Изслѣдованіе о видѣ полнаго интеграла однороднаго уравненія съ частными производными перваго порядка, не содержащаго явно неизвѣстной функціи.

И. С. Губкина.

(Представлено Н. А. Шапошниковымъ).

Въ теоріи и практикѣ интегрированія уравненій съ частными производными играетъ существенную роль извѣстное преобразованіе, данное Якоби (Iacobi: Dilucidationes de Aequationum differentialium sistematis..... Crelles Journal. 23 Bd., s. 18), посредствомъ котораго всякое уравненіе перваго порядка приводится къ однородному относительно производныхъ и не содержащему явно неизвѣстной функціи.

Въ связи съ этимъ преобразованіемъ стоитъ вопросъ о появленіи въ полномъ интегралѣ уравненія лишняго произвольнаго постояннаго. Обстоятельство это, противорѣчащее основной теоріи полныхъ интеграловъ Лагранжа, представляетъ парадоксъ, не получавшій до настоящаго времени удовлетворительнаго аналитическаго объясненія. (Mansion. Théorie des équations...., p. 27).

Очень простое и изящное изслѣдованіе И. С. Губкина о видѣ интеграла однороднаго уравненія вполнѣ разъясняетъ этотъ парадоксъ и заслуживаетъ вниманія, какъ по существу рѣшеннаго вопроса, принадлежащаго къ числу основныхъ въ теоріи уравненій съ частными производными, такъ и въ качествѣ образщика изслѣдованія, выполненнаго по натуральному методу интегрированія.

Предлагаемая статья представлена на мое разсмотрѣніе въ ноябрѣ 1880-го года, и тогда же была реферирована мною отъ имени ея автора въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ. И. С. Губкину было тогда только 18 лѣтъ.

Н. Шапошниковъ.

Москва, 10 февраля 1891-го года.

Видъ интеграла однороднаго ур—ія

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

§ 1. Чтобъ узнать, каковъ интегралъ ур—ія (1), примѣнимъ къ нему методу интегрированія Коши.

Прежде всего слѣдуетъ составить извѣстную систему совмѣстныхъ дифференціальныхъ ур—ій, служащихъ къ опредѣленію условныхъ интеграловъ даннаго ур—ія.

Эта система въ разсматриваемомъ случаѣ можетъ быть представлена пропорціей

$$\frac{dx_i}{\left(\dfrac{dF}{d\dfrac{p_i}{p_n}}\right)\cdot\dfrac{1}{p_n}}=\frac{-dx_n}{\dfrac{dF}{d\dfrac{p_1}{p_n}}\cdot\dfrac{p_1}{p_n^{\,2}}+\ldots..+\dfrac{dF}{d\dfrac{p_{n-1}}{p_n}}\cdot\dfrac{p_{n-1}}{p_n^{\,2}}}=\frac{dp_i}{-\dfrac{dF}{dx_i}}=\frac{dp_n}{-\dfrac{dF}{dx_n}}=\frac{dz}{o}$$

гдѣ i означаетъ произвольное число изъ ряда $1,\ 2,\ldots,n-1$.

Если въ каждомъ отношеніи умножимъ послѣдующаго на p_n, то выйдетъ:

$$\frac{dx_i}{\left(\dfrac{dF}{d\dfrac{p_i}{p_n}}\right)}=\frac{-dx_n}{\dfrac{dF}{d\dfrac{p_1}{p_n}}\cdot\dfrac{p_1}{p_n}+\ldots..+\dfrac{dF}{d\dfrac{p_{n-1}}{p_n}}\cdot\dfrac{p_{n-1}}{p_n}}=\frac{dp_i}{-\dfrac{dF}{dx_i}p_n}=\frac{dp_n}{-\dfrac{dF}{dx_n}p_n}=\frac{dz}{o}$$

Замѣтимъ, что, назвавъ черезъ dv знаменателя предыдущихъ отношеній, будемъ имѣть:

$$dv=\frac{\dfrac{p_n}{p_n^{\,2}}dp_i}{-\dfrac{dF}{dx_i}}=\frac{-\dfrac{p_i}{p_n^{\,2}}dp_n}{\dfrac{p_i}{p_n}\cdot\dfrac{dF}{dx_n}}=\frac{\dfrac{p_n\,dp_i-p_i\,dp_n}{p_n^{\,2}}}{-\dfrac{dF}{dx_i}+\dfrac{p_i}{p_n}\cdot\dfrac{dF}{dx_n}}=\frac{d\dfrac{p_i}{p_n}}{-\dfrac{dF}{dx_i}+\dfrac{p_i}{p_n}\dfrac{dF}{dx_n}}$$

После этого условныя дифференціальныя ур—ія представятся такъ:

$$\frac{dx_i}{\left(\dfrac{dF}{d\dfrac{p_i}{p_n}}\right)}=\frac{-dx_n}{\dfrac{dF}{d\dfrac{p_1}{p_n}}\cdot\dfrac{p_1}{p_n}+\ldots\ldots+\dfrac{dF}{d\dfrac{p_{n-1}}{p_n}}\cdot\dfrac{p_{n-1}}{p_n}}=\frac{d\dfrac{p_i}{p_n}}{-\dfrac{dF}{dx_i}+\dfrac{p_i}{p_n}\dfrac{dF}{dx_n}},$$

$$dz=0 \text{ и}$$

$$\frac{dx_1}{\left(\dfrac{dF}{d\dfrac{p_1}{p_n}}\right)}=\frac{-dp_n}{p_n\dfrac{dF}{dx_n}}$$

Интегралы первой группы предыдущихъ ур—ій должны имѣть видъ

$$\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=a_1$$

$$\varphi_2\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{2n-2}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=a_{2n-2}$$

т. е. первыя части должны быть однородными функціями производныхъ.

Послѣднія же ур—нія дадутъ

$$\varphi_{2n-1}\left(x_1,\ldots,x_n,p_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=a_{2n-1}$$

$$z=a_{2n}.$$

Найдя условные интегралы, мы должны замѣнить въ нихъ постоянныя a начальными значеніями $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ζ и $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ количествъ $x_1, \ldots, x_n$, z и $p_1, p_2, \ldots, p_n$; получимъ:

$$\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\varphi_1\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\pi_1}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$\varphi_2\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\varphi_2\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\pi_1}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{2n-2}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\varphi_{2n-2}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\pi_1}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$\varphi_{2n-1}\left(x_1,\ldots,x_n,p_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\varphi_{2n-1}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\pi_n,\frac{\pi_1}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$z=\zeta$$

Эти ур—ія послѣ исключенія изъ нихъ $\dfrac{\pi_1}{\pi_n}$, при помощи ур—ія $F\left(\xi_1,\ldots,\xi_n,\dfrac{\pi_1}{\pi_n},\ldots,\dfrac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)=0$ дадутъ

$$\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\psi_1\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\pi_2}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$\varphi_2\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\psi_2\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\pi_2}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{2n-2}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\psi_{2n-2}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\pi_2}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$\varphi_{2n-1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{p_1}{p_n},\ldots,\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\psi_{2n-1}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\pi_n,\frac{\pi_2}{\pi_n},\ldots,\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$z=\zeta$$

Чтобы найти полный интегралъ согласно съ нормальнымъ правиломъ интегрированія по методѣ Коши, возьмемъ Майерово равенство $\zeta = \pi_2\xi_2 + \dots + \pi_n\xi_n + \zeta$, и внесемъ въ него величины ζ и $\xi_2, \dots, \xi_n$, выраженныя при помощи условныхъ интеграловъ (2) черезъ перемѣнныя $x_1, \dots, x_n$ и z, черезъ опредѣленное постоянное ξ_1 и произвольныя постоянныя $\pi_2, \dots, \pi_n$.

Величина ζ непосредственно дается послѣднимъ изъ ур—ій (2). Указанное же опредѣленіе $\xi_2, \dots, \xi_n$ можно произвести безъ ур—ія $\varphi_{2n-1} = \phi_{2n-1}$ при помощи однихъ $2n$—2 первыхъ ур—ій; для этого слѣдуетъ только исключить изъ нихъ величины $\frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}$ и полученныя n—1 ур—ія рѣшить относительно $\xi_2, \dots, \xi_n$; получимъ

$$\xi_2 = \theta_2\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\pi_2}{\pi_n}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\xi_n = \theta_n\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\pi_2}{\pi_n}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right)$$

Поэтому полный интегралъ ур—ія (1), опредѣленный по методѣ Коши, будетъ имѣть видъ

$$z = \pi_2\,\theta_2\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\pi_2}{\pi_n}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right) + \dots + \pi_n\,\theta_n\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\pi_2}{\pi_n}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}\right) + \zeta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Это ур—іе однородно относительно неизвѣстной функціи и произвольныхъ постоянныхъ.

Отсюда заключаемъ, что *ур—іе* $F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = o$ *имѣетъ полный интегралъ, всегда приводимый къ виду* $z = f\,(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n$, *гдѣ* f *есть однородная функція перваго порядка относительно постоянныхъ* a.

Докажемъ кстати, что наоборотъ всякій такой интегралъ соотвѣтствуетъ ур—ію вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = o.$$

Для этого замѣтимъ, что вслѣдствіе упомянутаго свойства f этотъ интегралъ можно написать такъ

$$z = a_{n-1} f\left(x_1, \dots, x_n, \frac{a_1}{a_{n-1}}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right) + a_n.$$

Ур—іе съ частными производными, соотвѣтствующее такому полному интегралу, получится черезъ исключеніе постоянныхъ a изъ равенствъ $p_1 = a_{n-1}\frac{d}{dx_1} f\left(x_1, \dots, x_n, \frac{a_1}{a_{n-1}}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right)$

$$p_2 = a_{n-1}\frac{df}{dx_2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_n = a_{n-1}\frac{df}{dx_n}$$

Замѣтивъ, что результатъ исключенія не зависитъ отъ способа его выполненія, мы исключимъ сперва a_{n-1}, стоящее множителемъ, раздѣливъ для этого каждое изъ ур—ій на послѣднее. Получимъ

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{df}{dx_n}}$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{\frac{df}{dx_{n-1}}}{\frac{df}{dx_n}}$$