ то время, какъ преподаватели этимологіи не стѣсняются и болѣе трудными, и болѣе узкими терминами, давая имъ отчетливыя и строгія опредѣленія. Замѣчательно то, что житейская практика вырабатываетъ даже въ наукахъ, считаемыхъ наименѣе точными, въ наукахъ юридическихъ правильность и точность формулировки понятій и логичность общаго изложенія, а представители точныхъ наукъ сѣютъ въ школахъ сѣмяна безурядицы.

По моему мнѣнію, пусть лучше учащіеся съ нѣкоторымъ усиліемъ мышленія и съ напряженіемъ памяти усвоятъ себѣ точно выраженныя опредѣленія математическихъ понятій, чѣмъ сдѣлаютъ они съ меньшимъ трудомъ извращеніе этихъ понятій. Пусть лучше ученики привыкнутъ не спѣша и съ осторожностью излагать правильную математическую рѣчь, чѣмъ будутъ они быстро и смѣло нести безграмотную чепуху.

Другой принципъ въ томъ, что будто для развитія самодѣятельности учащихся не нужно давать имъ обстоятельной теоріи и указывать общіе способы рѣшенія задачъ, а слѣдуетъ заставлять учащихся продѣлывать массу упражненій. Полагаю, что этотъ принципъ поддерживается лишь тѣми, которые не въ состояніи сами разъяснять ни правильныхъ теорій, ни удобныхъ общихъ способовъ рѣшенія задачъ. Не отрицая отнюдь пользы самостоятельныхъ математическихъ упражненій, я думаю однако, что разумная педагогія должна считаться съ производительностью такихъ упражненій, а не съ калейдоскопическимъ разнообразіемъ ихъ. Педагогія должна еще считаться съ экономіей молодыхъ развивающихся умственныхъ силъ и потому она не въ правѣ направлять эти силы на борьбу съ вѣтряными мельницами.

Мой собственный опытъ убѣдилъ меня въ томъ, что ученики, хорошо ознакомленные съ теоріей, но рѣшившіе лишь какую нибудь десятую часть обыкновеннаго числа задачъ, относились съ полной индифферентностью къ выпускнымъ экзаменаціоннымъ темамъ. Между тѣмъ мнѣ же приходилось видѣть, что другіе ученики, передѣлавшіе массу обыкновенныхъ упражненій, становились въ безпомощное положеніе передъ крайне простыми и далеко не загадочными вопросами, однако несравненно болѣе важными и для общаго образованія, и для спеціально математическаго, чѣмъ цѣлыя сотни рутинныхъ задачъ.

Отъ г. Ермакова, какъ отъ серьезнаго представителя науки, можно было бы ожидать того, что, обрушиваясь съ силой авторитета на современный строй преподаванія математики, онъ возстанетъ противъ расшатыванія основъ науки. Но, какъ мы уже раньше видѣли, такимъ ожиданіямъ не суждено было сбыться.

Возвратимся теперь къ нашему разбору и разсмотримъ вкратцѣ детали системы алгебры г. Ермакова. Будемъ предполагать по прежнему, что читатели, интересующіеся документальной стороной рецензіи, могутъ свѣрить нижеприведенныя указанія съ подлиннымъ текстомъ разбираемой статьи.

Зам. 61. Въ пунктѣ 1-мъ авторъ формулируетъ и разсматриваетъ свойство независимости результата сложенія отъ „порядка дѣйствій и отъ перестановки слагаемыхъ".

Мы видимъ прежде всего, что перестановка слагаемыхъ не признается авторомъ за измѣненіе порядка дѣйствій и потому напр. въ выраженіяхъ $a+7+5$ и $a+5+7$ порядокъ дѣйствій онъ считаетъ одинаковымъ. Авторъ говоритъ, что формулированное имъ положеніе извѣстно изъ ариѳметики, подразумѣвается, конечно, въ полномъ объемѣ, но сейчасъ же себѣ противорѣчитъ и начинаетъ пояснять, что нужно разумѣть подъ порядкомъ дѣйствій. Для объясненія такого широкаго понятія приводится только одинъ примѣръ тождества $\overline{5+7}+3=5+\overline{7+3}$. При объясненіи этого тождества выбрасываніе скобокъ изъ ариѳметики остроумно компенсируется введеніемъ замѣняющей скобки продольной черты. Изгнаніе изъ той же ариѳметики понятія о выраженіяхъ не мѣшаетъ однако автору говорить о тождествѣ именно выраженій. Для объясненія, дальше слѣдующаго, того, что нужно подразумѣвать подъ перестановкой слагаемыхъ, авторъ указываетъ только формулу $a+b=b+a$, заявляя притомъ открыто, хотя не вполнѣ отчетливо, что эта формула выражаетъ весь объемъ объясняемаго понятія. Въ концѣ объясненій говорится о томъ, что „если нѣсколько чиселъ соединены знаками сложенія и вычитанія, то результатъ зависитъ отъ того порядка, въ которомъ производятся указанныя дѣйствія“, и такимъ образомъ ариѳметическія свойства перемѣстительности и сочетательности сложенія не только не распространяются на алгебраическое сложеніе, но въ началахъ алгебры прямо таки отрицаются. Такое утвержденіе объясняется тѣмъ, что въ выраженіи $10-6+3$ вычисленіе по порядку $\overline{10-6}+3$ даетъ 7, а вычисленіе по плану $10-\overline{6+3}$ даетъ 1.

Зам. 62. Въ пунктѣ 2-мъ указывается какъ условіе, что „если нѣсколько чиселъ соединены знаками сложенія и вычитанія“, то производятъ дѣйствія „въ томъ порядкѣ, какъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны“.

Не будемъ уже подробно останавливаться на томъ замѣчаніи, что авторъ соединяетъ умственныя абстракціи графическими знаками. Такого рода операціи онъ производитъ безъ затрудненія на каждомъ шагу. Но если вспомнимъ, что авторъ съ самого начала статьи ратовалъ противъ символизма въ алгебрѣ, то невольно придемъ въ недоумѣніе. Вѣдь условіе, которое онъ даетъ, предполагаетъ, что изучающій алгебру раньше ознакомляется съ символическими обозначеніями результатовъ дѣйствій, чѣмъ съ самими дѣйствіями.

Не трудно усмотрѣть даже по двумъ первымъ пунктамъ, что разсматриваемая система есть исключительно символическая. Она не только не имѣетъ конкретной подкладки въ реальномъ представленіи дѣйствій, но не содержитъ въ своихъ основахъ даже опредѣленій дѣйствій, и потому является безъидейной символистикой. Такой системѣ вполнѣ свойственна та совокупность противорѣчій, смѣшеній понятій, неправильностей языка и неопредѣленностей обозначеній, которую мы видимъ здѣсь на каждомъ шагу. Уже о двухъ первыхъ пунктахъ пришлось сдѣлать 10 замѣчаній, а потому въ виду

28 остальныхъ пунктовъ приходится сократить возраженія въ большей степени.

Зам. 63. Въ пунктѣ 3-мъ авторъ формулируетъ теорему, состоящую въ томъ, что при соблюденіи условія о производствѣ дѣйствій сложенія и вычитанія въ единственно опредѣленномъ, вышеуказанномъ порядкѣ можно перемѣщать слагаемыя и вычитаемыя.

Это значитъ, другими словами, по общепринятой терминологіи, что при соблюденіи указаннаго условія можно этого самого условія не соблюдать. Кромѣ того здѣсь авторъ говоритъ о перестановкѣ „чиселъ“ вмѣстѣ съ ихъ знаками, т. е. пользуется алгебраической идеей объ активныхъ числахъ и условіемъ объ отнесеніи къ обозначеніямъ такихъ чиселъ знаковъ дѣйствій, не считая однако нужнымъ объяснить ни эту важнѣйшую идею, ни принятое алгебристами основное условіе.

Зам. 64. Въ пунктѣ 4-мъ сказано, что для того, чтобы вычесть нѣсколько чиселъ, можно вычесть ихъ сумму, и указывается, что это положеніе извѣстно изъ ариѳметики.

Такимъ образомъ въ этомъ четвертомъ пунктѣ авторъ говоритъ о теоремѣ вычитанія, а самое понятіе о вычитаніи, т. е. опредѣленіе его даетъ въ пунктѣ 14-мъ. Здѣсь же онъ самъ употребляетъ скобки, а разрѣшеніе педагогамъ на употребленіе таковыхъ даетъ только послѣ 11 пунктовъ, настойчиво утверждая тамъ, что болѣе раннее употребленіе ихъ совершенно не позволительно.

Авторъ, какъ мы видѣли раньше, упрекалъ педагоговъ въ томъ, что они, не зная опредѣленія алгебры и ея окончательныхъ цѣлей, не даютъ стройной теоріи этой науки. О томъ, на сколько стройна вся выписанная нами система автора, можно судить по послѣдовательности всѣхъ 30 пунктовъ. Но сопоставленіе четырехъ первыхъ пунктовъ съ четырьмя слѣдующими раскрываетъ передъ нами особо замѣчательную стройность разсматриваемой теоріи. Оказывается, что ко второй серіи элементовъ системы точно также и совершенно въ прежнемъ порядкѣ прилагаются всѣ 14 замѣтокъ, сдѣланныя нами передъ этимъ.

Зам. 65. Въ пунктѣ 5-мъ говорится о томъ, что „результатъ перемноженія нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ порядка дѣйствій и отъ перестановки множителей“.

Такимъ образомъ перестановка множителей не признается за измѣненіе порядка дѣйствій и, значитъ, напр. въ выраженіяхъ

$a.5.7$ и $a.7.5$ порядокъ дѣйствій нужно считать однимъ и тѣмъ же. Авторъ не говоритъ ничего о доказательствѣ формулированнаго положенія и потому нужно считать, что онъ признаетъ доказательство даннымъ въ ариѳметикѣ, конечно въ полномъ объемѣ. Но понятіе о порядкѣ дѣйствій считается неизвѣстнымъ, потому что для объясненія его дается формула $\overline{a \times b} \times c = a \times \overline{b \times c}$. Въ этой формулѣ скобокъ, какъ и слѣдуетъ, не написано, но продольныя черты входятъ. Обѣ части равенства различаются—какъ выраженія, но, повидимому, такое различеніе не требуетъ того, чтобы было извѣстно понятіе о выраженіи. Весь объемъ понятія о перемѣстительности умноженія выражается формулой $a \times b = b \times a$, что совмѣщаетъ краткость обозначенія съ ясностью. О случаѣ „когда нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и дѣленія" говорится, что здѣсь „результатъ уже зависитъ отъ того порядка, въ которомъ производятся дѣйствія". Для объясненія приводится примѣръ выраженія $24 : 6 \times 2$, въ которомъ вычисленіе по порядку $\overline{24 : 6} \times 2$ даетъ 8, а вычисленіе по плану $24 : \overline{6 \times 2}$ даетъ 2.

Зам. 66. Въ пунктѣ 6-мъ указывается какъ условіе, что „если нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и дѣленія", то производятъ дѣйствія „въ томъ порядкѣ, въ которомъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны.

Здѣсь умственныя абстракціи соединяются знаками : и $\times$, причемъ введеніе косого креста вмѣсто точки дѣлается, вѣроятно, ради бóльшей прочности соединенія. Условіе предполагаетъ, что учащіеся раньше ознакомляются съ символическими обозначеніями результатовъ дѣйствій, чѣмъ съ самыми дѣйствіями, а употребленіе вездѣ косого креста вмѣсто точки соотвѣтствуетъ, какъ нужно думать, не только стѣсненію символизма въ алгебрѣ, но даже и совершенному изгнанію его по первоначальному замыслу автора.

Зам. 67. Въ пунктѣ 7-мъ формулируется теорема о томъ, что при соблюденіи условія о вычисленіи результата умноженій и дѣленій въ единственномъ, выше намѣченномъ порядкѣ дѣйствій можно перемѣщать множителей и дѣлителей.

Иначе говоря, по общепринятой терминологіи, никто и ничто не мѣшаетъ при соблюденіи указаннаго условія не соблюдать этого самого условія. Здѣсь же авторъ пользуется идеей объ активныхъ операторахъ умноженія и дѣленія и условіемъ объ отнесеніи къ обозначеніямъ такихъ операторовъ знаковъ дѣйствій, не считая нужнымъ указать ни основаній самой идеи, ни связаннаго съ ней основного условія.

Зам. 68. Въ пунктѣ 8-мъ сказано, что „раздѣлить послѣдовательно на нѣсколько чиселъ все равно, что раздѣлить на ихъ произведеніе“.

Здѣсь говорится о теоремѣ дѣленія, а самого опредѣленія дѣленія въ разсматриваемой системѣ совсѣмъ нѣтъ, что въ виду даваемаго, хотя значительно дальше, опредѣленія вычитанія немного нарушаетъ стройность системы. Авторъ ссылается на извѣстность разсматриваемой теоремы въ ариѳметикѣ, но, кажется, что въ учебникахъ ариѳметики ее обыкновенно не доказываютъ, а разсматриваютъ въ теоріи чиселъ, которую авторъ, какъ извѣстно, признаетъ никуда не годной. При изложеніи разсматриваемаго пункта скобки не употребляются, такъ какъ въ силу указанія на то, что процессъ—дѣленіе „изображается“ въ формѣ объекта—дроби, является возможность вводить продольныя черты. Авторъ говоритъ, что результатъ перемноженія и дѣленія нѣсколькихъ чиселъ условились въ алгебрѣ „всегда“ приводить къ формѣ такой, какъ напр. $a:b\times c:d:e\times f=\frac{acf}{bde}$, но едвали это замѣчаніе окажется вполнѣ общимъ, если отнести его напр. къ случаю $a:a\times b:b:c\times c$.

Однако по поводу 8-ми пунктовъ системы пришлось все таки сдѣлать 30 замѣтокъ.

Нужно значитъ еще больше экономить запасъ благосклоннаго вниманія читателей.

Зам. 69. (Въ выраженіи, состоящемъ изъ чиселъ, соединенныхъ знаками всѣхъ четырехъ дѣйствій, математики условились прежде всего производить дѣйствія надъ числами, стоящими „рядомъ“ и соединенными знаками умноженія и дѣленія).

Слѣдовательно такія выраженія возникли раньше, чѣмъ математики пришли относительно ихъ къ полюбовному соглашенію, и потому, выходитъ, именно въ символизмѣ начало началъ. Но и при такомъ проникновеніи до корня науки возникаетъ недоумѣніе въ виду того, что, какъ сказалъ авторъ непосредственно передъ этимъ, „дѣленіе изображается“, замѣтимъ — всегда, „въ формѣ дроби“, а если такъ, то въ выраженіи $a+\frac{b}{c}$ „числа“ b и c не стоятъ „рядомъ“ и потому къ этому выраженію указанное теперь условіе относиться не можетъ.

Зам. 70. (Совокупность чиселъ, соединенныхъ знаками умноженія и дѣленія, принято называть членомъ или одночленомъ).

По этой терминологіи нельзя относить къ одночленамъ выраженія $a, -b, a^{\sqrt{2}}, \sqrt[3]{b}$, потому что въ этихъ выраженіяхъ знаковъ умноженія и дѣленія нѣтъ. Нельзя также считать одночленами выраженія $(a+b)c$, $\frac{a-b}{c}$ и т. под., такъ какъ „числа" въ нихъ соединены не только знаками умноженія и дѣленія.

Зам. 71. (Нѣсколько членовъ, соединенныхъ знаками $+$ и $-$, составляютъ многочленъ).

Такъ какъ по вышеуказанному $a, -b$ и c не подходятъ подъ опредѣленіе членовъ, то выраженіе $a-b+c$ нельзя считать многочленомъ. Но съ другой стороны выраженія $0.0-a.0-b.0+a.b$ или $a.b-a.b$ суть многочлены.

Зам. 72. (Два члена равные и съ противоположными знаками (впереди) взаимно уничтожаются).

Указанное здѣсь положеніе не должно быть примѣняемо къ только что упомянутому нами выраженію $a.b-a.b$, потому что разсматриваемое положеніе составляетъ пунктъ 12-й системы, а о постановкѣ знака плюсъ передъ первымъ членомъ многочлена, написаннымъ безъ знака, говорится впервые только въ пунктѣ 18-мъ. Здѣсь еще обращаетъ на себя вниманіе отдѣльный намекъ автора на то, что члены многочлена имѣютъ особые знаки назади.

Зам. 73. Въ пунктѣ 13-мъ дается формула $(a+b)c = ac + bc$.

Авторъ не указываетъ того, гдѣ и въ какомъ объемѣ эта формула доказывается, но въ пунктѣ 30-мъ прекрасно пользуется, подобно Бертрану, равенствомъ $(0-a)(0-b)=0.0-0.b-a.0+a.b$, которое легко освобождаетъ ихъ обоихъ отъ всякой неясной теоріи знаковъ въ духѣ воззрѣній Декарта, Гамильтона и другихъ, и такимъ образомъ обезпечиваетъ торжество символизма.

Зам. 74. (Вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію, гдѣ по данной суммѣ и одному слагаемому ищется второе слагаемое).

Такимъ образомъ опредѣленіе вычитанія дается послѣ теоремъ, относящихся ко всѣмъ четыремъ дѣйствіямъ, и выраженіе этого опредѣленія наводитъ на мысль, судя по мѣстоположенію слова „гдѣ", что именно въ сложеніи ищется второе слагаемое.

Зам. 75. Въ пунктѣ 15-мъ дается формула $(a-b)c=ac-bc$.

Авторъ упоминаетъ о доказательствѣ этой формулы на основаніи опредѣленія вычитанія, заблаговременно на этотъ разъ приведеннаго, и правила умноженія суммы, но какое значеніе имѣетъ это доказательство, когда одинъ изъ аргументовъ его — свойство распредѣлительности не доказанъ, а другой — опредѣленіе вычитанія формулированъ неясно и неправильно?

Зам. 76. (Разность двухъ чиселъ не измѣнится, когда мы отъ каждаго числа отнимемъ поровну).

Это положеніе вовсе не анализируется, хотя въ дальнѣйшемъ служитъ источникомъ для построенія теоріи отрицательныхъ количествъ, теоріи, надо сказать, замѣчательной по ея анахронизму.

Зам. 77. Формула $a.0=0$ не поясняется и не доказывается. Она по мнѣнію автора выражаетъ полный объемъ того заключенія, что если одинъ изъ множителей равенъ нулю, то и все произведеніе равно нулю.

Зам. 78. Формула $A+(b-c+d)=A+b-c+d$ выводится черезъ распространеніе ариѳметическихъ правилъ о прибавленіи суммы и разности чиселъ, хотя, приступая къ ней, авторъ заявляетъ о томъ, что будетъ говорить объ алгебраическихъ дѣйствіяхъ. Въ этомъ очевидно смѣшеніе понятій о дѣйствіяхъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ, потому что по отношенію къ послѣднимъ указанная формула имѣетъ совершенно иной смыслъ и можетъ быть выведена только при помощи принципа Коши.

Зам. 79. Формула вычитанія многочлена почему то доказывается безъ ссылки на ариѳметику, хотя и она могла бы быть выведена тѣмъ же путемъ примѣненія ариѳметическихъ правилъ и во всякомъ случаѣ остается у автора ариѳметической формулой, а не алгебраической.

Зам. 80. Формула умноженія двухъ разностей также доказывается, повидимому строго, но въ дѣйствительности при отсутствіи основного базиса — доказательства свойства распредѣлительности, что для непозволительныхъ въ сущности цѣлей автора оказывается однако, какъ увидимъ дальше, необходимымъ.

Зам. 81. (Отрицательнымъ многочленомъ назовемъ такой многочленъ, въ которомъ, совершая дѣйствія, начиная съ лѣвой стороны, мы приходимъ къ невозможному вычитанію).

Для примѣра приводится выраженіе $7-5-8+9$, котораго числовое значеніе, равное $+3$, ученики не затруднятся найти послѣ соглашенія о перестановкѣ чиселъ вмѣстѣ съ ихъ знаками. Возникаетъ вопросъ, будетъ ли отрицательнымъ или положительнымъ выраженіе $a-b-c+d$, которое мы, по желанію автора, согласимся на время считать многочленомъ, не смотря на анализъ пунктовъ 10-го и 11-го?

Зам. 82. (Положительнымъ многочленомъ называется такой многочленъ, въ которомъ всѣ дѣйствія, начиная съ лѣвой стороны, возможны).

Для примѣра приводится тотъ же самый многочленъ, только иначе написанный, $7-5+9-8$ и для вящшаго вразумленія поясняется, что при перестановкѣ чиселъ вмѣстѣ съ знаками положительный многочленъ можетъ переходить въ отрицательный. Въ виду такого объединенія идей о положительности и отрицательности, возбужденный нами вопросъ о значеніи многочлена $a-b-c+d$ оказывается празднымъ, потому что, если бы этотъ многочленъ оказался по пункту 21-му отрицательнымъ, то пунктъ 22-й можетъ быть перевелъ бы его въ положительный.

Зам. 83. (Распространимъ всѣ положенія, найденныя для положительныхъ многочленовъ, и на отрицательные многочлены).

Разумѣется это и не трудно въ данномъ случаѣ, когда положительный многочленъ въ точности равенъ отрицательному, но авторъ, испросивъ у публики при такихъ условіяхъ требуемое соглашеніе, вторгается съ нимъ дальше въ совершенно иную область—въ область отрицательныхъ по существу двучленовъ, и вотъ изъ-за такихъ поступковъ позволительно поднять вопросъ, отчего бы въ виду подобной доступности полюбовныхъ соглашеній не распространить правило перемноженія квадратныхъ корней на случай умноженія двухъ мнимыхъ единицъ, или свойство модуля ариѳметической суммы на сумму комплексовъ. Дѣйствуя такимъ образомъ, можно было бы чрезвычайно упростить извѣстное ученіе о кватерніонахъ, распространивъ на кватерніоны законъ перемѣстительности умноженія, и также можно было бы сильно усовершенствовать мое, мало-извѣстное ученіе о терніонахъ, распространивъ на терніоны свойство распредѣлительности умноженія.

Зам. 84. (Въ выраженіи $0-5$ условимся отбрасывать нуль и писать такъ: -5; это и будетъ простѣйшимъ выраженіемъ для отрицательнаго двучлена).

Такимъ образомъ нашъ авторъ договорился до того, что призналъ количество —5 двучленомъ. Отчего въ такомъ случаѣ не считать число 2 двучленомъ, число 2 . 3 трехчленомъ или шестичленомъ, а на подобномъ же основаніи и прежнее количество —5 пятичленомъ?

Зам. 85. (Число со знакомъ минусъ „впереди" назовемъ отрицательнымъ числомъ).

Въ своей алгебрѣ терніоновъ я усмотрѣлъ существованіе кромѣ положительныхъ количествъ еще количествъ новоположительныхъ, но до прочтенія настоящей статьи не догадывался о существованіи чиселъ со знаками назади.

Зам. 86. (Въ отличіе отъ отрицательныхъ чиселъ, положительными числами назовемъ обыкновенныя числа, употребляемыя въ ариѳметикѣ; передъ ними „нужно" подразумѣвать знакъ плюсъ).

Однако серьезные алгебристы не смѣшиваютъ понятій о модулѣ положительнаго числа и о самомъ положительномъ числѣ, а также при обозначеніи модулей не только не обязываютъ ставить плюсъ, но, хотя съ логической точки зрѣнія, считаютъ такую постановку неумѣстной.

Зам. 87. (Чтобы сложить положительное число съ отрицательнымъ, нужно на самомъ дѣлѣ „ихъ" вычесть и поставить знакъ „бóльшаго количества").

Возникаетъ вопросъ, что же изъ чего вычесть — положительное ли число изъ отрицательнаго, отрицательное изъ положительнаго или оба изъ чего нибудь третьяго, да и какъ произвести это вычитаніе, когда рѣчь началась еще только о сложеніи „ихъ", т. е. данныхъ количествъ? Кромѣ того, даже въ предположеніи нашего знакомства съ правиломъ сложенія, выходитъ по указанію автора, что сумма $+5+(-7)$ равна $+2$, потому что въ данномъ случаѣ, кажется, бóльшее количество есть $+5$.

Зам. 88. (Чтобы сложить отрицательныя числа между собою, нужно „ихъ" на самомъ дѣлѣ сложить и передъ суммой поставить знакъ минусъ).

Это понятно, что когда дано сложить отрицательныя числа, то нужно не шутить, а на самомъ дѣлѣ складывать, но какъ же сдѣлать это, когда рѣчь идетъ о самомъ правилѣ сложенія? Сверхъ того, если и допустимъ, что разсматриваемое правило намъ помимо автора извѣстно, то не выйдетъ ли шутка, если мы по указанному совѣту поставимъ передъ суммой „ихъ", т. е. отрицательныхъ чиселъ, знакъ минусъ, отчего искомая сумма сдѣлается неожиданно положительной?

Оказывается, что смѣшеніе понятій о модулѣ числа и о самомъ числѣ ведетъ къ неблагопріятнымъ научнымъ и педагогическимъ послѣдствіямъ.

Между тѣмъ нашъ авторъ не только самъ смѣшиваетъ эти понятія, но и предписываетъ въ пунктѣ 26-мъ своей системы дѣлать то же всѣмъ преподавателямъ.

Зам. 89. (Чтобы вычесть отрицательное число, нужно прибавить „равное" ему „по величинѣ" положительное число).

Но вѣдь равенство чиселъ 2 и $\frac{4}{2}$ или 9 и 3^2 есть также равенство по величинѣ чиселъ. Выходитъ, значитъ, что не только положительный многочленъ можетъ равняться отрицательному многочлену, но, вслѣдствіе смѣшенія понятій о равенствѣ и равнопротивуположности, всякое положительное число равняется соотвѣтствующему ему отрицательному числу.

Зам. 90. (Чтобы умножить два числа, „каждое" изъ которыхъ можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ, нужно „ихъ" на самомъ дѣлѣ перемножить и поставить знакъ плюсъ, если оба числа имѣютъ одинаковые знаки, и знакъ минусъ, если разные знаки).

Послѣ заявленнаго передъ этимъ равенства положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ нечего, конечно, удивляться тому, что при умноженіи двухъ, опредѣленно данныхъ, явныхъ количествъ, напр. въ произведеніи $+5 . -7$, „каждый" производитель можетъ оказаться и положительнымъ, и отрицательнымъ. Но очевидно выйдетъ опять шутка, если мы, умноживши на самомъ дѣлѣ положительное количество на отрицательное, поставимъ еще передъ произведеніемъ минусъ, потому что тогда произведеніе количествъ съ разными знаками внезапно окажется положительнымъ.

Этимъ заканчивается развитіе системы алгебры. Послѣ изложенія дѣйствій надъ отрицательными числами авторъ выясняетъ реальное значеніе этихъ дѣйствій. Такой порядокъ вполнѣ соотвѣтствуетъ послѣдовательности общей системы статьи. Данная послѣдовательность приводитъ къ тому, что авторъ, поговоривъ объ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій, о парадоксѣ теоріи вѣ-

БИБЛИОТЕКА

роятностей, о функціяхъ Вейерштрасса, объ алгебрѣ Грасмана, приходитъ наконецъ къ разсужденію о величинахъ абсолютныхъ и относительныхъ.

Вмѣщающая эти разсужденія одна съ нѣсколькими строчками страница статьи заслуживала бы того, чтобы переписать ее дословно и снабдить примѣчаніями буквально къ каждому, лично авторскому, утвержденію. Но это была бы уже мелочная придирчивость. Можно ограничиться для круглаго счета десятью замѣтками, выдерживая до конца въ нумераціи замѣтокъ округленность общепринятой системы счисленія. При такихъ условіяхъ придется говорить только о существенномъ.

Зам. 91. (Есть такія величины, которыя могутъ быть отсчитываемы до безконечности въ двѣ противуположныя стороны, напр. время).

Но если подъ словомъ „время" подразумѣвать не промежутокъ между двумя моментами, а ту абстракцію отъ реальныхъ представленій, которую подразумѣваетъ авторъ, отсчитывающій время отъ $-\infty$ до $+\infty$, то это вовсе не есть величина въ реальномъ смыслѣ слова, какъ не можетъ считаться такой величиной безконечная въ обѣ стороны прямая линія, или безконечная плоскость или безконечное пространство.

Зам. 92. (Къ данному времени мы можемъ прибавить сколько угодно разъ по одному часу и будемъ получать будущія времена; отъ даннаго времени мы можемъ отнимать сколько угодно разъ по одному часу и будемъ получать прошедшія времена).

Я въ моментъ начала писанія настоящей замѣтки задаю время 1000 лѣтъ послѣ Рожд. Хр. и, прибавляя по одному часу, получаю очень многія прошедшія, а не будущія, времена, или задаю время середины 21-го вѣка и, отнимая по часу, получаю также очень многія будущія, но не прошедшія, времена, а это показываетъ, что выражаться такъ, какъ выражается авторъ, нельзя.

Зам. 93. (Но не всѣ величины могутъ быть отсчитываемы до безконечности въ обѣ стороны).

Автору, знакомому съ теоріями разныхъ математическихъ функцій, слѣдовало бы помнить, что отсчетъ до безконечности, вообще и независимо отъ двоякаго направленія, не есть необходимый признакъ понятія о величинѣ.

Зам. 94. (Такъ, къ данному вѣсу можно прибавлять сколько угодно разъ по одному фунту, но отнимать отъ даннаго вѣса по одному фунту можно лишь до тѣхъ поръ, пока получится или нуль, или меньше одного фунта, дальнее вычитаніе становится невозможнымъ).

Такъ какъ, судя по сказанному, авторъ имѣетъ въ виду реальный вѣсъ какого нибудь тяжелаго тѣла, а не отвлеченное представленіе объ эффектѣ притяженія, которое можетъ перейти и въ отталкиваніе, то желательно знать, какъ будетъ онъ увеличивать по фунтамъ вѣсъ луны, или уменьшать тотъ же вѣсъ до тѣхъ поръ, пока его можно будетъ уравновѣсить аптекарской гирькой, или пока самъ авторъ признаетъ, что рѣчь его непозволительна по формѣ.

Зам. 95. (Величины, могущія отсчитываться до безконечности только въ одну сторону, называются абсолютными величинами).

Принимая во вниманіе, что народонаселеніе хотя бы всего земного шара не допускаетъ отсчета до безконечности, нужно признавать, по автору, что оно не есть величина абсолютная.

Зам. 96. (Нуль для такихъ величинъ означаетъ отсутствіе величины).

Слѣдовательно, замѣтимъ теперь уже, бываютъ нули, которые не означаютъ отсутствія величины, и, какъ увидимъ дальше, авторъ подтвердитъ и разъяснитъ нашу догадку.

Зам. 97. (Величины, могущія подобно времени отсчитываться въ обѣ стороны до безконечности, называются относительными величинами).

Въ виду того, что нормальный круговой синусъ, хотя и допускаетъ отсчетъ въ двухъ противуположныхъ направленіяхъ, но только до единицы, а не до безконечности, слѣдуетъ заключить, что такой синусъ не есть величина, ни абсолютная — по первому указанію, ни относительная—по второму.

Зам. 98. (Такія величины не имѣютъ абсолютнаго нуля).

Значитъ, если даже авторъ удалитъ отъ безконечности опредѣленіе относительной величины и согласится принять въ число такихъ величинъ нормальный круговой синусъ, то всетаки окажется, что означенный синусъ, при всемъ разнообразіи процессовъ своего измѣненія, никогда не получитъ значенія, равнаго абсолютному нулю.

Зам. 99. (Для отсчитыванія подобныхъ величинъ нужно за исходный пунктъ принять величину произвольную).

Поэтому, даже ограничившись примѣрами автора — примѣромъ времени, какъ величины относительной, и вѣса, какъ величины абсолютной, мы, слѣдуя съ догматической точностью заявленію автора, можемъ засвидѣтельствовать, что за нуль для счета времени онъ соглашается принять 273548 пудовъ.

Зам. 100. (Величина, принятая за исходный пунктъ отсчитыванія, называется относительнымъ нулемъ).

Итакъ, вотъ они — эти самые нули, которые дѣйствительно показываютъ не только присутствіе величинъ, но и солидные вѣса или другіе признаки послѣднихъ.

Очевидно, что всѣ эти разсужденія о величинахъ и нуляхъ суть только результаты явнаго смѣшенія понятій. Напр. когда на прямой неопредѣленной берутъ точку начала и отъ этой точки отсчитываютъ абсциссы, то обыкновенно говорятъ, что нуль этихъ абсциссъ есть выбранная точка, а авторъ полагаетъ, что это есть длина прямой, отсчитываемая до выбранной точки неизвѣстно откуда, пожалуй хотя отъ одного изъ концовъ прямой, и выражается авторъ при этомъ такъ, что его опредѣленіе относительнаго нуля подлежитъ еще, какъ выше показано, многостороннему развитію.

Покончивъ разсужденія о величинахъ и нуляхъ, г. Ермаковъ обѣщаетъ въ будущемъ перейти къ „высшей ступени символизаціи", къ распространенію буквеннаго обозначенія на количества положительныя и отрицательныя. Интересно знать, какъ построитъ онъ эту высшую ступень, обходясь безъ принципа Коши, о которомъ онъ въ своихъ основныхъ положеніяхъ не только не упоминалъ, но которому даже въ правилахъ дѣйствій съ отрицательными количествами прямо противорѣчилъ.

Статья заканчивается двумя заявленіями, изъ которыхъ первое слѣдующее:

(Все изложенное здѣсь я предлагаю принять гг. педагогамъ въ руководство при первоначальномъ преподаваніи алгебры).

Для того персонала преподавателей, который теперь частью уже выступилъ, а частью выступаетъ на сцену, этотъ пунктъ не требуетъ коментарій.

Второе заявленіе состоитъ въ слѣдующемъ:

(Думаю, что мною выяснены мельчайшія подробности начальной алгебры, и въ умахъ учениковъ не останется никакихъ сомнѣній).

Полагаю, что теперь уже имѣется не мало учениковъ, которые также безъ разъясненій оцѣнятъ ясность и полезность подобнаго преподаванія алгебры.

Въ заключеніе нужно сказать, что система алгебры г. Ермакова не должна считаться оригинальной. Она составляетъ лишь особый экстрактъ ученія старыхъ французскихъ символистовъ, которыхъ крупнѣйшимъ представителемъ явился Бертранъ.

Послѣдній съ такимъ искусствомъ придалъ этому замѣчательному въ историческомъ отношеніи ученію псевдо-научную форму, что прошло много лѣтъ, пока стали понимать его дѣйствительную сущность и его серьезную историческую роль. Нашему автору принадлежитъ крупная заслуга въ томъ, что доведя постройку безъидейнаго символизма до крайнихъ вершинъ, онъ одной настоящей статьей разрушилъ все построеніе до самаго основанія.

Оставимъ въ сторонѣ законченный нами спеціальный разборъ. Посмотримъ шире на сущность тѣхъ заключеній, которыя связаны непосредственно съ этимъ разборомъ. Всякій читатель признаетъ то, что настоящая рецензія написана такъ подробно не ради частнаго и исключительнаго обстоятельства. Частныя данныя, установленныя этой рецензіей, находятъ почву, на которой можно развить нѣкоторыя, вполнѣ законныя, обобщенія.

Разобранная статья далеко не представляетъ чего-либо исключительнаго въ современной педагогической литературѣ. Уже то обстоятельство, что эта статья, почти не встрѣчая замѣчаній о недостаткахъ, дала матеріалъ для сочувственныхъ отзывовъ, показываетъ, что по существу дѣла ея направленіе не шло въ разрѣзъ со взглядами многихъ. И въ самомъ дѣлѣ, лица, знакомыя широко съ положеніемъ нашего преподаванія въ разныхъ мѣстностяхъ, легко подтвердятъ это заключеніе. Въ дѣйствительности очень часто съ педагогическихъ каѳедръ развиваются ученія, близко схожія съ тѣмъ, которое выше было подвергнуто анализу.

Наша элементарно-математическая литература очень богата сочиненіями многихъ авторовъ. На общій взглядъ дѣло преподаванія математики привлекаетъ къ себѣ большую сумму труда. Однако въ большинствѣ случаевъ этотъ трудъ обставленъ крайне неблагопріятно. Самая обширность литературы свидѣтельствуетъ лишь о неустойчивости, и въ силу этого, о бѣдности ея общаго содержанія.

Значительное большинство упомянутыхъ сочиненій не выдерживаютъ никакой критики. Ихъ большій или меньшій временный успѣхъ объясняется тѣмъ, что наличный уровень образованія многихъ преподавателей далеко не можетъ считаться высокимъ. Довольно давно уже оформилось и даже сложилось иное направленіе математической педагогіи, построенное и на научной обработкѣ теоріи и на практическомъ развитія новѣйшихъ учебныхъ пріемовъ. Но поддержка этого направленія составляетъ пока дѣло меньшинства.

Современное, наиболѣе общее, направленіе математической педагогіи не только не прогрессивно, но представляетъ періодъ печальной реакціи сравнительно и съ былыми временами. Никогда прежде преподаваніе не имѣло такого, какъ теперь, направленія узкой, мелочной утилитарности. Въ прежнія времена изученіе математики связывалось и съ умственнымъ, и съ этическимъ развитіемъ. Въ наше время ни о томъ, ни о иномъ развитіи нѣтъ большею частью и легкаго помина.

Не трудно оцѣнить то, къ чему стремится теперь, говоря о большинствѣ случаевъ, наша математическая педагогія. Она обучаетъ до крайности напряженной быстротѣ умственнаго счета, хлопочетъ о наглядности отвлеченныхъ представленій, развиваетъ мелочную находчивость, пріучаетъ къ тупо усидчивому или случайно успѣшному труду. Научная же сила математическихъ построеній, развитіе съ помощью математики строгости умозрѣнія, развитіе глубины воображенія, твердый прогрессъ яснаго мышленія—все это въ загонѣ, все это игнорируется. Современная математическая педагогія часто воспитываетъ своими пріемами умозрѣніе низменнаго сорта, но не часто содѣйствуетъ истинному просвѣщенію.

Серьезное изученіе теоріи всѣхъ четырехъ отдѣловъ элементарной математики имѣетъ глубокое вліяніе, развивающее и умъ, и характеръ учениковъ. Въ настоящее время эта теорія въ нѣкоторыхъ литературныхъ трудахъ уже достигла почти законченной и прочной обработки. Отъ правильнаго приспособленія къ такимъ трудамъ наличныхъ учебныхъ программъ и отъ внимательной работы преподавателей зависитъ дѣйствительный успѣхъ математической педагогіи. Производительность такой работы съ избыткомъ покроетъ всѣ затраченныя на нее усилія.

Пора уже сдать въ историческій архивъ ту массу научныхъ и педагогическихъ абсурдовъ, которыми наводнена наша учебная литература и которая царитъ еще въ школахъ. Пора отрѣшиться многимъ преподавателямъ отъ той невѣжественной рутины, благодаря которой въ школахъ расшатываются основы самого глубокаго научнаго ученія, вводится неумѣстное по существу дѣла разнообразіе педагогическихъ пріемовъ, тратится непроизводительно трудъ и достигаются исключительные, ничтожные результаты. Изученіе основной точной науки должно стать общедоступнымъ, регулирующимъ весь процессъ развитія учащихся, твердо устойчивымъ и широко плодотворнымъ. Но для этого педагогическій трудъ долженъ принять иное, болѣе опредѣленное, чѣмъ теперь, направленіе.

Цѣна перваго выпуска
30 коп.