ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНІЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ И НѢКОТОРЫХЪ УЛЬТРАЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

Н. Б. Делоне.

Настоящая статья составляетъ содержаніе доклада, который мною былъ заявленъ для прочтенія на минувшемъ XI Съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ, но не состоялся по причинамъ, не позволившимъ мнѣ быть на Съѣздѣ.

Теорія эллиптическихъ функцій привлекала къ себѣ за послѣднее пятидесятилѣтіе особое вниманіе математиковъ и, благодаря работамъ Вейерштрасса и трудамъ Гальфена, Шварца и другихъ, вылилась въ форму весьма законченную. Окончательное вычисленіе эллиптическихъ функцій весьма удобно производится помощью таблицъ Лежандра или помощью рядовъ ϑ. Все это обязываетъ меня сказать нѣсколько словъ о томъ, почему я позволяю себѣ въ настоящей статьѣ обратить вниманіе математиковъ на графическій способъ вычисленія этихъ функцій. Дѣлаю я это потому, что, во-первыхъ, предлагаемый мною графическій способъ можетъ быть примѣняемъ всякимъ техникомъ, получившимъ высшее техническое образованіе, такъ какъ примѣненіе этого способа не требуетъ спеціальной математической подготовки необходимой для свободнаго обращенія съ рядами ϑ или даже съ таблицами Лежандра. Во-вторыхъ, этотъ способъ даетъ весьма быстро не одно какое нибудь, а цѣлый рядъ значеній вычисляемой функціи. Наконецъ и для спеціалистовъ математиковъ предлагаемый способъ можетъ представить интересъ, потому что онъ распространяется и на нѣкоторые ультраэллиптическіе интегралы.

§ 1. Если прямая AB опредѣленной длины m скользитъ однимъ своимъ концомъ A по окружности, описанной радіусомъ $OA=a$, другимъ же концомъ — по прямой MM', проходящей чрезъ центръ O, то между углами $AOB=\varphi$ и $ABO=\theta$ существуетъ тригонометрическое соотношеніе (Fig. 1)

$$\frac{\sin\theta}{a}=\frac{\sin\varphi}{m}$$

Полагая $\frac{a}{m}=k$, получимъ $\sin\theta=k.\sin\varphi$. Если при этомъ принять φ за амплитуду нѣкотораго аргумента u, то получимъ:

$$\cos\theta=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta\varphi=dnu$$

$$u=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos\theta} \tag{1}$$

$$du=\frac{d\varphi}{\cos\theta}\,. \tag{2}$$

Для краткости назовемъ прямую AB *шатуномъ*, радіусъ OA *кривошипомъ*, по аналогіи съ извѣстнымъ механизмомъ.

Уравненіе (2) показываетъ слѣдующее: если возьмемъ на прямой MM' приращеніе $\delta\varphi$ амплитуды φ и спроэктируемъ его на шатунъ перпендикулярами къ прямой MM', то получимъ приращеніе δu аргумента u, такъ какъ на основаніи (2) приращеніе $\delta\varphi$ есть ортогональная проэкція приращенія δu. Повторяя это построеніе для нѣсколькихъ послѣдовательныхъ значеній угла φ, въ предѣлахъ отъ O до φ, получимъ рядъ послѣдовательныхъ значеній δu_1, δu_2 ... приращенія δu. Строя ихъ сумму, получимъ приближенное значеніе эллипти-

Наше графическое построеніе даетъ намъ сумму:

$$\frac{\pi}{2n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}+\frac{1}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\left(\frac{2\pi}{2n}\right)}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}}\right]. \tag{7}$$

Формула (6) показываетъ, что къ этой суммѣ нужно еще приложить два члена $(-\xi_1)$ и $(-\xi_2)$ такихъ что:

$$\xi_1=\frac{\pi}{4n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}}-1\right] \tag{8}$$

$$\xi_2=\frac{\pi^2.\varepsilon.k^2.\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right).\cos\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{4.n^2.12\left(1-k^2.\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

Начнемъ съ вычисленія члена ξ_2. Максимальная величина члена ξ_2 не можетъ быть больше максимальной величины функціи:

$$\frac{\pi^2.\varepsilon.k^2.\sin\varphi.\cos\varphi}{4.n^2.12(1-k^2.\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

такъ какъ $\frac{p\pi}{2n}$ представляетъ собою частное значеніе перемѣннаго φ. Первая производная отъ (10) обращается въ нуль, если:

$$\sin\varphi.\cos\varphi=\frac{\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}.\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}{k\sqrt{3}}$$

$$\sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{k^2} \pm \frac{\sqrt{k^4-k^2+1}}{k^2}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{k^2} \mp \frac{\sqrt{k^4-k^2+1}}{k^2}$$

$$\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi} = \sqrt{2-k^2 \mp \sqrt{k^4-k^2+1}} \qquad (11)$$

Максимальная величина выраженія (10) есть:

$$\frac{\pi^2.\text{э}}{4.n^2.12} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+k^2-2}}{\sqrt{3[2-k^2-k^2\sqrt{k^4-k^2+1}]}} > \text{Max.}\,\xi_2 \qquad (12)$$

Здѣсь при радикалѣ $\sqrt{k^4-k^2+1}$ въ числителѣ надо взять знакъ (+), потому что иначе выраженіе (12) было бы мнимымъ. Напротивъ, того въ знаменателѣ надо взять этотъ радикалъ со знакомъ (—), потому что иначе уравненіе (11) дало бы для $\sqrt{1-k^2.\sin\varphi}$ величину большую единицы, что невозможно.

Величина (12) возрастаетъ съ возрастаніемъ модуля k и дѣлается очень большою при k близкихъ къ единицѣ. Поэтому при k близкихъ къ единицѣ необходимо предварительно понизить модуль k преобразованіемъ Ландена. Но величина (12) быстро убываетъ съ уменьшеніемъ k, такъ что уже при $k=0{,}96$ и $n=12$ максимальная величина члена ξ_2 не превосходитъ 0,003839. Поэтому, если ограничимся вычисленіемъ съ точностью до $\frac{1}{250}$ (достаточною для большинства техническихъ задачъ), то можно пренебречь членомъ ξ_2 для $k<0{,}9$; $n=12$.

Членъ ξ_1 принимаетъ наибольшее значеніе при $p=n$. Но даже и это наибольшее его значеніе не превосходитъ 0,0032 при $k=0{,}3$, $n=12$ и дѣлается еще меньшимъ для $k<0{,}3$. Такъ что членомъ ξ_1 можно тоже пренебречь въ тѣхъ случаяхъ, когда $k<0{,}3$.

Но для $k>0{,}3$ членъ ξ_1 можетъ пріобрѣсти такія значенія, которыми нельзя пренебречь. Однако въ такихъ случаяхъ не трудно исправить построеніе, данное въ § 1-мъ. Дѣйствительно, формула (8) можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\xi_1 = \frac{\pi}{4n}(sec\theta - 1). \tag{13}$$

гдѣ θ есть уголъ ABO (фигура 1-я) соотвѣтствующій углу $\varphi = \frac{p\pi}{2n}$. Достаточно, слѣдовательно, уменьшить величины u_1, u_2, $u_3 \ldots$, полученныя нашимъ построеніемъ, вычитая изъ нихъ соотвѣтственныя длины $\frac{\pi}{4n}(sec\theta-1)$, которыя легко можно построить. Такъ, напримѣръ, для того чтобы исправить u_6—проводимъ чрезъ центръ C прямую параллельную соотвѣтственному шатуну (фиг. 2) до пересѣченія ея съ касательною проведенною въ точкѣ H къ окружности C; переносимъ длину $pp' = sec\theta - 1$ на сторону отдѣльно построеннаго угла $\frac{\pi}{4n}$, откладывая ее отъ вершины Q и описываемъ радіусомъ $sec\theta-1$ дугу tt'. Имѣемъ:

$$tt' = \frac{\pi}{4n}(sec\theta - 1).$$

Если теперь вычтемъ tt' изъ суммы $\delta u_1 + \delta u_2 + \ldots + \delta u_6 = FF_6$, то получимъ $u_6 = FP_6$, которое и откладываемъ на прямой параллельной оси u. Такимъ образомъ получимъ точки P_6, $P_5 \ldots$ для построенія сѣтки. На фиг. 2-й прямыя F_6P_6, $F_5P_5 \ldots$ до такой степени вышли параллельными между собою, что этимъ обстоятельствомъ можно было бы воспользоваться для облегченія построенія.

Итакъ, для построенія интеграла $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ получимъ правило: 1) для $k < 0{,}3$ построеніе производится такъ, какъ показано въ § 1-мъ; 2) для $0{,}9 > k > 0{,}3$ его надо исправить вычитаніемъ длинъ $\frac{\pi}{4n}(sec\theta-1)$, какъ указано выше, 3) и только для $k > 0{,}9$

приходится прибѣгать къ предварительному пониженію модуля k преобразованіемъ Ландена.

Для построенія эллиптическаго интеграла $\int_0^{\varphi} \Delta\varphi . d\varphi$ второго рода нужно откладывать длину $\frac{\pi}{2n}$ на шатунахъ и взять сумму ихъ ортогональныхъ проэкцій на прямую MM'.

§ 3. Наше графическое построеніе основано на легкости построенія функціи $\sqrt{1-k^2 . \sin^2\varphi}$ и дѣленія $d\varphi$ на эту функцію. Это позволяетъ строить также и ультраэллиптическій интегралъ вида:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(m_1-x)(m_2-x)\ldots(m_j-x)}} = U$$

въ которомъ всѣ корни $m_1, m_2 \ldots m_j$ дѣйствительные.

Дѣйствительно, положимъ: $x=\sin^2\varphi$; отсюда $dx=2\sin\varphi . \cos\varphi d\varphi$

Положимъ $k_1{}^2=\frac{1}{m}$; $k_2{}^2=\frac{1}{m}$; $\ldots k_j{}^2=\frac{1}{m_j}$. Тогда интегралъ U приметъ видъ:

$$U=2k_1 k_2 \ldots k_j \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi . \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k_1{}^2 . \sin^2\varphi}\sqrt{1-k_2{}^2 \ldots \sin^2\varphi}\sqrt{1-k_j{}^2\sin^2\varphi}} .$$

Величина $\frac{-\sin\varphi . \cos\varphi . d\varphi}{\sqrt{1-k_1{}^2 . \sin^2\varphi}}$ представляетъ собою диференціалъ функціи $\sqrt{1-k_1{}^2\sin^2\varphi}=\cos\theta_1$. Поэтому, помощью шатуна диференціалъ $\frac{\sin\varphi . \cos\varphi . d\varphi}{\sqrt{1-k_1{}^2\sin^2\varphi}}$ легко можетъ быть построенъ. Остается раздѣлить его послѣдовательно на $\sqrt{1-k_2{}^2 \sin^2\varphi} \ldots$, $\sqrt{1-k_j{}^2 . \sin^2\varphi}$, чтобы получить выраженіе, стоящее подъ знакомъ даннаго интеграла. Это дѣленіе равносильно дѣленію на $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3 \ldots \cos\theta_j$ и можетъ быть произведено подобно тому, какъ это дѣлалось въ § 1-мъ; нужно только брать для каждаго k шатунъ соотвѣтственной длины $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$... или $\sqrt{m_j}$.

Эту теорію можно было бы изложить въ дидактической, но болѣе элементарной формѣ съ приложеніемъ къ наиболѣе важнымъ техническимъ вопросамъ. Но, предварительно, я счелъ своею обязанностью представить ее на судъ математиковъ. Во всякомъ случаѣ предлагаемый графическій способъ, хотя и приближенный, можетъ дать болѣе полное рѣшеніе задачъ, чѣмъ употребляемое въ полуэлементарныхъ курсахъ разложеніе по степенямъ синусовъ или косинусовъ. Такъ, напримѣръ, опредѣленіе движенія математическаго маятника можно было бы дать помощью этого способа и для большихъ колебаній, ограничиваясь примѣненіемъ построенія даннаго въ § 1-мъ, требующаго только знакомства съ тѣмъ интеграломъ, къ которому приводится самая задача и съ основаніями аналитической геометріи.

Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.
Математическій Сборникъ, Т. XXIII.

Университетская типографія, Страстной бульваръ.